# ANÁLISIS DE FRECUENCIA

## Serie de Fourier Compleja (Repaso de Ecuaciones Diferenciales)

Si es una función periódica el período es . Conforme a la definición matemática tenemos, en relación con esto definimos la Serie de Fourier Compleja, mediante el par de ecuaciones

Podemos reformular los coeficientes de la serie compleja de Fourier en términos del período

Recordemos que . Asociamos los armónicos al período y a la frecuencia fundamental

Podemos pensar en los coeficientes como una sucesión

Así como está definida en el dominio del tiempo, podemos definir la siguiente función en el dominio de la frecuencia usando los coeficientes de la Serie de Fourier Compleja

Definimos Espectro Bilateral

Información redundante

Imagen que contiene antena

Descripción generada automáticamente

Espectro unilateral

Imagen en blanco y negro

Descripción generada automáticamente con confianza baja

Teorema de Parseval

Corresponde al hecho que la energía de la señal se conserva tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia. La interpretación es que la información contenida en la forma de onda se conserva cuando es transformada al dominio de la frecuencia

## Transformada de Fourier

Si una señal no es periódica (pero es determinista), podríamos asumir que su período tiende a infinito , entonces podemos modificar la serie de Fourier compleja

Definimos la Transformada de Fourier desde el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia como

Por otro lado, la sumatoria cuando vamos desde el dominio de la frecuencia hacia el dominio del tiempo, es decir el límite se convierte en otra integral

Resumiendo, se define la Transformada de Fourier como el par

La integral no siempre converge para cualquier . Un ejemplo de no convergencia se produce si la función crece de manera indefinida. Otro caso donde no existe la convergencia es si es una señal o sonido aleatorio (ruido).

Diagrama, Esquemático

Descripción generada automáticamente

Ejemplo observemos una función transiente

Calculamos la transformada de Fourier

El módulo es

Gráfico, Gráfico de cajas y bigotes

Descripción generada automáticamente

Interfaz de usuario gráfica, Gráfico, Histograma

Descripción generada automáticamente

Gráfico

Descripción generada automáticamente

Por supuesto la utilidad de esta transformada es altísima en problemas de orden matemático, sin embrago en señales de audio tenemos dos grandes problemas, el primero es el proceso de muestreo y el segundo es que la señal es limitada en su duración temporal.

Teorema de Parseval

## Transformada de Fourier de una Señal Muestreada

Una señal acústica o de audio puede ser muestreada con un intervalo de muestreo

Para las señales de audio , donde es la frecuencia de muestreo . Pero debemos considerar que la señal muestreada no guarda ningún parecido con la señal de audio, esto quiere decir que

Ni siquiera estamos hablando de una aproximación

|  |  |
| --- | --- |
| Señal Continua | Señal Muestreada |
| Gráfico, Gráfico de cajas y bigotes  Descripción generada automáticamente | Gráfico, Gráfico de líneas  Descripción generada automáticamente |

Gráfico, Gráfico de cajas y bigotes

Descripción generada automáticamente

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

Cuando se muestrea donde no se define el muestreo no hay nada, en el grafico solamente existen los puntos

Diagrama

Descripción generada automáticamente

Si la frecuencia de muestreo es muy baja se produce aliasing altas frecuencias de la señal se manifiestan como bajas frecuencias en el proceso de muestreo

Un dibujo en blanco y negro

Descripción generada automáticamente con confianza baja



A fin de minimizar los efectos de aliasing la señal de audio es pasada por un filtro pasa bajo de alta selectividad, con una frecuencia de muestreo superior a dos veces la máxima componente de frecuencia de la señal a fin minimizar el aliasing

Si bien se muestra en la figura un filtro pasa bajo ideal, los cuales no existen porque no son causales, en la práctica se usan filtros de alto orden para eliminar las componentes no deseadas y el aliasing.

## Transformada Discreta de Fourier de una Señal- DFT - FFT

Recordemos la Transformada de Fourier para señales continuas

Como dijimos en ese punto la limitación para datos de audio reales son, primero que la información es finita y segundo la señal se muestrea. Una adaptación de esto es la llamada Transformada Discreta de Fourier (DFT)

En la operación de esta transformada los valores de y son arbitrarios, las operaciones matemáticas y aritméticas asociadas dentro del sistema computacional no dependen de estos valores

En una forma más canónica la transformada discreta de Fourier se escribe como

Una vez calculada de esta forma la DFT, nosotros conforme a los datos del experimento asignamos los valores y

