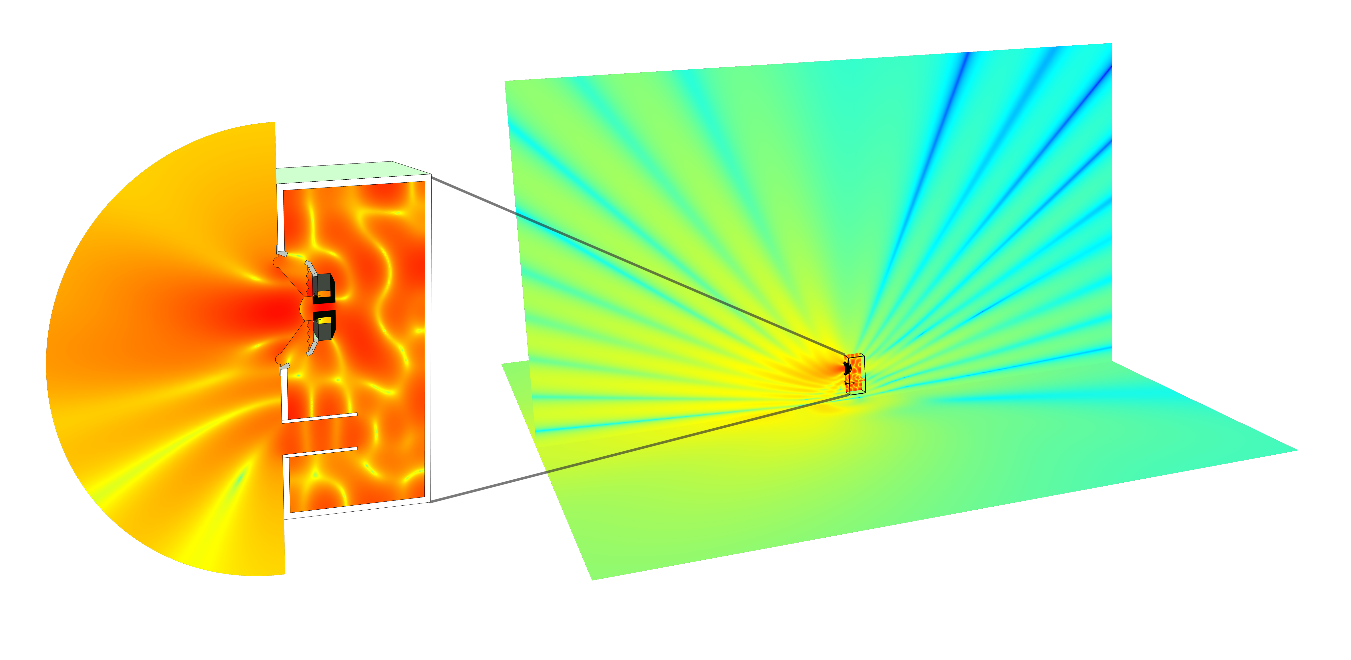
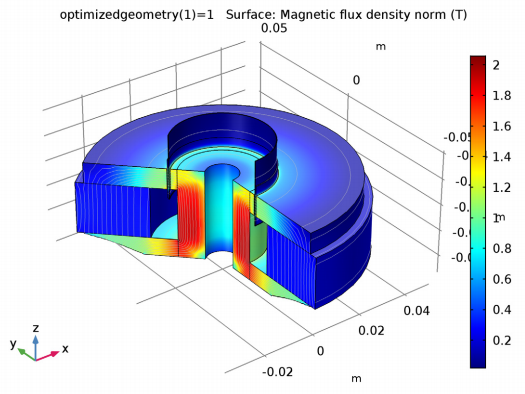
1. **ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE ORDEN SUPERIOR (EDOn)**
   1. INTRODUCCIÓN

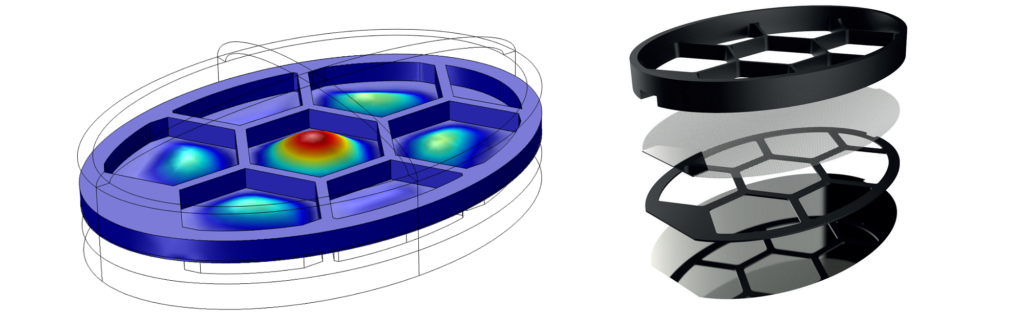
Existen un sin número de problemas físicos, acústicos, eléctricos, electrónicos, sistemas de audio que se pueden modelar mediante ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, tenemos un parlante, el cual es un sistema electro - mecano - acústico



