GUIA 5 ECUACIONES DIFERENCIALES –ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

Los ejercicios de esta guía son tomados del texto Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado. Se recomienda analizar con detalles otros problemas de este texto.

Resuelva la ecuación de onda para las siguientes condiciones iniciales y de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

1. $u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$

$$u(x, 0) = \tfrac{1}{4}x(L - x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

2. $u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x(L - x)$$

3. $u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$

$$u(x, 0) = f(x), f \text{ mostrada en la figura 11.10}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

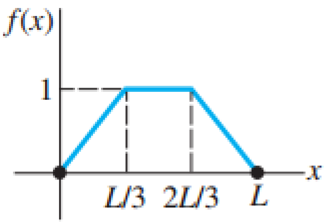

Figura 11.10 Desplazamiento para el problema 3

4. $u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0$

$$u(x, 0) = \tfrac{1}{6}\, x(\pi^2 - x^2), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

5. $u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \operatorname{sen} x$$

6. $u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$

$$u(x, 0) = 0.01 \operatorname{sen} 3\pi x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

7. $u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \dfrac{2hx}{L}, & 0 < x < L/2 \\[2ex] 2h\left(1 - \dfrac{x}{L}\right), & L/2 < x < L, \end{cases} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

8. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$

$$u(x, 0) = x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

Este problema podría describir el desplazamiento longitudinal $u(x, t)$ de una barra elástica vibratoria. Las condiciones de frontera en $x = 0$ y $x = L$ se llaman **condiciones de extremo libre**. Vea la figura 11.11.

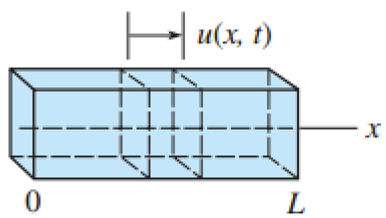

Figura 11.11 Barra elástica del problema 8

9. Una cuerda estirada está anclada en el eje x en $x = 0$ y $x = \pi$ en $t > 0$. Si las vibraciones transversales tienen lugar en un medio que ejerce una resistencia proporcional a la velocidad instantánea, entonces la ecuación de onda toma la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < \beta < 1, \quad t > 0.$$

Encuentre el desplazamiento $u(x, t)$ si la cuerda parte del reposo desde el desplazamiento inicial $f(x)$.