Gráfico, Histograma

Descripción generada automáticamente

Los valores de y no son relevantes en el proceso de cálculo, por eso se deben guardar como metadatos, junto a la señal de audio para realizar su reconstrucción en el proceso de reproducción

## Transformada Rápida de Fourier FFT

La Transformada Rápida de Fourier (FFT) es un algoritmo que acelera el computo de la DFT. Si observamos un caso de una señal de audio de muestras, se necesitan sumas y multiplicaciones, además de un cantidad de veces de llamar a la función . En total para una señal de audio de un segundo el número total de operaciones es enorme. Sin embargo, debido a las simetrías de la función , se pueden reducir las operaciones. El orden de operaciones de una DFT es proporcional a , el orden de las operaciones de la DFT es

Es un algoritmo que disminuye el número cómputos de la Transformada Discreta de Fourier, consideremos una señal de cinco muestras

(5 sumas y 5 multiplicaciones)

(5 sumas y 5 multiplicaciones)

(5 sumas y 5 multiplicaciones)

(5 sumas y 5 multiplicaciones)

(5 sumas y 5 multiplicaciones)

En total son 25 sumas y 25 multiplicaciones, es decir . Si tenemos un segundo de audio muestreado a 44100 (Hz), tenemos operaciones. La FFT disminuye el número de operaciones a . Entonces en el mismo caso

## Tipos de Señales

Diagrama

Descripción generada automáticamente

Señal Estacionaria

Sus propiedades tales como promedios y momentos de orden superior (desviación estándar y/o variancia) no cambian en el tiempo

Señal No Estacionaria

Sus propiedades tales como promedios y momentos de orden superior (desviación estándar y/o variancia) si cambian en el tiempo. Por ejemplo, el lenguaje hablado

Señal Aleatoria

Se refiere a señales cuyos valores futuros no pueden ser predichos a partir de la observación de su comportamiento en el pasado. Sin embargo, es posible estimar promedios, valores RMS, variancias, desviación estándar, etc.

Señal Determinística

es aquella cuyo comportamiento futuro puede ser predicho usando un modelo matemático

Señal Periódica

Señal cuyas frecuencias armónicas están relacionadas a partir de un número racional. Por ejemplo, con números esteros, tenemos el intervalo de octava 2/1, la cuarta justa 4/3, la quinta justa 3/2, etc. Cumple con

Señal Cuasi Periódica

Señal cuyas frecuencias de los sobre tonos están relacionadas a partir de un número irracional. Sobre tonos con relaciones , o bien

Señal Transiente: Señal que comienza y termina en cero y cuya energía es limitada en un corto período de tiempo.

(Bendat & Piersol Random Data)

Diagrama

Descripción generada automáticamente

Diagrama

Descripción generada automáticamente

Las señales transientes, periódicas y quasi-periódicas pueden analizarse de manera simple mediante FFT/DFT, o cualquier otra implementación del análisis de Fourier. El problema es que la contaminación por ruido en el momento de grabar genera una mezcla entre señal determinista con señales aleatorias y eso compromete cualquier tipo análisis que se desee realizar. Por lo tanto, existen otras formas de trabajar este problema.

## Análisis de Señales Aleatorias

A fin de distinguir la información importante en señales contaminadas por ruido aleatorio es usar “promedio” en el dominio de la frecuencia, esto se debe a que primero, el dominio de la frecuencia conserva la información y segundo el “promedio” minimiza el ruido en tiempo y frecuencia

Imagen que contiene Diagrama

Descripción generada automáticamente

Si tenemos un sistema con una entrada y una salida estas están relacionadas por

Donde el signo \* denota la operación integral de convolución y el término representa la Función Respuesta al Impulso

La Respuesta Impulsiva posee las propiedades del sistema acústico o de audio descritas en el dominio del tiempo. Separar de manera directa posee diversas complejidades que no serán cubiertas en este capítulo, pero mediante la Transformada de Fourier tenemos en el dominio de la frecuencia que la convolución se convierte en multiplicación

Por lo tanto, podemos obtener la Función Respuesta de Frecuencia mediante la operación

Usamos las transformada de Fourier inversa para determinar la respuesta impulsiva, ya que corresponde a

Para luego obtener la Función de Respuesta al Impulso

Un sistema más realista

En nuestro caso las señales en el tiempo (entrada y salida) están muestreadas y lo mismo pasa en la frecuencia. Es por eso por lo que se trabaja con la Transformada Discreta de Fourier (DFT) y su implementación algorítmica computacional la Transformada Rápida de Fourier (FFT). Entonces si no existiera ruido

Pero dentro del contexto del ruido tenemos

La presencia del ruido hace que la esperada respuesta de frecuencia no sea representativa a causa del ruido en entrada y salida.

