PAUTA Control 02 ECUACIONES DIFERENCIALES

NOMBRE____

Parte 1 (70%)

1. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Determine la Solución Homogénea (no hay que determinar las constantes) (36 pts.)

$$\frac{dx}{dt} + 10x - 6y = 0$$
$$\frac{dy}{dt} - 6x + 10y = 0$$

2. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Determine la Solución Homogénea y la Solución Particular(36 pts.)

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 29x - 21y = 5e^{-\frac{1}{5}t}$$
$$2\frac{d^2y}{dt^2} - 21x + 29y = 0$$

Condiciones Iniciales

$$x(0) = 6 \quad y(0) = 0$$
$$x'(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

3. Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales (36 pts.)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + b\frac{dp}{\partial t}$$

- Condiciones de contorno

$$\frac{\partial p}{\partial t}(0,t) \ = \ 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial t}(L,t) \ = \ 0$$

- Condiciones Iniciales

$$p(x,0) = \begin{cases} A & 0 \le x \le L/20 \\ 0 & L/20 < x \le L \end{cases} \qquad \frac{\partial p}{\partial t}(x,0) = 0$$

Parte 2 (30%)

Si en esta parte su computador no es eficiente puede programar usando una discretización no muy fina. Esta se puede revisar en un caso posterior con la discretización sugerida. Importando el algoritmo y la resolución matemática

4. Programación (24 pts.)

Graficar y animar el resultado de la solución para $p(x,t)$ de la pregunta 3 con un programa de Octave/MATLAB

$$A = 1 \qquad b = 0.5 \qquad c = 1 \qquad L = 1$$
$$0 \leq t \leq 2 \quad \Delta t = 0.01$$
$$0 \leq x \leq 1 \quad \Delta x = 0.01$$

5. Resolución y Programación (48 pts.)

Resolver teóricamente la ecuación de onda bidimensional. Graficar y animar el resultado de la solución para $p(x,y,t)$ de la ecuación de onda bidimensional con un programa de Octave/MATLAB

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + b\frac{dp}{\partial t}$$

- Condiciones de contorno

$$\frac{\partial p}{\partial x}(0,t) = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial x}(L_x,t) = 0$$
$$\frac{\partial p}{\partial y}(0,t) = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial y}(L_y,t) = 0$$

- Condiciones Iniciales

$$p(x,0) = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x,0) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 24L_x/50 & 0 \leq y < 11L_y/50 \\ A & 24L_x/50 \leq x \leq 25L_x/50 & 11L_y/50 \leq y \leq 12L_y/50 \\ 0 & 25L_x/50 < x \leq L_x & 12L_y/50 < y \leq L_y \end{cases}$$

$$A = 100 \qquad b = 0.5 \qquad c = 1 \qquad L_x = 2 \qquad L_y = 1$$

$$0 \leq t \leq 3 \quad \Delta t = 0.01$$
$$0 \leq x \leq 2 \quad \Delta x = 0.01$$
$$0 \leq y \leq 1 \quad \Delta y = 0.01$$

PAUTA 02 ECUACIONES DIFERENCIALES

1. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Determine la Solución Homogénea (no hay que determinar las constantes) (36 pts.)

$$\frac{dx}{dt} + 10x - 6y = 0$$
$$\frac{dy}{dt} - 6x + 10y = 0$$

La primera ecuación

$$\frac{dx}{dt} + 10x - 6y = 0$$

$$y = \frac{1}{6}\left(\frac{dx}{dt} + 10x\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{6}\left(\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt}\right)$$

Reemplazamos en la segunda

$$\frac{dy}{dt} - 6x + 10y = 0$$

$$\frac{1}{6}\left(\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt}\right) - 6x + \frac{10}{6}\left(\frac{dx}{dt} + 10x\right) = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 20\frac{dx}{dt} + 64x = 0$$

Polinomio característico

$$s^2 + 20s + 64 = 0$$

Raíces

$$s_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{(20)^2 - 4 \times 1 \times 64}}{2}$$

$$s_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{144}}{2}$$

$$s_{1,2} = \frac{-20 \pm 12}{2}$$

$$s_1 = -4$$

$$s_2 = -16$$

La función $x(t)$ es

$$x(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-16t}$$

Su derivada es

$$\frac{dx}{dt}(t) = -4C_1 e^{-4t} - 16C_2 e^{-16t}$$

Determinamos la función $y(t)$

$$y(t) = \frac{1}{6}\left(\frac{dx}{dt} + 10x\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{6}(-4C_1 e^{-4t} - 16C_2 e^{-16t} + 10C_1 e^{-4t} + 10C_2 e^{-16t})$$

$$y(t) = \frac{1}{6}(6C_1 e^{-4t} - 6C_2 e^{-16t})$$

$$y(t) = C_1 e^{-4t} - C_2 e^{-16t}$$

Finalmente resumimos los resultados

$$x(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-16t}$$

$$y(t) = C_1 e^{-4t} - C_2 e^{-16t}$$

2. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Determine la Solución Homogénea y la Solución Particular(36 pts.)

