Control 1 de Matemáticas II

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Agosto, 2009.

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

Elije sólo un problema.

1. Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones acotadas. Demuestre que

$$m_{f+g} \geq m_f + m_g$$

donde $m_{f+g} = inf\{f(x)+g(x) : x \in [a, b]\}$, $m_f = inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ y $m_g = inf\{g(x) : x \in [a, b]\}$.

Solución:

Notar que como f y g son funciones acotadas entonces $f + g$ es una función acotada. En particular, $f + g$ es una función acotada inferiormente y por tanto m_{f+g} existe.

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Por definición sabemos que para todo $x \in [a, b]$ se tiene que $f(x) \geq m_f$ y $g(x) \geq m_g$ entonces

$$f(x) + g(x) \geq m_f + m_g$$

para todo $x \in [a, b]$.

$$\boxed{\text{2 puntos.}}$$

Luego $m_f + m_g$ es cota inferior de $\{f(x) + g(x) : x \in [a, b]\}$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Como el infimo de un conjunto es la mayor de las cotas inferiores se tiene que

$$m_{f+g} \geq m_f + m_g$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

2. Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. Encuentre $n \in \mathbb{N}$ tal que $S(f, P_n) - s(f, P_n) < 10^{-1}$, donde

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

<u>Solución:</u>

Primero notar que la función $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ con $x \in [0, 1]$ es equivalente a la función $g(x) = sen(x)$ con $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ entonces f es creciente en $[0, 1]$ puesto que g es creciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Luego si $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ es un intervalo i-ésimo arbitrario de la partición P_n con $1 \leq i \leq n$, se tiene que

$$m_i = inf\left\{f(x) : x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right\} = f\left(\frac{i-1}{n}\right)$$

$$M_i = sup\left\{f(x) : x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right\} = f\left(\frac{i}{n}\right)$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Por lo tanto

$$s(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$S(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Entonces

$$S(f,P_n)-s(f,P_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i-1}{n}\right)=\frac{1}{n}(f(1)-f(0))$$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Como $f(1)=1$ y $f(0)=0$ entonces $S(f,P_n)-s(f,P_n)=\frac{1}{n}$.
Se quiere encontar $n\in\mathbb{N}$ tal que $S(f,P_n)-s(f,P_n)<10^{-1}$ entonces $\frac{1}{n}<10^{-1}$, lo que equivale a decir que $10<n$.
Por ejemplo para $n=11$ se tiene lo pedido.

$\boxed{\text{1 punto.}}$