4. ONDAS EN TUBOS

4.1. TUBO CON FUENTE EN x = 0 Y CERRADO EN x = L

Definimos una ecuación de onda como el modelo matemático capaz de describir un proceso de propagación de energía ondulatoria considerando sus condiciones iniciales y de contorno (frontera). Partiremos con el caso unidimensional

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

- Fuente sonora al inicio del tubo $x = 0$

$$p(0,t) \ = \ P_0 e^{j\omega t}$$

- Tubo cerrado en $x = L$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(L,t) \ = \ 0$$

- Usaremos la solución de ondas planas que se vio en el primer capítulo

$$p(x,t) \ = \ Ae^{j(\omega t - kx)} + \ Be^{j(\omega t + kx)}$$

Reemplazamos la solución armónica estacionaria en las condiciones de contorno

$$p(0,t) \ = \ Ae^{j(\omega t - k\times 0)} + \ Be^{j(\omega t + k\times 0)} = P_0 e^{j\omega t}$$

$$p(0,t) \ = \ Ae^{j\omega t} + \ Be^{j\omega t} = P_0 e^{j\omega t}$$

Al simplificar $e^{j\omega t}$ obtenemos

$$A + \ B = P_0$$

Después calculamos la derivada de la presión y usamos la segunda condición de contorno

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x,t) = -jkAe^{j(\omega t - kx)} + jkBe^{j(\omega t + kx)}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(L,t) = -jkAe^{j(\omega t - k\times L)} + jkBe^{j(\omega t + k\times L)} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(L,t) = -jkAe^{j(\omega t - kL)} + jkBe^{j(\omega t + kL)} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(L,t) = -jkAe^{j(\omega t)}e^{j(-kL)} + jkBe^{j(\omega t)}e^{j(+kL)} = 0$$

Simplificamos por $e^{j(\omega t)}$ y por jk entonces tenemos la ecuación

$$-Ae^{-jkL} + Be^{jkL} = 0$$

Entonces para determinar las constantes A y B resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A + B &= P_0 \qquad (*) \\ -Ae^{-jkL} + Be^{jkL} &= 0 \qquad (**) \end{aligned}$$

De la ecuación (*) tenemos

$$B = P_0 - A$$

Remplazamos en (**)

$$-Ae^{-jkL} + (P_0 - A)e^{jkL} = 0$$

$$-Ae^{-jkL} + P_0e^{jkL} - Ae^{jkL} = 0$$

$$-Ae^{-jkL} - Ae^{jkL} = -P_0e^{jkL}$$

$$Ae^{-jkL} + Ae^{jkL} = P_0e^{jkL}$$

$$A\left[e^{-jkL} + e^{jkL}\right] = P_0e^{jkL}$$

Recordemos que

$$e^{\pm jkL} = cos(kL) \pm jsen(kL)$$

$$A[cos(kL) - jsen(kL) + cos(kL) + jsen(kL)] = P_0e^{jkL}$$

$$2Acos(kL) = P_0e^{jkL}$$

$$A = \frac{P_0e^{jkL}}{2cos(kL)}$$

Calculamos el valor de la otra constante usando

$$B = P_0 - A$$

$$B = P_0 - \frac{P_0 e^{jkL}}{2cos(kL)}$$

$$B = \frac{2P_0 cos(kL) - P_0 e^{jkL}}{2cos(kL)}$$

$$B = \frac{2P_0 cos(kL) - P_0[cos(kL) + jsen(kL)]}{2cos(kL)}$$

$$B = \frac{2P_0 cos(kL) - P_0 cos(kL) - jP_0 sen(kL)}{2cos(kL)}$$

$$B = \frac{P_0 cos(kL) - jP_0 sen(kL)}{2cos(kL)}$$

$$B = \frac{P_0 e^{-jkL}}{2cos(kL)}$$

Incorporamos las constantes A y B en la solución armónica estacionaria

$$p(x,t) = \frac{P_0 e^{jkL}}{2cos(kL)} e^{j(\omega t - kx)} + \frac{P_0 e^{-jkL}}{2cos(kL)} e^{j(\omega t + kx)}$$