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 29x - 21y = 5e^{-\frac{1}{5}t}$$
$$2\frac{d^2y}{dt^2} - 21x + 29y = 0$$

Condiciones Iniciales

$$x(0) = 6 \quad y(0) = 0$$
$$x'(0) = 0 \quad y'(0) = 0$$

Ecuación Homogénea

$$2\frac{d^2x_c}{dt^2} + 29x_c - 21y_c = 0$$
$$2\frac{d^2y_c}{dt^2} - 21x_c + 29y_c = 0$$

Primera ecuación

$$y_c = \frac{1}{21}\left(2\frac{d^2x_c}{dt^2} + 29x_c\right)$$

Segunda derivada

$$\frac{d^2y_c}{dt^2} = \frac{1}{21}\left(2\frac{d^4x_c}{dt^4} + 29\frac{d^2x_c}{dt^2}\right)$$

Reemplazamos en la segunda ecuación

$$2\frac{1}{21}\left(2\frac{d^4x_c}{dt^4} + 29\frac{d^2x_c}{dt^2}\right) - 21x_c + 29\frac{1}{21}\left(2\frac{d^2x_c}{dt^2} + 29x_c\right) = 0$$

$$2\left(2\frac{d^4x_c}{dt^4} + 29\frac{d^2x_c}{dt^2}\right) - 441x_c + 29\left(2\frac{d^2x_c}{dt^2} + 29x_c\right) = 0$$

$$4\frac{d^4x_c}{dt^4} + 58\frac{d^2x_c}{dt^2} - 441x_c + 58\frac{d^2x_c}{dt^2} + 841x_c = 0$$

$$4\frac{d^4x_c}{dt^4} + 116\frac{d^2x_c}{dt^2} + 400x_c = 0$$

Polinomio característico

$$4s^4 + 116s^2 + 400 = 0$$

Haciendo $s^2 = v$

$$4v^2 + 116v + 400 = 0$$

$$v_{1,2} = \frac{-116 \pm \sqrt{(116)^2 - 4 \times 4 \times 400}}{2 \times 4}$$

$$v_1 = -4 \qquad v_2 = -25$$

$$s_{1,2} = \pm j2 \qquad s_{3,4} = \pm j5$$

$$x_c(t) = C_1 cos(2t) + C_2 sin(2t) + C_3 cos(5t) + C_4 sin(5t)$$

$$\frac{dx_c}{dt}(t) = -2C_1 sin(2t) + 2C_2 cos(2t) - 5C_3 sin(5t) + 5C_4 cos(5t)$$

$$\frac{d^2x_c}{dt^2}(t) = -4C_1 cos(2t) - 4C_2 sin(2t) - 25C_3 cos(5t) - 25C_4 sin(5t)$$

Usamos la ecuación

$$y_c(t) = \frac{1}{21}\left(2\frac{d^2x_c}{dt^2} + 29x_c\right)$$

Reemplazamos

$$y_c(t) = \frac{1}{21}\left(2\frac{d^2x_c}{dt^2} + 29x_c\right)$$

$$y_c(t) = \frac{1}{21}\Big[2\big(-4C_1 cos(2t) - 4C_2 sin(2t) - 25C_3 cos(5t) - 25C_4 sin(5t)\big) + 29\big(C_1 cos(2t) + C_2 sin(2t) + C_3 cos(5t) + C_4 sin(5t)\big)\Big]$$

$$y_c(t) = \frac{1}{21}\Big[\big(-8C_1 cos(2t) - 8C_2 sin(2t) - 50C_3 cos(5t) - 50C_4 sin(5t)\big) + \big(29C_1 cos(2t) + 29C_2 sin(2t) + 29C_3 cos(5t) + 29C_4 sin(5t)\big)\Big]$$

$$y_c(t) = \frac{1}{21}\left(21C_1cos(2t) + 21C_2sin(2t) - 21C_3cos(5t) - 21C_4sin(5t)\right)$$

$$y_c(t) = C_1cos(2t) + C_2sin(2t) - C_3cos(5t) - C_4sin(5t)$$

Resumimos la solución complementaria es

$$x_c(t) = C_1cos(2t) + C_2sin(2t) + C_3cos(5t) + C_4sin(5t)$$

$$y_c(t) = C_1cos(2t) + C_2sin(2t) - C_3cos(5t) - C_4sin(5t)$$

Solución particular

$$2\frac{d^2x_p}{dt^2} + 29x_p - 21y_p = 5e^{-\frac{1}{5}t}$$
$$2\frac{d^2y_p}{dt^2} - 21x_p + 29y_p = 0$$

Replanteemos la ecuación como

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{y}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 29 & -21 \\ -21 & 29 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5e^{-\frac{1}{5}t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Siendo la solución propuesta

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ae^{-\frac{1}{5}t} \\ Be^{-\frac{1}{5}t} \end{bmatrix}$$

Determinamos la segunda derivada

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{y}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{25}Ae^{-\frac{1}{5}t} \\ \frac{1}{25}Be^{-\frac{1}{5}t} \end{bmatrix}$$