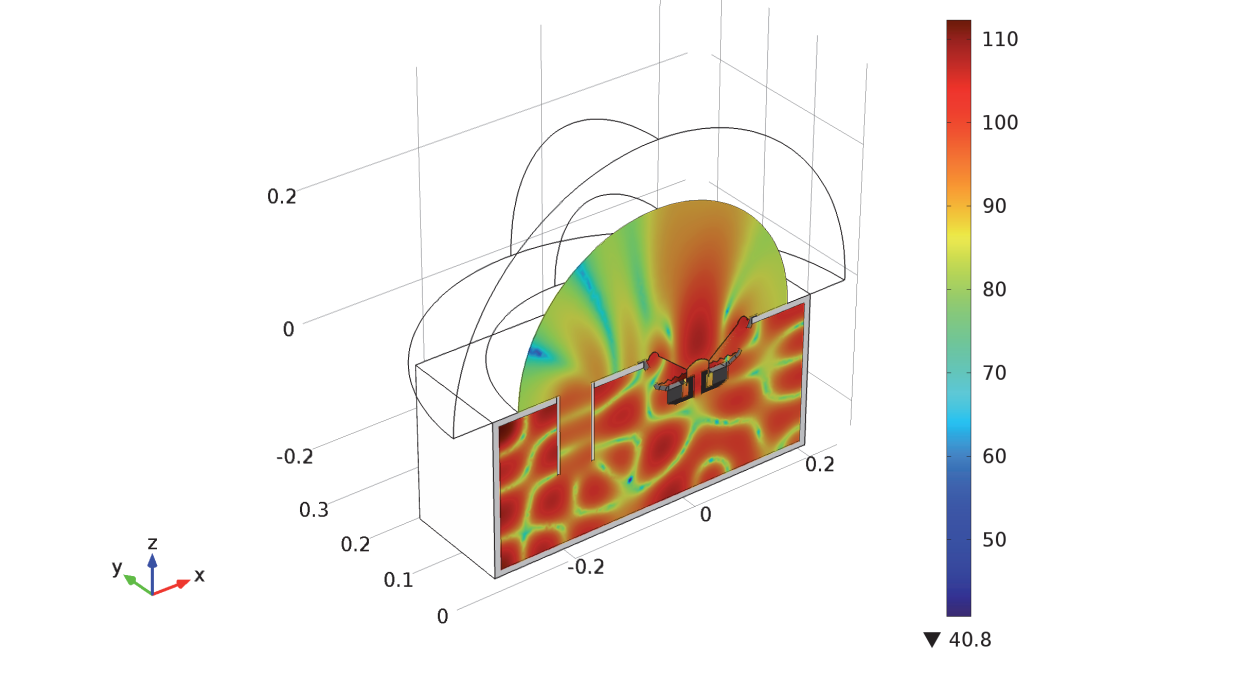
Parlante



Campo electro – magnético del parlante



Vibración mecánica del cono del parlante



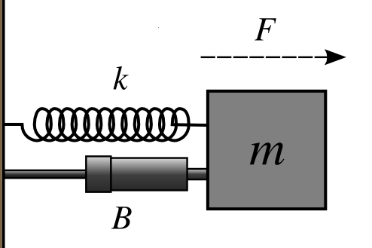
Radiación acústica en la cavidad del parlante

Por partes cada uno de los subgrupos de componentes se puede modelar mediante ecuaciones diferenciales de orden superior, en este caso ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

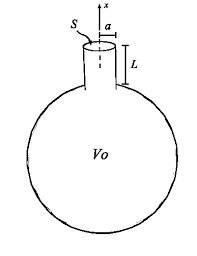
## Circuito eléctrico R L C



La carga eléctrica es *,* mientras que la intensidad de corriente es finalmente es el voltaje de entrada, la señal de audio. La corriente en la bobina genera una fuerza que es proporcional a la corriente , que mueve el cono del parlante. De forma simplificada puede ser caracterizado por su masa, su elasticidad y las pérdidas mecánicas debido al roce



La fuerza es , donde es una constante de proporcionalidad que depende de la bobina y el imán del parlante. El movimiento del parlante genera una presión sonora, dentro de la cavidad la cual se puede, nuevamente describiéndola de forma simplificada como una cavidad, conectada a un tubo y el material absorbente está asociado a pérdidas sonoras



Donde es el desplazamiento volumétrico , donde es el área de la sección transversal del tubo es el desplazamiento de las partículas de aire. Existe acoplamiento entre estas tres ecuaciones.

No es el objetivo en esta parte de la materia describir el modelo de un parlante de forma completa, si no que presentar una motivación de la importancia del estudio de este tipo de ecuaciones.

