Control de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Primavera, 2009.

Tiempo: 15 minutos.

Resuelva solo uno de los siguientes problemas.

1. Nota que la función real $f(x) = e^{x^2}$, satisface la ecuación

$$y' - xy = xe^{x^2}$$

Encuentra todas las soluciones de la ecuación anterior.

<u>Solución:</u>

Consideremos la ecuación homogénea

$$y' - xy = 0$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = x$$

$$\log(y(x)) = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y(x) = K\exp(\frac{x^2}{2})$$

$$\boxed{\text{5 puntos}}$$

Entonces todas la soluciones de $y' - xy = xe^{x^2}$ resultan de sumar a la solución particular $y(x) = e^{x^2}$ todas las soluciones del problema homogeneo. Es decir,

$$y(x) = K\exp(\frac{x^2}{2}) + e^{x^2}$$

$$\boxed{\text{1 punto}}$$

2. Si f es solución de
$$y' - y = 2,$$
entonces muestra que $e^x f(x)$ es solución de
$$y' - 2y = 2e^x.$$

<u>Solución:</u>

Como f es solución de $y' - y = 2$, quiere decir que
$$f'(x) = 2 + f(x)$$

$$\boxed{\text{2 puntos}}$$

Por lo tanto si $g(x) = e^x f(x)$, entonces

$$g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x f(x) + e^x (2 + f(x)) = 2e^x f(x) + 2e^x = 2g(x) + 2e^x$$

$$\boxed{\text{3 puntos}}$$

es decir
$$g'(x) - 2g(x) = 2e^x$$
es decir la función g es solución de $y' - 2y = 2e^x$.

$$\boxed{\text{1 punto}}$$