Reemplazamos en

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{y}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 29 & -21 \\ -21 & 29 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Ae^{-\frac{1}{5}t} \\ Be^{-\frac{1}{5}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5e^{-\frac{1}{5}t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{25} A e^{-\frac{1}{5}t} \\ \frac{1}{25} B e^{-\frac{1}{5}t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 29 & -21 \\ -21 & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A e^{-\frac{1}{5}t} \\ B e^{-\frac{1}{5}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5e^{-\frac{1}{5}t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{2}{25} A e^{-\frac{1}{5}t} + \frac{29}{25} A e^{-\frac{1}{5}t} - \frac{21}{25} B e^{-\frac{1}{5}t} &= 5e^{-\frac{1}{5}t} \\ \frac{2}{25} B e^{-\frac{1}{5}t} - \frac{21}{25} A e^{-\frac{1}{5}t} + \frac{29}{25} B e^{-\frac{1}{5}t} &= 0 \end{aligned}$$

Al simplificar por $1/25$Nuestro sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} 2A + 29A - 21B &= 125 \\ 2B - 21A + 29B &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 31A - 21B &= 125 \\ 31B - 21A &= 0 \end{aligned}$$

Entonces

$$A = \frac{775}{104} \qquad A = \frac{525}{104}$$

Finalmente, la solución particular

$$x_p(t) = \frac{775}{104} e^{-\frac{1}{5}t} \qquad y_p(t) = \frac{525}{104} e^{-\frac{1}{5}t}$$

Entonces la solución del sistema de ecuaciones es

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = C_1 cos(2t) + C_2 sin(2t) + C_3 cos(5t) + C_4 sin(5t) + \frac{775}{104} e^{-\frac{1}{5}t}$$

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = C_1 cos(2t) + C_2 sin(2t) - C_3 cos(5t) - C_4 sin(5t) + \frac{525}{104} e^{-\frac{1}{5}t}$$

Determinaremos la primera derivada

$$\dot{x}(t) = -2C_1 sin(2t) + 2C_2 cos(2t) - 5C_3 sin(5t) + 5C_4 cos(5t) - \frac{155}{104} e^{-\frac{1}{5}t}$$

$$\dot{y}(t) = -2C_1 sin(2t) + 2C_2 cos(2t) + 5C_3 sin(5t) - 5C_4 cos(5t) - \frac{105}{104} e^{-\frac{1}{5}t}$$

Usamos las condiciones iniciales

$$x(0) = C_1 cos(2 \times 0) + C_2 sin(2 \times 0) + C_3 cos(5 \times 0) + C_4 sin(5 \times 0) + \frac{775}{104} e^{-\frac{1}{5} \times 0} = 6$$

$$y(0) = C_1 cos(2 \times 0) + C_2 sin(2 \times 0) - C_3 cos(5 \times 0) - C_4 sin(5 \times 0) + \frac{525}{104} e^{-\frac{1}{5} \times 0} = 0$$

$$x'(0) = -2C_1 sin(2 \times 0) + 2C_2 cos(2 \times 0) - 5C_3 sin(5 \times 0) + 5C_4 cos(5 \times 0) - \frac{155}{104} e^{-\frac{1}{5} \times 0} = 0$$

$$y'(0) = -2C_1 sin(2 \times 0) + 2C_2 cos(2 \times 0) + 5C_3 sin(5 \times 0) - 5C_4 cos(5 \times 0) - \frac{105}{104} e^{-\frac{1}{5} t} = 0$$

Obtenemos el primer sistema de ecuaciones

$$C_1 + C_3 = 6 - \frac{775}{104}$$
$$C_1 - C_3 = -\frac{525}{104}$$

$$C_1 = -\frac{13}{4} \qquad C_3 = \frac{187}{104}$$

Para el segundo par de condiciones de contorno

$$2C_2 + 5C_4 = \frac{155}{104}$$
$$2C_2 - 5C_4 = \frac{105}{104}$$

$$C_2 = \frac{25}{208} \qquad C_4 = \frac{1}{4}$$

Entonces la solución completa es

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = -\frac{13}{4} cos(2t) + \frac{25}{208} sin(2t) + \frac{187}{104} cos(5t) + \frac{1}{4} sin(5t) + \frac{775}{104} e^{-\frac{1}{5} t}$$

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = -\frac{13}{4} cos(2t) + \frac{25}{208} sin(2t) - \frac{187}{104} cos(5t) - \frac{1}{4} sin(5t) + \frac{525}{104} e^{-\frac{1}{5} t}$$

3. Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales (36 pts.)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + b\frac{dp}{\partial t}$$

- Condiciones de contorno

$$\frac{\partial p}{\partial t}(0,t) \ = \ 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial t}(L,t) \ = \ 0$$

- Condiciones Iniciales

$$p(x,0) = \begin{cases} A & 0 \leq x \leq L/20 \\ 0 & L/20 < x \leq L \end{cases} \qquad \frac{\partial p}{\partial t}(x,0) = 0$$