* 1. MARCO TEÓRICO

Definimos una ecuación diferencial de orden superior, lineal como aquella ecuación cuya incógnita es una función la relación entre las distintas variables es expresada a partir de las derivadas

Sujeta a las siguiente s condiciones iniciales

Aclaración el corresponde a la enésima menos una derivada (no es un elevado a)

Una ecuación es homogénea cuando

Y esta ecuación tiene soluciones dadas por las funciones , , , y esas funciones son linealmente independientes. Es decir, estas funciones cumplen con:

Por lo tanto, la solución complementaria es la combinación lineal de estas soluciones cumple con la ecuación homogénea. Dicha solución es llamada también solución homogénea

Donde las constantes dependen de las condiciones iniciales

Definimos Wronskiano

Si el Wronskiano es distinto de cero, es decir no es nulo las funciones son linealmente independientes

Cuando la ecuación es no homogénea entonces la solución es

Dividimos por

Por otra parte, esta ecuación es válida para valores de tales que , por último, la solución es la solución es formada por la solución complementaria y la solución particular

* 1. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN HOMOGÉNEA CON COEFICIENTES CONSTANTES

El motivo de ahondar en este caso es la profunda relación que tienen este tipo de ecuación con fenómenos físicos, especialmente en acústica, sonido, electroacústica, electricidad

Repensemos la ecuación de una forma genérica y homogénea

Supondremos una solución complementaria de la forma

Reemplazamos

Factorizamos

Entonces para que cumpla con la igualdad o bien , la solución trivial o, por otro lado

Esto se conoce como el polinomio característico de la ecuación diferencial, cuyas raíces son ampliamente conocidas