Lo mismo cuando tratamos de determinar la respuesta impulsiva

Bajo circunstancias normales el ruido tanto en la entrada como en la salida se espera que tengan una media igual a cero. Los promedios en el dominio del tiempo pueden eliminar tanto señal como ruido de manera conjunta. La FFT no es de manera directa una herramienta adecuada puesto que si la señal está muy contaminada no se puede distinguir en el dominio de la frecuencia. No podemos bajo estas circunstancias obtener la respuesta de frecuencia y la respuesta impulsiva. Una forma de minimizar el ruido es estimar la Densidad Espectral de Potencia (PSD) mediante el método de Periodogramas de Welsh

Aplicamos FFT a cada segmento, tomamos el módulo de cada uno de esos segmentos pasados al dominio de la frecuencia y promediamos

)

)

)

)

FFT

…..

FFT

FFT

De forma más clara

Esto mismo puede ser utilizado para la señal de salida

Si se desea ver de forma más clara

Y entonces él Módulo al Cuadrado de la Función de Respuesta de Frecuencia del sistema puede ser estimada como

Si bien es útil solamente tenemos una estimación del módulo de la Función de respuesta de frecuencia y se ha pedido la información de fase. A fin de evitar esto se define la Densidad Espectral Cruzada

Donde es el conjugado complejo

Y entonces la respuesta de frecuencia del sistema puede ser estimada como



Entonces mediante la Transformada Discreta de Fourier Inversa podemos estimar la Función de Respuesta Impulsiva

## Análisis de Filtros

Filtros como dispositivos (analógicos o digitales) que son selectivos en términos de los contenidos de frecuencia, y en caso de acústica lo más usado son filtros de pasa banda de 1/1 octava y de 1/3 octava. Este tipo de análisis es usado principalmente en señales de carácter estacionario

Un filtro real no es perfecto posee una frecuencia central y dos frecuencias de corte, superior e inferior la cuales se relacionan en filtros reales por

Diagrama

Descripción generada automáticamente

Gráfico, Histograma

Descripción generada automáticamente

En filtros de 1/1 octava se da la relación entre las frecuencias de corte

Y se define el concepto de ancho de banda relativo, que para un filtro de 1/1 octava es

Es también llamado filtro de setenta por ciento .

En filtros de 1/3 octava se da la relación entre las frecuencias de corte

Y se define el concepto de ancho de banda relativo para un filtro de 1/3 octava, que corresponde a un filtro de veinte y tres por ciento

Cuando se tienen niveles de presión sonora medidos por banda y se desea calcular el nivel de presión total se puede usar superposición incoherente

Niveles de presión sonora en la i-ésima banda de frecuencia

## Detección de Valores RMS y Niveles

La detección del valor RMS corresponde al promedio del valor cuadrático de la señal en un periodo de tiempo de observación especifico y normalizado internacionalmente

Slow

Fast

El nivel asociado

## Sonómetro

Funciones de Ponderación

A, B, C, Z

Bancos de Filtros

1/1 Octava

1/3 Octava

Pre Amplificador

Detector RMS

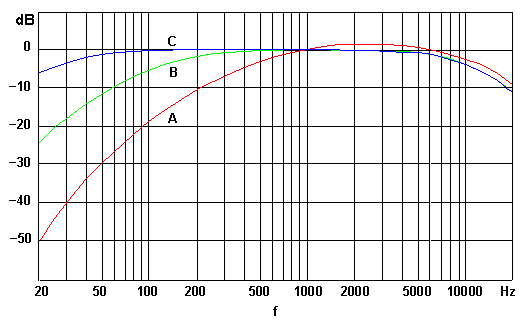
Conversor Lineal a Logaritmo

Micrófono

El oído humano no posee respuesta plana, por lo tanto, al evaluar molestia auditiva, ruido urbano, riego por ruido laboral no es posible establecer una correlación entre una medición directa y la percepción. Las curvas, A,B,C están basadas en la respuesta del oído humano a distintos niveles según la percepción de sonoridad estandarizadas por las curvas de Fletcher y Munson. La curva Z o Flat no posee ninguna alteración en frecuencia.

Gráfico, Diagrama, Histograma

Descripción generada automáticamente



Las curvas A,B y C están construidas para compensar y simular el sistema auditivo en un sonómetro, la curva A está asociada con la mayor posibilidad de daño auditivo