Usaremos el método de separación de variables, el cual asume que la solución es de la forma

$$p(x,t) = X(x)T(t)$$

Lo integrar a la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2[X(x)T(t)]}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2[X(x)T(t)]}{\partial t^2}$$

$$T(t)\frac{d^2X(x)}{dx^2} = X(x)\frac{1}{c^2}\frac{d^2T(t)}{dt^2}$$

Se multiplica a ambos lados por el inverso de $X(x)T(t)$

$$T(t)\frac{d^2X(x)}{dx^2} = X(x)\frac{1}{c^2}\frac{d^2T(t)}{dt^2} \rightarrow \frac{1}{X(x)T(t)}$$

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \frac{1}{c^2}\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2}$$

La primera parte solamente depende de x y la segunda de t

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -k^2$$

$$-k^2 = \frac{1}{c^2}\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2}$$

Entonces

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2X(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{T(t)}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2T(t)}{\partial t^2} = -k^2$$

Primera Ecuación

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -k^2$$

$$\frac{dX}{dx}(0) = 0 \qquad \frac{dX}{dx}(L) = 0$$

Necesitamos arreglar la ecuación de forma más conveniente

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -k^2X(x)$$

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + k^2X(x) = 0$$

La solución corresponde a un oscilador armónico

$$X(x) = C_1cos(kx) + C_2sin(kx)$$

$$\frac{dX}{dx} = -C_1sin(kx) + C_2cos(kx)$$

Evaluamos en la primera condición de contorno

$$\frac{dX}{dx}(0) = C_{1x}ksin(k \times 0) + C_{2x}kcos(k \times 0) = 0$$

$$X(0) = C_{2x} = 0$$

Y reformulamos la solución de la forma

$$X(x) = C_{1x}cos(kx)$$

Evaluamos en la segunda condición de contorno

$$\frac{dX}{dx}(L) = C_{1x}ksin(kL) = 0$$

La única forma en que esta condición se cumpla es para un conjunto discreto e infinito de valores de k_n dados por

$$X(L) = C_{1x}ksin(k_nL) = 0$$

$$k_n L = n\pi \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

Esto implica que obtenemos un conjunto infinito de soluciones $X_n(x)$. Además, podemos hacer $C = 1$ sin perder generalidad en los resultados

$$X_n(x) = cos(k_n x) \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

Donde los k_n están asociados a los números de onda. Reiteramos los resultados

$$X_n(x) = cos(k_n x) = cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

Segunda Ecuación

$$\frac{1}{T(t)}\frac{1}{c^2}\frac{d^2T(t)}{dt^2} + b\frac{dT(t)}{dt} = -k^2$$

Se convierte en un conjunto infinito de ecuaciones

$$\frac{1}{T(t)}\frac{1}{c^2}\frac{d^2T_n(t)}{dt^2} + b\frac{dT_n(t)}{dt} = -k_n^2 \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

$$\frac{d^2T_n(t)}{dt^2} + c^2 b\frac{dT_n(t)}{dt} = -c^2 k_n^2 T_n(t) \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} + c^2 b\frac{dT_n(t)}{dt} + \omega_n^2 T(t) = 0 \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

Llamando

$$\omega_n = ck_n = \frac{n\pi c}{L}$$

Donde ω_n corresponde a las frecuencias naturales angulares, mientras que las frecuencias naturales o de resonancia son

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{nc}{2L}$$

La solución a la ecuación

$$\frac{d^2T_n(t)}{dt^2} + c^2 b \frac{dT_n(t)}{dt} + \omega_n^2 T(t) = 0 \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

Es

$$T_n(t) = e^{-\delta t}[A_n cos(\omega_{dn} t) + B_n sin(\omega_{dn} t)] \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

Donde

$$\omega_{dn} = \sqrt{\omega_n^2 - \delta^2} = \sqrt{\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 - \left(\frac{bc^2}{2}\right)^2} \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

$$\delta = \frac{bc^2}{2}$$

Entonces la presión sonora posee un conjunto de soluciones

$$p_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

$$p_n(x,t) = e^{-\delta t}[A_n cos(\omega_{dn} t) + B_n sin(\omega_{dn} t)] cos(k_n x) \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

$$p_n(x,t) = e^{-\delta t}\left\{A_n cos\left[\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 - \left(\frac{bc^2}{2}\right)^2}\right)t\right] + B_n sin\left[\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 - \left(\frac{bc^2}{2}\right)^2}\right)t\right]\right\} cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

La solución completa es la combinación lineal de las soluciones

$$p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x,t)$$

$$p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta t}[A_n cos(\omega_{dn} t) + B_n sin(\omega_{dn} t)] cos(k_n x)$$

La primera derivada parcial con respecto al tiempo

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\{-\delta e^{-\delta t}[A_n cos(\omega_{dn}t)+B_n sin(\omega_{dn}t)]+\omega_{dn}e^{-\delta t}[-A_n sin(\omega_{dn}t)+B_n cos(\omega_{dn}t)]\}cos(k_n x)$$

