Control de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Septiembre 2009.

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

Elija un problema entre los siguientes.

1. Decide si la integral $\int_1^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$ converge.

   Una Solución:

   Recordemos que para todo $z \in \mathbb{R}$ se cumple que

   $$|\sin(z)| \leq |z|$$

   Por lo tanto

   $$0 \leq |\sin(x^{-2})| \leq |x^{-2}| = x^{-2}$$

   $$\boxed{\text{2 puntos}}$$

   Como la integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge, se tiene que $\int_1^{\infty} |\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)| dx$ converge.

   $$\boxed{\text{2 puntos}}$$

   Por lo tanto

   $$\int_1^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

   converge.

$\boxed{\text{2 puntos}}$

<u>Otra Solución:</u>

Recordemos que para todo $z \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$|\sin(z)| \leq |z|$$

$\boxed{\text{1 punto}}$

Además como $x \in [1, \infty)$ se tiene que $x^{-2} \in (0, 1]$ por lo tanto

$$\sin(x^{-2}) \in (0, \sin(1)]$$

Es decir,

$$\sin(x^{-2}) > 0, \ \forall x \geq 1$$

Por lo tanto

$$0 < \sin(x^{-2}) < x^{-2}$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$

Como la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge

$\boxed{\text{2 puntos}}$

se tiene que

$$\int_1^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

converge.

$\boxed{\text{1 punto}}$

Otra Solución:

Como $x \in [1, \infty)$ se tiene que $x^{-2} \in (0, 1]$ por lo tanto

$$\sin(x^{-2}) \in (0, \sin(1)]$$

Es decir,

$$f(x) = \sin(x^{-2}) > 0, \ \forall x \geq 1$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Además la función $g(x) = x^{-2} > 0 \ \forall x \geq 1$, y el límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Como la integral $\displaystyle\int_1^\infty g(x)dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ converge se tiene que

$$\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

converge.

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

2. Considera la función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Calcula la longitud de arco del gráfico de f

Solución:

Recordemos que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\cosh'(x) = \sinh(x), \ \text{y} \ \sinh'(x) = \cosh(x)$$

y además

$$\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$

Por lo tanto la longitud de arco es:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (\cosh'(x))^2} dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \sinh^2(x)} dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{\cosh^2(x)} dx =$$

$$\int_{-1}^{1} |\cosh(x)| dx$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$

Como $e^z > 0,\ \forall z \in \mathbb{R},$ se tiene que

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-2}) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

$\boxed{\text{1 punto}}$

entonces la longitud de arco de f es:

$$\int_{-1}^{1} |\cosh(x)| dx = \int_{-1}^{1} \cosh(x) dx = \sinh(1) - \sinh(-1)$$

$\boxed{\text{1 punto}}$

$$= e - \frac{1}{e}$$