Control de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Octubre, 2009

Nombre:

Tiempo: 15 **minutos**

Elija un problema entre los siguientes.

1. Calcula el límite de la sucesión

$$a_n = \binom{n}{3}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}\right)$$

Solución:

$$a_n = \binom{n}{3}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}\right) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}\right)$$

$\boxed{\text{1 punto}}$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{6n^2}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{6}\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$

Como

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x} = 0,$$

y como $\dfrac{1}{n} \to 0$ y es no nula se tiene que

$$\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \to 0$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

Además como

$$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \to 1$$
$$\frac{n-2}{n} = 1 - 2 \times \frac{1}{n} \to 1$$

Se tiene que

$$a_n = \binom{n}{3}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}\right) = \frac{1}{6}\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right) \to \frac{1}{6}\times 1\times 1\times 0 = 0$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

2. Sea (a_n) decreciente y positiva tal que $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ converge a un número real $r \neq 1$. Demuestra que $a_n \to 0$.

Solución:

Como (a_n) es positiva, entonces 0 es una cota inferior de (a_n).

$$\boxed{\text{1,5 punto}}$$

Además como (a_n) es decreciente y acotada inferiormente, entonces es convergente.

$$\boxed{\text{1,5 punto}}$$

Sea L su límite. Por lo tanto debemos demostrar que $L = 0$. Como (a_n) es postiva, L es un número positivo o 0. Demostraremos que el caso $L > 0$ contradice la hipótesis del enunciado y por tanto el único caso posible es que $L = 0$.

Tenemos que $a_n \to L$, por lo tanto $a_{n+1} \to L$ y como $L > 0$ se tiene que

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \to \frac{L}{L} = 1$$

$$\boxed{\text{2 punto}}$$

Pero esto contadice la hipótesis que $r \neq 1$. Por lo tanto L no puede ser positivo, en consecuencia lo único posible es que $L = 0$ $\blacksquare$

$\boxed{\text{1 punto}}$

<u>Otra Solución:</u>

Como (a_n) es decreciente y positiva se tiene que $0 < a_{n+1} < a_n$ es decir:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$$

$\boxed{\text{2 puntos}}$

Por lo tanto $\lim \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = r \geq 1$, pero como $r \neq 1$ se tiene que $r > 1$, por lo tanto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{r} < 1$$

$\boxed{\text{1 punto}}$

Por criterio del cuociente, podemos concluir que la serie $\sum a_n$ converge

$\boxed{\text{1,5 puntos}}$

y por lo tanto

$$a_n \to 0 \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{1,5 punto}}$