$$p(x,t) = \frac{P_0}{2cos(kL)} \left[e^{jkL} e^{j(\omega t - kx)} + e^{-jkL} e^{j(\omega t + kx)} \right]$$

$$p(x,t) = \frac{P_0}{2cos(kL)} \left[e^{jkL} e^{j(-kx)} + e^{-jkL} e^{j(+kx)} \right] e^{j\omega t}$$

$$p(x,t) = \frac{P_0}{2cos(kL)} \left[e^{jk(L-x)} + e^{-jk(L-x)} \right] e^{j\omega t}$$

$$p(x,t) = \frac{P_0}{2cos(kL)} \{ cos[k(L-x)] + jsen[k(L-x)] + cos[k(L-x)] - jsen[k(L-x)] \} e^{j\omega t}$$

$$p(x,t) = \frac{2P_0 cos[k(L-x)]}{2cos(kL)} e^{j\omega t}$$

Finalmente

$$p(x,t) = \frac{P_0 cos[k(L-x)]}{cos(kL)} e^{j\omega t}$$

Analizamos el denominador cuando se hace cero, es decir hay un fenómeno de resonancia

$$cos(kL) = 0 \qquad p(x,t) = \infty$$

$$cos(kL) = 0$$

$$kL = (2n-1)\frac{\pi}{2} \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

$$k_n = (2n-1)\frac{\pi}{2L} \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Las frecuencias naturales o de resonancia de orden angular son:

$$\omega_n = (2n-1)\frac{\pi c}{2L} \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Las frecuencias naturales o de resonancia son:

$$f_n = (2n-1)\frac{c}{4L} \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Analicemos el numerador cuando se hace cero es decir los puntos nodales, esto pasa para todas las frecuencias

$$P_0 cos[k(L-x)] = 0$$

Esto pasará cuando

$$k(L-x_N) = (2N-1)\frac{\pi}{2} \qquad N = 1,2,3,\ldots$$

Entonces los puntos nodales $p(x_N,t) = 0$ están ubicados

$$x_N = L - (2N-1)\frac{\pi}{2k} \qquad N = 1,2,3,\ldots$$

Al contrario de las frecuencias naturales, que son infinitas, el número de puntos nodales es acotado.

Definiremos la impedancia acústica específica de entrada, como la razón entre la presión sonora y la velocidad de partículas cuando $x = 0$. Determinaremos la velocidad de partículas en forma general a partir de la expresión de presión sonora anterior y de la ecuación de fuerza de Euler linealizada

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla p$$

En el caso de un tubo 1D

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

Por lo tanto

$$u = -\frac{1}{\rho_0} \int \frac{\partial p}{\partial x} dt$$

Aplicamos esta expresión

$$u(x,t) = -\frac{1}{\rho_0} \int \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{P_0 cos[k(L-x)]}{cos(kL)} e^{j\omega t} \right] dt$$

$$u(x,t) = -\frac{1}{\rho_0} \int \left[-\frac{-kP_0 sen[k(L-x)]}{cos(kL)} e^{j\omega t} \right] dt$$

Integramos con respecto al tiempo

$$u(x,t) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{k}{j\omega} \frac{P_0 sen[k(L-x)]}{cos(kL)} e^{j\omega t}$$

$$u(x,t) = j \frac{1}{\rho_0 c} \frac{P_0 sen[k(L-x)]}{cos(kL)} e^{j\omega t}$$

La impedancia acústica específica de entrada, es decir en $x = 0$

$$z_0 = \frac{p(0,t)}{u(0,t)} = \frac{\frac{P_0 cos[k(L-0)]}{cos(kL)} e^{j\omega t}}{j \frac{1}{\rho_0 c} \frac{P_0 sen[k(L-0)]}{cos(kL)} e^{j\omega t}}$$

$$z_0 = \frac{p(0,t)}{u(0,t)} = \frac{cos[k(L-0)]}{j \frac{1}{\rho_0 c} sen[k(L-0)]}$$