La primera condición inicial indica

$$p(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\delta\times 0}[A_n cos(\omega_{dn}\times 0)+B_n sin(\omega_{dn}\times 0)]cos(k_n x)=f(x)=\begin{cases}A & 0\leq x\leq L/20\\ 0 & L/20<x\leq L\end{cases}$$

Por lo tanto

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)cos(k_n x)\,dx$$

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^{L/20} Acos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx$$

$$A_n=\frac{2}{L}\frac{L}{n\pi}Asin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\Big|_0^{L/20}$$

$$A_n=\frac{2A}{n\pi}\left[sin\left(\frac{n\pi}{L}\times\frac{L}{20}\right)sin\left(\frac{n\pi}{L}\times 0\right)\right]$$

$$A_n=\frac{2A}{n\pi}sin\left(\frac{n\pi}{20}\right)$$

La segunda condición inicial indica

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\{-\delta e^{-\delta\times 0}[A_n cos(\omega_{dn}\times 0)+B_n sin(\omega_{dn}\times 0)]$$
$$+\omega_{dn}e^{-\delta\times 0}[-A_n sin(\omega_{dn}\times 0)+B_n cos(\omega_{dn}\times 0)]\}cos(k_n x)=g(x)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}[\omega_{dn}B_n-\delta A_n]cos(k_n x)=g(x)=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n cos(k_n x)=g(x)$$

$$C_n = [\omega_{dn} B_n - \delta A_n]$$

Como $g(x) = 0$ entonces $C_n = 0$

$$\omega_{dn} B_n - \delta A_n = 0$$

$$B_n = \frac{\delta A_n}{\omega_{dn}}$$

$$B_n = \frac{\frac{Abc^2}{n\pi} sin\left(\frac{n\pi}{20}\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 - \left(\frac{bc^2}{2}\right)^2}\right)}$$

La solución es

$$p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta t}[A_n cos(\omega_{dn} t) + B_n cos(\omega_{dn} t)] cos(k_n x)$$

4. Programación (24 pts.)

Graficar y animar el resultado de la solución para $p(x,t)$ de la pregunta 3 con un programa de Octave/MATLAB

$$A = 1 \qquad b = 0.5 \qquad c = 1 \qquad L = 1$$

$$0 \le t \le 2 \quad \Delta t = 0.01$$

$$0 \le x \le 1 \quad \Delta x = 0.01$$

$$p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} sin\left(\frac{n\pi}{20}\right) e^{-0.25t} cos\left[\left(\sqrt{(n\pi c)^2 - (0.25)^2}\right) t\right] cos(n\pi x)$$

5. Resolución y Programación (48 pts.)

Resolver teóricamente la ecuación de onda bidimensional. Graficar y animar el resultado de la solución para $p(x, y, t)$ de la ecuación de onda bidimensional con un programa de Octave/MATLAB

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + b\frac{dp}{\partial t}$$

- Condiciones de contorno

$$\frac{\partial p}{\partial x}(0,t) = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial x}(L_x,t) = 0$$
$$\frac{\partial p}{\partial y}(0,t) = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial y}(L_y,t) = 0$$

- Condiciones Iniciales

$$p(x,0) = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x,0) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 24L_x/50 & 0 \le y < 11L_y/50 \\ A & 24L_x/50 \le x \le 25L_x/50 & 11L_y/50 \le y \le 12L_y/50 \\ 0 & 25L_x/50 < x \le L_x & 12L_y/50 < y \le L_y \end{cases}$$

$$A = 100 \qquad b = 0.5 \qquad c = 1 \qquad L_x = 2 \qquad L_y = 1$$

$$0 \le t \le 3 \quad \Delta t = 0.01$$
$$0 \le x \le 2 \quad \Delta x = 0.01$$
$$0 \le y \le 1 \quad \Delta y = 0.01$$

Usaremos el método de separación de variables, el cual asume que la solución es de la forma

$$p(x,t) = X(x)Y(y)T(t)$$

Reemplazamos en la ecuación de onda

$$Y(y)T(t)\frac{d^2X(x)}{dx^2} + X(x)T(t)\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = \frac{1}{c^2}X(x)Y(y)\frac{d^2T(t)}{dt^2} + bX(x)Y(y)\frac{dT(t)}{dt}$$

Dividiendo por $X(x)Y(y)T(t)$

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = \frac{1}{T(t)}\left(\frac{1}{c^2}\frac{d^2T(t)}{dt^2} + b\frac{dT(t)}{dt}\right)$$

Separamos en tres ecuaciones

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\left[\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = \frac{1}{T(t)}\left(\frac{1}{c^2}\frac{d^2T(t)}{dt^2} + b\frac{dT(t)}{dt}\right)\right] = -k_{n_x}^2$$

$$\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = -\left[\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{1}{T(t)}\left(\frac{1}{c^2}\frac{d^2T(t)}{dt^2} + b\frac{dT(t)}{dt}\right)\right] = -k_{n_y}^2$$

$$\frac{1}{T(t)}\left(\frac{1}{c^2}\frac{d^2T(t)}{dt^2} + b\frac{dT(t)}{dt}\right) = -\left[\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}\right] = -k^2$$