## Primer Caso y

Este caso se denomina Sobre Amortiguado

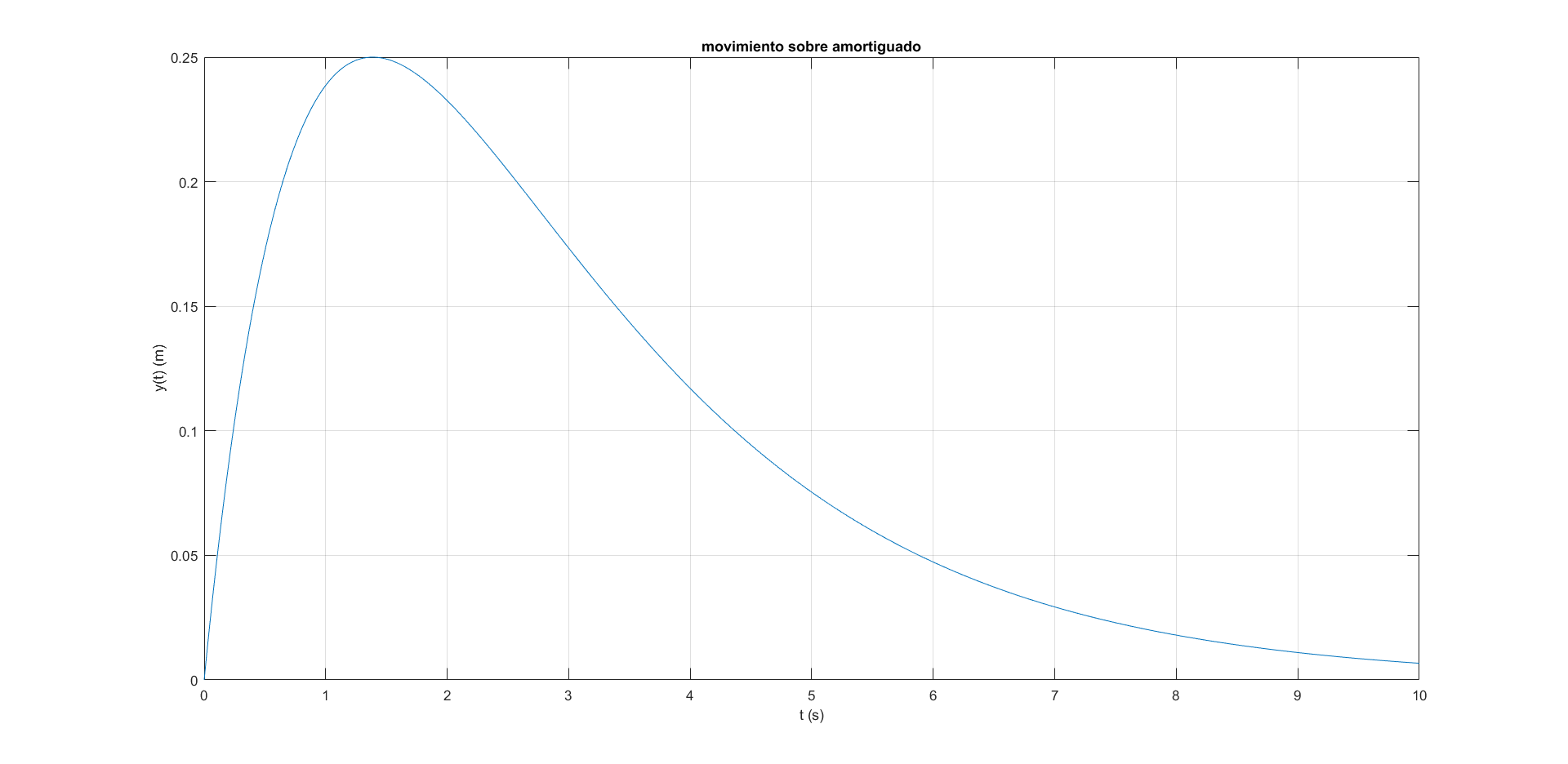
## Segundo Caso y

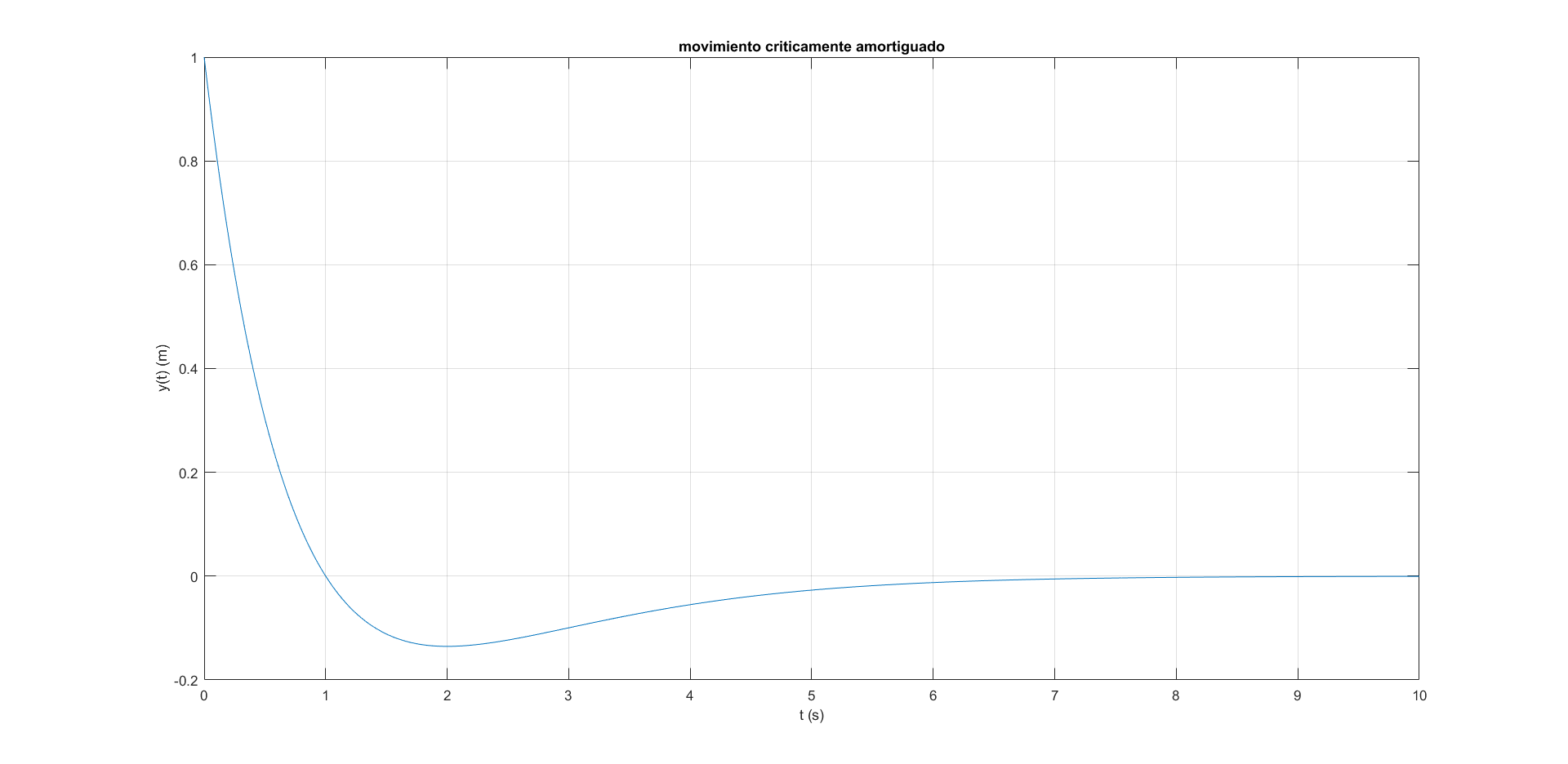
Este caso se denomina Críticamente Amortiguado