$$z_0 = \frac{p(0,t)}{u(0,t)} = -j\rho_0 c \frac{cos[k(L-0)]}{sen[k(L-0)]}$$

$$z_0 = \frac{p(0,t)}{u(0,t)} = -j\rho_0 c \frac{cos(kL)}{sen(kL)}$$

$$z_0 = \frac{p(0,t)}{u(0,t)} = (-j\rho_0 c) cot(kL)$$

La impedancia mecánica de entrada es la fuerza dividido por la velocidad en $x = 0$

$$Z_{M0} = \frac{f(0,t)}{u(0,t)} = \frac{Sp(0,t)}{u(0,t)}$$

Donde S es el área de la sección transversal de tubo

$$Z_{M0} = \frac{f(0,t)}{u(0,t)} = -j\rho_0 cScot(kL)$$

Aproximemos esta expresión para un tubo cerrado de corta longitud y donde la frecuencia de excitación sea mucho más grande que la longitud del tubo $kL << 1$

$$Z_{M0} = \frac{f(0,t)}{u(0,t)} = -j\rho_0 cS\frac{cos(kL)}{sen(kL)}$$

$$kL = \frac{2\pi L}{\lambda} << 1$$

Para ángulos pequeños

$$cos(kL) \approx 1$$

$$sen(kL) \approx kL$$

$$Z_{M0} \approx -j\rho_0 cS\frac{1}{kL}$$

$$Z_{M0} \approx -j\rho_0 cS\frac{1}{\frac{\omega}{c}L}$$

$$Z_{M0} \approx -j\rho_0 c^2 S\frac{1}{\omega L}$$

$$Z_{M0} \approx -j\frac{\rho_0 c^2 S}{\omega L}$$

Analizaremos las unidades de

$$\frac{\rho_0 c^2 S}{L} = \frac{kg}{m^3}\frac{m^2}{s^2}m^2\frac{1}{m} = \frac{kg}{s^2} = \frac{kgm/s^2}{m} = \frac{N}{m}$$

El resorte posee unidades de N/m. El aire dentro de un tubo corto sometido a ondas sonoras de baja frecuencia funciona como un resorte, es decir un elemento puramente elástico, es decir una Compliancia Mecánica C_M, es decir la unidad dividido por la constante del resorte

$$Z_{M0} \approx -j\frac{1}{\omega C_M}$$

$$C_M = \frac{L}{\rho_0 c^2 S}$$

4.2. TUBO CON FUENTE EN x = 0 Y ABIERTO EN x = L

Definimos una ecuación de onda como el modelo matemático capaz de describir un proceso de propagación de energía ondulatoria considerando sus condiciones iniciales y de contorno (frontera). Partiremos con el caso unidimensional

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

- Fuente sonora al inicio del tubo $x = 0$

$$p(0,t) \;=\; P_0 e^{j\omega t}$$

- Tubo abierto en $x = L$

$$p(L,t) \;=\; 0$$

- Usaremos la solución de ondas planas que se vio en el primer capítulo

$$p(x,t) = Ae^{j(\omega t - kx)} + Be^{j(\omega t + kx)}$$

Aplicamos la primera condición de contorno

$$p(0,t) = Ae^{j(\omega t - k\times 0)} + Be^{j(\omega t + k\times 0)} = P_0 e^{j\omega t}$$

$$Ae^{j\omega t} + Be^{j\omega t} = P_0 e^{j\omega t}$$

Simplificamos $e^{j\omega t}$ en ambos lados de la ecuación y tenemos

$$A + B = P_0$$

Aplicamos la segunda condición de contorno

$$p(L,t) = Ae^{j(\omega t - kL)} + Be^{j(\omega t + kL)} = 0$$

Nuevamente podemos simplificar

$$Ae^{j\omega t}e^{-jkL} + Be^{j\omega t}e^{jkL} = 0$$

Y tenemos

$$Ae^{-jkL} + Be^{jkL} = 0$$

Por lo tanto a fin de poder determinar los valores de A y B resolvemos el sistema de ecuaciones