Lo cual es válido si se cumple

$$k^2 = k_{n_x}^2 + k_{n_y}^2$$

Primera Ecuación

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -k_{n_x}^2$$

$$\frac{dX}{dx}(0) \;=\; 0 \qquad\qquad \frac{dX}{dx}(L) \;=\; 0$$

Necesitamos arreglar la ecuación de forma más conveniente

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -k_{n_x}^2X(x)$$

$$\frac{dX(x)}{dx^2} + k_{n_x}^2X(x) = 0$$

La solución corresponde a un oscilador armónico

$$X(x) = C_{1x}cos\left(k_{n_x}x\right) + C_{2x}sin\left(k_{n_x}x\right)$$

$$\frac{dX}{dx} = -C_{1x}k_{n_x}sin\left(k_{n_x}x\right) + C_{2x}k_{n_x}cos\left(k_{n_x}x\right)$$

Evaluamos en la primera condición de contorno

$$\frac{dX}{dx}(0) = C_{1x}k_{n_x}sin(k \times 0) + C_{2x}k_{n_x}cos(k \times 0) = 0$$

$$X(0) = C_{2x} = 0$$

Y reformulamos la solución de la forma

$$X(x) = C_{1x}cos(k_{n_x}x)$$

Evaluamos en la segunda condición de contorno

$$\frac{dX}{dx}(L_x) = C_{1x}k_{n_x}sin\left(k_{n_x}x\right) = 0$$

La única forma en que esta condición se cumpla es para un conjunto discreto e infinito de valores de k_{n_x} dados por

$$X(L_x) = C_{1x}cos\left(k_{n_x}L_x\right) = 0$$

$$k_{n_x}L_x = n_x\pi \qquad n_x = 1,2,3,\cdots$$

$$k_{n_x} = \frac{n_x\pi}{L_x} \qquad n_x = 1,2,3,\cdots$$

Esto implica que obtenemos un conjunto infinito de soluciones $X_{n_x}(x)$. Además, podemos hacer $C_{1x} = 1$ sin perder generalidad en los resultados

$$X_{n_x}(x) = cos\left(k_{n_x}x\right) \qquad n_x = 1,2,3,\cdots$$

$$X_{n_x}(x) = cos\left(\frac{n_x\pi}{L_x}x\right) \qquad n_x = 1,2,3,\cdots$$

$$k_{n_x} = \frac{n\pi}{L_x} \qquad n_x = 1,2,3,\cdots$$

Segunda Ecuación

$$\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = -k_{n_y}^2$$

$$\frac{dY}{dy}(0) = 0 \qquad \frac{dY}{dy}(L_y) = 0$$

Necesitamos arreglar la ecuación de forma más conveniente

$$\frac{dY(y)}{dy^2} = -k_{n_y}^2 Y(y)$$

$$\frac{dY(x)}{dy^2} + k_{n_y}^2 Y(y) = 0$$

La solución corresponde a un oscilador armónico

$$Y(y) = C_{1y} cos\left(k_{n_y} y\right) + C_{2y} sin\left(k_{n_y} y\right)$$

$$\frac{dY}{dy}(y) = -C_{1x} k_{n_x} sin\left(k_{n_y} y\right) + C_{2x} k_{n_x} cos\left(k_{n_y} y\right)$$

Evaluamos en la primera condición de contorno

$$\frac{dY}{dy}(0) = C_{1y} k_{n_y} sin(k \times 0) + C_{2y} k_{n_y} cos(k \times 0) = 0$$

$$X(0) = C_{2y} = 0$$

Y reformulamos la solución de la forma

$$Y(y) = C_{1y} cos\left(k_{n_y} y\right)$$

Evaluamos en la segunda condición de contorno

$$\frac{dY}{dy}\left(L_y\right) = C_{1y} k_{n_y} sin\left(k_{n_x} L_y\right) = 0$$

La única forma en que esta condición se cumpla es para un conjunto discreto e infinito de valores de k_n dados por

$$X\left(L_y\right) = C_{1y} k_{n_y} sin\left(k_{n_y} L_y\right) = 0$$

$$k_{n_y} L_y = n_y \pi \qquad n_y = 1,2,3, \cdots$$

$$k_{n_y} = \frac{n_y \pi}{L_y} \qquad n_y = 1,2,3, \cdots$$

Esto implica que obtenemos un conjunto infinito de soluciones $Y_{n_y}(y)$. Además, podemos hacer $C_{1y} \; = \; 1$ sin perder generalidad en los resultados

$$Y_{n_y}(x) = coscos\left(k_{n_y}y\right) \qquad n_y = 1,2,3,\cdots$$

$$Y_{n_y}(x) = cos\left(\frac{n_y\pi}{L_y}x\right) \qquad n_y = 1,2,3,\cdots$$

$$k_{n_y} = \frac{n_y\pi}{L_y} \qquad n_y = 1,2,3,\cdots$$

Tercera Ecuación

$$\frac{1}{T(t)}\left(\frac{1}{c^2}\frac{d^2T(t)}{dt^2} + b\frac{dT(t)}{dt}\right) = -k^2$$