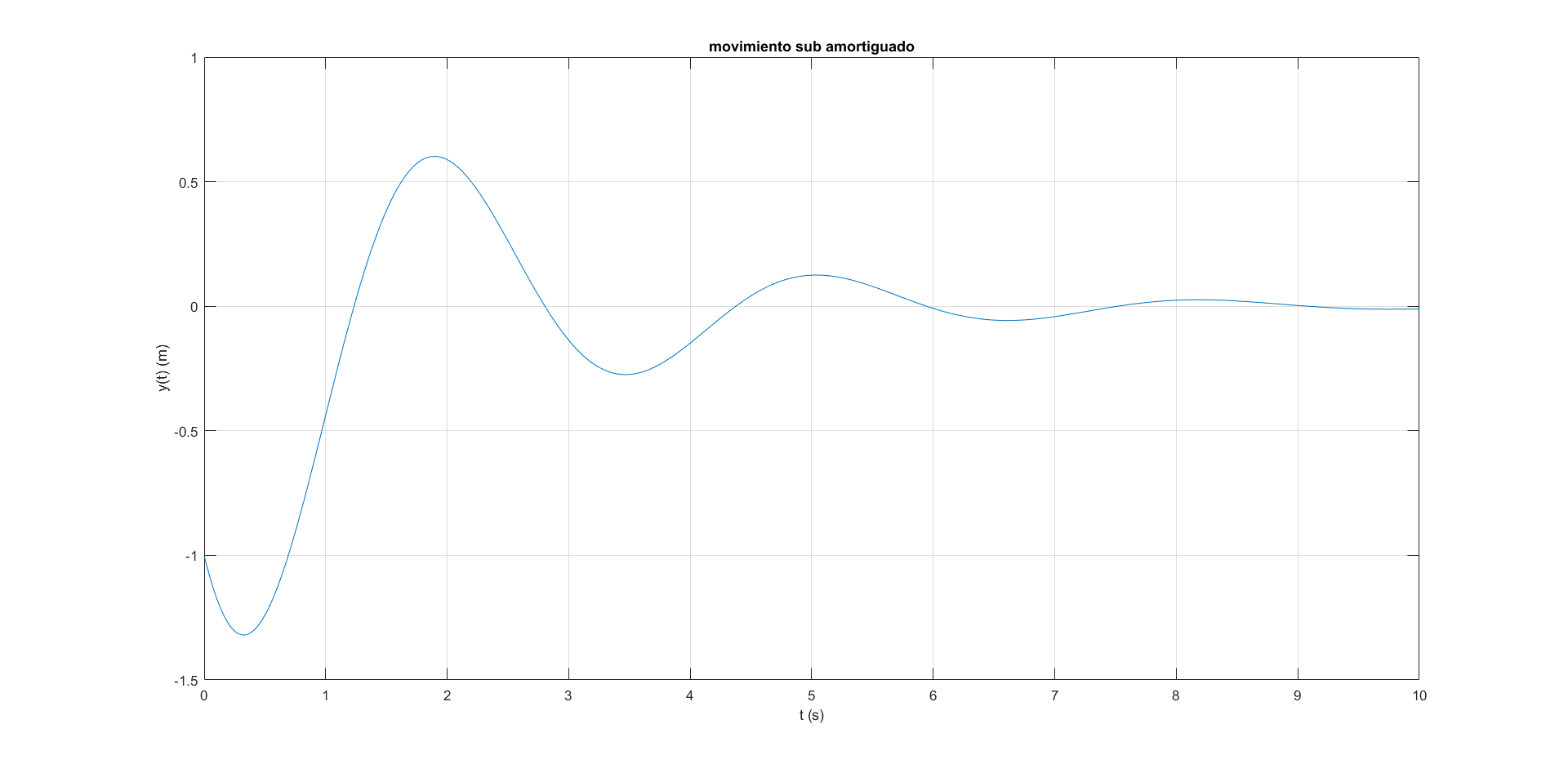
## Tercer Caso y

Al reemplazar y factorizar

Si el término es decir este caso se dice Sub Amortiguado







## Ejemplo

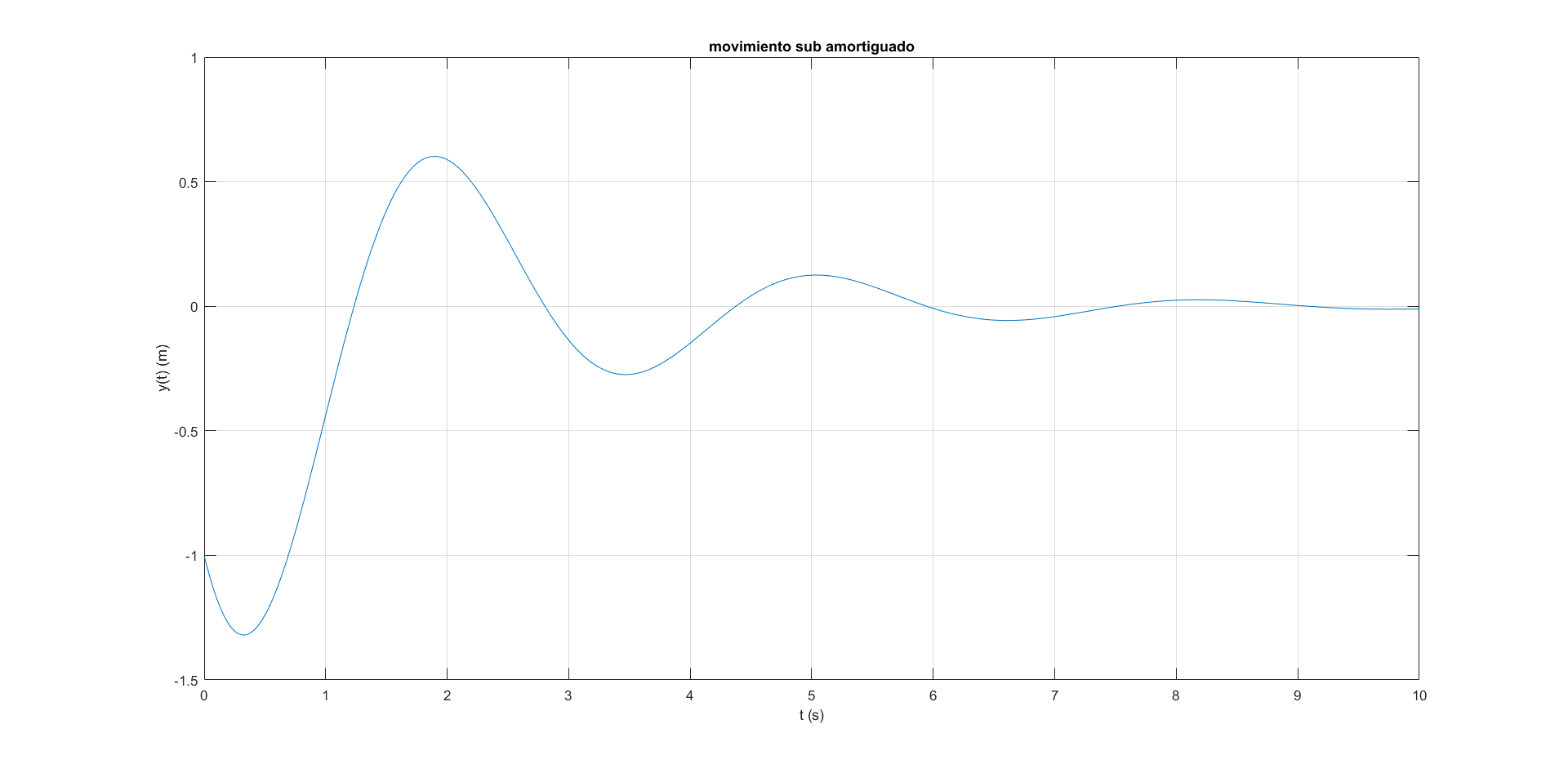
Ecuación diferencial con condiciones iniciales

