Contro de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Octubre, 2009.

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

1. Si (a_n) es una sucesión de términos positivos, tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $0,1 \leq \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 0,2$. ¿Es cierto que la serie $\sum a_n$ converge?

   Solución:

   Como para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{5}$$

   Se tiene que

   $$a_{n+1} \leq \frac{1}{5} a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

   Por ejemplo, $a_2 \leq \frac{1}{5} a_1$. Más aún, para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

   $$a_{n+1} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n a_1,$$

   $$\boxed{\text{1 punto}}$$

   De hecho, supongamos que $a_{n+1} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n a_1$ y como

   $$a_{n+2} \leq \frac{1}{5} a_{n+1}$$

   Se tiene que

   $$a_{n+2} \leq \frac{1}{5} a_{n+1} \leq \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^n a_1 = \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} a_1$$

Como habíamos visto que $a_2 \leq \frac{1}{5}a_1$, hemos probado por inducción que

$$0 < a_{n+1} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n a_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\boxed{\text{3 puntos}}$$

Como la serie $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} a_1(0,2)^n$ converge, de hecho converge a $\frac{5a_1}{4}$, entonces por comparacin directa, la serie $\sum a_n$ converge.

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

2. Sea (a_n) una sucesión tal que $0 < a_n < 1$ par todo $n \in \mathbb{N}$ y además $\sum a_n$ diverge. Demuestra que la serie $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$, también diverge.

Solución:

Como la serie $\sum a_n$ diverge, entonces también diverge la serie $\sum \frac{a_n}{2}$.

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

Por otra parte, como $0 < a_n < 1$ se tiene que $0 < 1 < 1 + a_n < 2$, o equivalentemente $\frac{1}{1+a_n} > 2$ entonces

$$\frac{a_n}{1+a_n} > \frac{a_n}{2} > 0$$

$$\boxed{\text{4 puntos}}$$

Como la serie $\sum \frac{a_n}{2}$ diverge, por comparación directa, se tiene que la serie $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$, también diverge.

$$\boxed{\text{1 punto}}$$