Se vuelve un conjunto infinito de ecuaciones

$$\frac{1}{T_{n_xn_y}(t)}\left(\frac{1}{c^2}\frac{d^2T_{n_xn_y}(t)}{dt^2} + b\frac{dT_{n_xn_y}(t)}{dt}\right) = -k_{n_xn_y}^2 \qquad \begin{matrix} n_x = 1,2,3,\cdots \\ n_y = 1,2,3,\cdots \end{matrix}$$

Donde

$$k_{n_xn_y}^2 = k_{n_x}^2 + k_{n_y}^2 \qquad \begin{matrix} n_x = 1,2,3,\cdots \\ n_y = 1,2,3,\cdots \end{matrix}$$

$$k_{n_xn_y}^2 = \left(\frac{n_x\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y\pi}{L_y}\right)^2 \qquad \begin{matrix} n_x = 1,2,3,\cdots \\ n_y = 1,2,3,\cdots \end{matrix}$$

Ordenamos

$$\frac{d^2T_{n_xn_y}(t)}{dt^2} + c^2b\frac{dT_{n_xn_y}(t)}{dt} = -c^2k_{n_xn_y}^2T_{n_xn_y}(t) \qquad \begin{matrix} n_x = 1,2,3,\cdots \\ n_y = 1,2,3,\cdots \end{matrix}$$

$$\frac{d^2T_{n_xn_y}(t)}{dt^2} + c^2b\frac{dT_{n_xn_y}(t)}{dt} + c^2k_{n_xn_y}^2T_{n_xn_y}(t) = 0 \qquad \begin{matrix} n_x = 1,2,3,\cdots \\ n_y = 1,2,3,\cdots \end{matrix}$$

$$\frac{d^2T_{n_xn_y}(t)}{dt^2} + c^2b\frac{dT_{n_xn_y}(t)}{dt} + \omega_{n_xn_y}^2T_{n_xn_y}(t) = 0 \qquad \begin{matrix} n_x = 1,2,3,\cdots \\ n_y = 1,2,3,\cdots \end{matrix}$$

Donde la frecuencia natural o de resonancia angular

$$\omega_{n_x n_y} = c k_{n_x n_y}$$

$$\omega_{n_x n_y} = c\sqrt{\left(\frac{n_x \pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{L_y}\right)^2} \qquad \begin{matrix} n_x = 1,2,3,\cdots \\ n_y = 1,2,3,\cdots \end{matrix}$$

Las frecuencias naturales o de resonancia son

$$f_{n_x n_y} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2} \qquad \begin{matrix} n_x = 1,2,3,\cdots \\ n_y = 1,2,3,\cdots \end{matrix}$$

La solución de la ecuación en cuestión es

$$T_{n_x n_y}(t) = e^{-\delta t}\left[A_n cos\left(\omega_{d n_x n_y} t\right) + B_n sin\left(\omega_{d n_x n_y} t\right)\right] \qquad \begin{matrix} n_x = 1,2,3,\cdots \\ n_y = 1,2,3,\cdots \end{matrix}$$

Donde

$$\omega_{d n_x n_y} = \sqrt{\omega_{n_x n_y}^2 - \delta^2} = \sqrt{\left(\frac{n_x \pi c}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y \pi c}{L_y}\right)^2 - \left(\frac{bc^2}{2}\right)^2} \qquad \begin{matrix} n_x = 1,2,3,\cdots \\ n_y = 1,2,3,\cdots \end{matrix}$$

$$\delta = \frac{bc^2}{2}$$

Entonces la presión sonora posee un conjunto de soluciones

$$p_{n_x n_y}(x,y,t) = X_{n_x}(x) Y_{n_y}(y) T_{n_x n_y}(t) \qquad \begin{matrix} n_x = 1,2,3,\cdots \\ n_y = 1,2,3,\cdots \end{matrix}$$

$$p_{n_x n_y}(x,y,t) = e^{-\delta t}\left[A_{n_x n_y} cos\left(\omega_{d n_x n_y} t\right) + B_{n_x n_y} sin\left(\omega_{d n_x n_y} t\right)\right] cos\left(k_{n_x} x\right) cos\left(k_{n_y} y\right) \qquad \begin{matrix} n_x = 1,2,3,\cdots \\ n_y = 1,2,3,\cdots \end{matrix}$$

La solución completa es la combinación lineal de las soluciones

$$p(x,y,t) = \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} p_{n_x n_y}(x,y,t)$$

$$p(x,y,t)=\sum_{n_x=1}^{\infty}\sum_{n_y=1}^{\infty}e^{-\delta t}\left[A_{n_xn_y}cos\left(\omega_{dn_xn_y}t\right)+B_{n_xn_y}sin\left(\omega_{dn_xn_y}t\right)\right]cos(k_{n_x}x)cos\left(k_{n_y}x\right)$$