Polinomio característico

Entonces la función

La primera derivada es

A fin de determinar las constantes usamos las condiciones inciales



* 1. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE ORDEN n HOMOGÉNEA CON COEFICIENTES CONSTANTES

Cuando trabajamos ecuaciones de orden superior con coeficientes constantes

Usamos la misma técnica

Y obtenemos el polinomio característico

Entonces la solución general si las raíces del polinomio son reales y distintas

La solución general si las raíces son reales, pero existen raíces repetidas

veces

La solución general si las raíces son complejas conjugadas, pero existen raíces repetidas

veces

* 1. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE ORDEN SUPERIOR CON COEFICIENTES CONSTANTES NO HOMOGÉNAS: VARIACIÓN DE PARÁMETROS

Este es un método para determinar la solución particular de una ecuación diferencial de orden superior de coeficientes constantes. Comenzaremos en el caso de una ecuación de orden dos con coeficientes constantes

Lo primero que hay que tener en cuenta es dejar la ecuación de la forma

Si los coeficientes son funciones variables también es posible, bajo ciertas circunstancias resolver esta ecuación

Supondremos que se conocen las soluciones complementarias producto de la ecuación homogénea

Entonces la solución particular propuesta es

Entonces el problema es determinar y . Por simplicidad tendremos

Incorporamos la solución particular a

Factorizamos por y

Como e porque son las soluciones homogéneas, la ecuación se reduce a

Podemos transformar usando las expresiones

Entonces podemos reescribir

Para que podamos obtener resultados se de cumplir simultáneamente

Pero lo que tenemos es un sistema de ecuaciones algebraica con incógnitas y y podemos usar el método del determinante para resolver ecuaciones

Entonces

## Ejemplo

Resolver ecuación homogénea

Ecuación característica es

La solución complementaria es

Calculamos el Wronskiano y los demás términos

Entonces la solución particular es

Por lo tanto

Ordenamos

Condiciones inciales

Entonces y , finalmente

Si la ecuación diferencial ordinaria es con coeficientes constantes de orden no homogénea

Lo primero es dejarla como

Donde

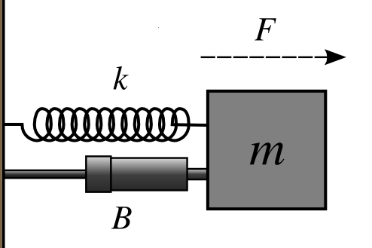
Después determinar las raíces del polinomio característico a fin de resolver la ecuación homogénea y determinar la solución complementaria

Calculamos el Wronskiano

Calculamos

– ésima columna

## Ejemplo



La ecuación homogénea

Calculamos el Wronskiano y los demás términos

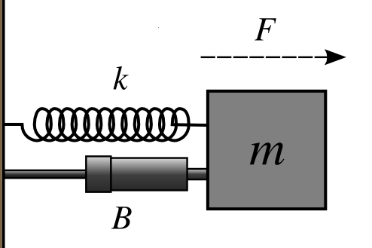
La solución particular es

Toda la solución es

Usamos las condiciones de contorno

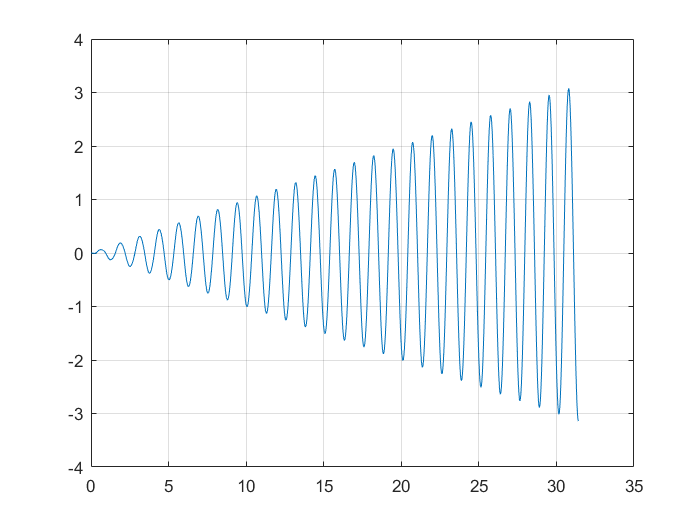
Por lo tanto y la solución es

Esta ecuación importa por su significado físico. En este caso tenemos el fenómeno de resonancia cuando la fuerza impulsora posee la misma frecuencia natural que las raíces del polinomio característico