La primera derivada parcial con respecto al tiempo

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x,t)=\sum_{n_x=1}^{\infty}\sum_{n_y=1}^{\infty}\left\{-\delta e^{-\delta t}\left[A_{n_xn_y}cos\left(\omega_{dn_xn_y}t\right)+B_{n_xn_y}sin\left(\omega_{dn_xn_y}t\right)\right]cos(k_{n_x}x)cos\left(k_{n_y}x\right)\right.$$
$$\left.+\omega_{dn_xn_y}e^{-\delta t}\left[-A_{n_xn_y}sin\left(\omega_{dn_xn_y}t\right)+B_{n_xn_y}cos\left(\omega_{dn_xn_y}t\right)\right]\right\}cos(k_{n_x}x)cos\left(k_{n_y}x\right)$$

Al aplicar condiciones iniciales

$$p(x,0)=f(x,y)=0$$

$$p(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\delta\times 0}\left[A_{n_xn_y}cos\left(\omega_{dn_xn_y}\times 0\right)+B_{n_xn_y}sin\left(\omega_{dn_xn_y}\times 0\right)\right]cos(k_{n_x}x)cos\left(k_{n_y}x\right)=0$$

$$p(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_{n_xn_y}cos(k_{n_x}x)cos\left(k_{n_y}x\right)=0$$

Lo que implica que

$$A_{n_xn_y}=0$$

La segunda condición inicial nos lleva a

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x,0)=g(x,y)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\delta e^{-\delta\times 0}\left[A_{n_xn_y}cos\left(\omega_{dn_xn_y}\times 0\right)+B_{n_xn_y}sin\left(\omega_{dn_xn_y}\times 0\right)\right]cos(k_{n_x}x)cos\left(k_{n_y}x\right)\right.$$
$$\left.+\omega_{dn_xn_y}e^{-\delta\times 0}\left[-A_{n_xn_y}sin\left(\omega_{dn_xn_y}\times 0\right)+B_{n_xn_y}cos\left(\omega_{dn_xn_y}\times 0\right)\right]\right\}cos(k_{n_x}x)cos\left(k_{n_y}x\right)$$
$$=g(x,y)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\delta A_{n_xn_y}+\omega_{dn_xn_y}B_{n_xn_y}\right]cos(k_{n_x}x)cos\left(k_{n_y}x\right)=g(x,y)$$

Como $A_{n_x n_y} = 0$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{dn_x n_y} B_{n_x n_y} cos(k_{n_x} x) cos\left(k_{n_y} x\right) = g(x,y)$$

Llamamos

$$C_{n_x n_y} = \omega_{dn_x n_y} B_{n_x n_y}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n_x n_y} cos(k_{n_x} x) cos\left(k_{n_y} x\right) = g(x,y)$$

Entonces

$$C_{n_x n_y} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} g(x,y) cos(k_{n_x} x) cos\left(k_{n_y} x\right)\, dxdy$$

$$C_{n_x n_y} = \frac{4}{L_x L_y} \int_{24L_x/50}^{25L_x/50} \int_{24L_y/50}^{25L_y/50} A cos(k_{n_x} x) cos\left(k_{n_y} x\right) dxdy$$

$$C_{n_x n_y} = \frac{4A}{L_x L_y} \int_{24L_x/50}^{25L_x/50} cos(k_{n_x} x)\, dx \int_{24L_y/50}^{25L_y/50} cos\left(k_{n_y} x\right) dy$$

$$C_{n_x n_y} = \frac{4A}{L_x L_y} \int_{24L_x/50}^{25L_x/50} cos\left(\frac{n_x \pi}{L_x} x\right)\, dx \int_{24L_y/50}^{25L_y/50} cos\left(\frac{n_y \pi}{L_y} x\right) dy$$

$$C_{n_x n_y} = \frac{4A}{L_x L_y} \frac{L_x}{n_x \pi} \frac{L_y}{n_y \pi} \left[sin\left(\frac{25 n_x \pi}{50} x\right) - sin\left(\frac{24 n_x \pi}{50}\right)\right] \left[sin\left(\frac{25 n_y \pi}{50}\right) - sin\left(\frac{24 n_y \pi}{50}\right)\right]$$

$$C_{n_x n_y} = \frac{4A}{n_x n_y \pi^2} \left[sin\left(\frac{25 n_x \pi}{50} x\right) - sin\left(\frac{24 n_x \pi}{50}\right)\right] \left[sin\left(\frac{25 n_y \pi}{50}\right) - sin\left(\frac{24 n_y \pi}{50}\right)\right]$$

$$B_{n_x n_y} = \frac{C_{n_x n_y}}{\omega_{dn_x n_y}}$$

$$B_{n_x n_y} = \frac{4A}{\omega_{d n_x n_y} n_x n_y \pi^2} \left[sin\left(\frac{25 n_x \pi}{50} x\right) - sin\left(\frac{24 n_x \pi}{50}\right) \right] \left[sin\left(\frac{25 n_y \pi}{50}\right) - sin\left(\frac{24 n_y \pi}{50}\right) \right]$$