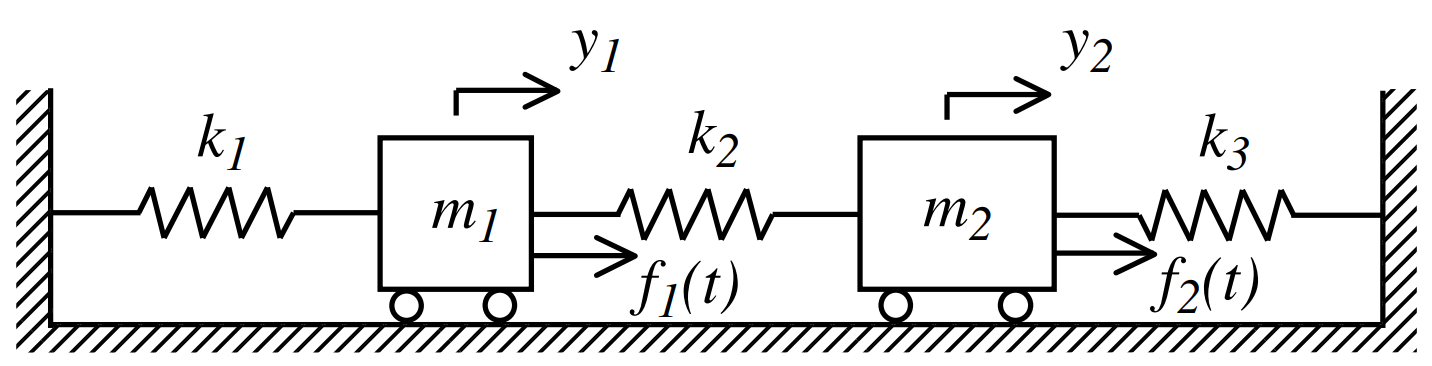
En este sistema no hay amortiguamiento y la solución se incrementa hasta el infinito, lo cual es el caso más simple de un fenómeno llamado resonancia, en este caso la frecuencia natural

Es igual



* 1. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Consideremos el siguiente sistema físico.



La ecuación de movimiento es

O bien

Con condiciones iniciales

Esta se puede resolver usando métodos de substitución, por ejemplo

Tomando la primera ecuación

La transformamos en

Podemos derivar dos veces

Substituimos en la segunda ecuación

Desarrollamos

El polinomio característico es

Las raíces son

Entonces

Como

Debemos derivar la solución dos veces

Entonces

Calculamos adicionalmente la primera derivada de la solución para determinar las constantes a partir de las condiciones iniciales

Condiciones iniciales

La primera

Implica

La segunda

Implica

La tercera

Implica

La cuarta

Implica

Tenemos el sistema de ecuaciones

Los resultados son

Entonces

Cuando la ecuación de movimiento toma la forma

Con condiciones iniciales

Esta se puede expresar en forma matricial como

O en términos de vectores y matrices

Con condiciones iniciales

Con condiciones iniciales

El método de resolver este tipo de problemas es similar al anterior, obviamente el nivel de dificultad es mayor, sin embargo, podemos plantear otros métodos de carácter numérico que pueden resolver este tipo de problemas.

* 1. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE ORDEN SUPERIOR CON COEFICIENTES CONSTANTES NO HOMOGÉNAS: MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

En este caso este método es altamente adecuado para ecuaciones diferenciales de orden superior con coeficientes constante debido a su fácil implementación y lo simple que es desde una perspectiva intuitiva.

Esto es un método numérico, que aproxima las derivadas mediante diferencias finitas. Consideremos nuestro sistema masa resorte y amortiguador

Donde la masa , la rigidez y el amortiguamiento La fuerza para un tiempo que transcurre entre 10 (s) y 30 (s).

Podemos “aproximar” la solución y la fuerza mediante muestras tomadas a un intervalo

Es obvio que en este proceso estamos limitados a un intervalo de muestreo que sea lo más pequeño posible. Usaremos diferencias centrales

Para propósitos prácticos como este tipo de soluciones se programan en términos de arreglos, tenemos

Para la segunda derivada tenemos

Entonces reemplazamos en la ecuación

Factorizamos por

Tenemos entonces una ecuación recursiva para la incógnita

Por lo tanto, para poder resolver esta ecuación necesitamos saber los valores de y de . El valor de está dado por la condición inicial. Para determinar , debemos primero calcular la aceleración inicial desde la misma ecuación diferencial

Entonces como se conocen la posición y la velocidad inicial

A partir de esto podemos calcular la posición mediante una fórmula de la física clásica

Resumiendo, el método es

1. Determinar la aceleración inicial
2. Determinar el desplazamiento
3. Determinar el desplazamiento para

Esto quiere decir

Es claro que a medida que aumenta la calidad de la solución aproximada empeora, pero si nos fijamos en uno de los términos de la solución recursiva

Pensemos, la condición para la convergencia es

Donde es la frecuencia natural angular

Donde es la frecuencia de muestreo, las cual debe ser mucho más alta que la frecuencia natural del sistema. En el teorema del muestreo tenemos el criterio

Cuando tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales expresado de forma matricial tenemos

Con condiciones iniciales

1. Determinar la aceleración inicial

En términos de subíndices

1. Determinar el desplazamiento para
2. Determinar el desplazamiento para usando la resolución de sistemas de ecuaciones

Entonces tenemos

El método será preciso y tendrá convergencia si se cumple que

Donde es la frecuencia natural más alta del sistema

* 1. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE ORDEN SUPERIOR NO LINEALES NO HOMOGÉNASECUACIÓN DE CAUCHY-EULER

La ecuación de Cauchy-Euler es una forma de ecuación diferencial de orden superior de la forma

Donde , para

Determinaremos la solución complementaria, a partir de la ecuación homogénea

Podemos probar

Como ejemplo tomemos la ecuación de Cauchy – Euler de segundo orden

Reemplazamos

Y para no tener la solución trivial se tiene que cumplir

Entonces

## Primer Caso y

## Segundo Caso y

## Tercer Caso *y*

La solución particular es determinada usando el método de variación de parámetros, pero se debe tener cuidado en que la función debe ser

La solución complementaria es

Pasamos a la solución particular, recordar que

Conforme al método de variación de parámetros tenemos que calcular el Wronskiano

Entonces

Entonces la solución particular es

La solución es

La derivada es

Aplicamos las condiciones iniciales

El sistema de ecuaciones es

Entonces escribimos la solución

El siguiente ejemplo es

Reemplazamos

La solución es

Aplicamos las condiciones iniciales

Entonces

La solución es

* 1. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN NO LINEALES NO HOMOGÉNEAS – MÉTODO DE EULER – ESPACIO DE ESTADO

Observamos un péndulo simple

Gráfico, Gráfico radial

Descripción generada automáticamente

Asumiremos un péndulo de masa colgado de una cuerda de longitud actuando bajo la aceleración de gravedad y con un amortiguamiento asociado al roce de coeficiente .

La ecuación de movimiento es obtenida usando la Segunda Ley de Newton

El desplazamiento del péndulo

Donde es el ángulo medido en radianes, la aceleración es

Las fuerzas efectivas entonces son:

Por lo tanto, al remplazar

Ordenamos y obtenemos la ecuación diferencial con condiciones iniciales

Si simplificamos un poco

Obtenemos

La principal aproximación para ángulos pequeños es , entonces tenemos la ecuación diferencial de segundo ordeno con coeficientes constantes la cual puede dar soluciones sub amortiguadas, críticamente amortiguadas o super amortiguadas.

Pero que pasa si las condiciones iniciales son grandes y/o , entonces el fenómeno físico solamente puede ser explicado por

Para resolver esta ecuación necesitamos reescribirla de otra forma y usar una variable auxiliar

Reordenamos para tener un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden con dos incógnitas

Presentaremos el concepto de espacio de fase. Es decir la combinación de todas las posibles condiciones iniciales para esta ecuación

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

Entonces para el punto de más abajo si tenemos y , si y la aceleración de gravedad es y el valor de , entonces el valor de la aceleración inicial es

Haciendo esto para la mayor cantidad de puntos en el espacio de fase desde y en la velocidad inicial

Gráfico, Gráfico de dispersión

Descripción generada automáticamente

Gráfico

Descripción generada automáticamente con confianza media

Para cualquier condición inicial puedo obtener una solución aproximada si “seguimos las flechas”

Gráfico, Gráfico de dispersión

Descripción generada automáticamente

El método de Euler consiste en redefinir una ecuación de orden 2 en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de orden 1

PASO 1

Definimos

Ejemplo paso 1

Entonces la solución aproximada y discreta para este tipo de ecuaciones es

PASO 2

Iteramos

Repetir desde

Ejemplo paso 2

Para

Para

Etcétera

Los resultados presentados de forma más precisa son

Gráfico

Descripción generada automáticamente con confianza media

Gráfico

Descripción generada automáticamente

Gráfico

Descripción generada automáticamente con confianza media

Gráfico, Gráfico de dispersión

Descripción generada automáticamente

https://www.youtube.com/watch?v=p\_di4Zn4wz4&t=7s

* 1. ECUACIÓN DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN DE BESSEL

Solución General por Serie de Potencias

Remplazamos en la ecuación

Podemos determinar los coeficientes mediante las relaciones de recursividad, no estraremos en detalles, pero los resultados son los siguientes

Donde es la función Gamma, la cual es una generalización del concepto de factorial para valores de que no corresponden a enteros positivos

Si es un número entero mayor o igual a cero

Gráfico

Descripción generada automáticamente