$$A + B = P_0 \; (*)$$

$$Ae^{-jkL} + Be^{jkL} = 0 \; (**)$$

De la primera ecuación tenemos

$$B = P_0 - A$$

Reemplazamos en la segunda

$$Ae^{-jkL} + (P_0 - A)e^{jkL} = 0$$

$$Ae^{-jkL} - Ae^{jkL} + P_0 e^{jkL} = 0$$

$$Ae^{-jkL} - Ae^{jkL} = -P_0 e^{jkL}$$

$$Ae^{jkL} - Ae^{-jkL} = P_0 e^{jkL}$$

$$A\left(e^{jkL} - e^{-jkL}\right) = P_0 e^{jkL}$$

Usamos la identidad de Euler

$$A[cos(kL) + jsen(kl) - cos(kL) + jsen(kl)] = -P_0e^{jkL}$$

$$j2Asen(kl) = P_0e^{jkL}$$

$$A = \frac{P_0e^{jkL}}{j2sen(kl)}$$

Calculamos la segunda constante a partir de la primera ecuación

$$B = P_0 - A$$

$$B = P_0 - \frac{P_0e^{jkL}}{j2sen(kl)}$$

$$B = \frac{j2P_0sen(kl) - P_0e^{jkL}}{j2sen(kl)}$$

$$B = \frac{j2P_0sen(kl) - P_0[cos(kL) + jsen(kl)]}{j2sen(kl)}$$

$$B = \frac{jP_0sen(kl) - P_0cos(kL)}{j2sen(kl)}$$

$$B = -\frac{P_0cos(kL) - jP_0sen(kl)}{j2sen(kl)}$$

$$B = -\frac{P_0[cos(kL) - jsen(kl)]}{j2sen(kl)}$$

$$B = -\frac{P_0e^{-jkL}}{j2sen(kl)}$$

Ingresaremos los valores de A y B en la solución armónica estacionaria

$$p(x,t) = Ae^{j(\omega t - kx)} + Be^{j(\omega t + kx)}$$

$$p(x,t) = \frac{P_0e^{jkL}}{j2sen(kl)}e^{j(\omega t - kx)} - \frac{P_0e^{-jkL}}{j2sen(kl)}e^{j(\omega t + kx)}$$

$$p(x,t) = \frac{P_0}{j2sen(kl)}\left[e^{jkL}e^{j(-kx)} - e^{-jkL}e^{j(+kx)}\right]e^{j\omega t}$$

$$p(x,t) = \frac{P_0}{j2sen(kl)}\left[e^{jk(L-x)} - e^{-jk(L-x)}\right]e^{j\omega t}$$

$$p(x,t) = \frac{P_0}{j2sen(kl)}\Big[cos[k(L-x)] + jsen[k(L-x)] - cos[k(L-x)] + jsen[k(L-x)]\Big]e^{j\omega t}$$

$$p(x,t) = \frac{j2P_0 sen[k(L-x)]}{j2sen(kl)}e^{j\omega t}$$

$$p(x,t) = \frac{P_0 sen[k(L-x)]}{sen(kl)}e^{j\omega t}$$

Analizamos el denominador cuando se hace cero, es decir hay un fenómeno de resonancia

$$sen(kL) = 0 \qquad p(x,t) = \infty$$

$$sen(kL) = 0$$

$$kL = n\pi \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Las frecuencias naturales o de resonancia de orden angular son:

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Las frecuencias naturales o de resonancia son:

$$f_n = \frac{nc}{2L} \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

Analicemos el numerador cuando se hace cero es decir los puntos nodales, esto pasa para todas las frecuencias

$$P_0 sen[k(L-x)] = 0$$

Esto pasará cuando

$$k(L-x_N) = N\pi \qquad N = 1,2,3,\ldots$$

Entonces los puntos nodales $p(x_N,t) = 0$ están ubicados

$$x_N = L - \frac{N\pi}{k} \qquad N = 1,2,3,\ldots$$

Al contrario de las frecuencias naturales, que son infinitas, el número de puntos nodales es acotado.

Definiremos la impedancia acústica específica de entrada, como la razón entre la presión sonora y la velocidad de partículas cuando $x = 0$. Determinaremos la velocidad de partículas en forma general a partir de la expresión de presión sonora anterior y de la ecuación de fuerza de Euler linealizada

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla p$$

En el caso de un tubo 1D

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

Por lo tanto

$$u = -\frac{1}{\rho_0} \int \frac{\partial p}{\partial x} dt$$

Aplicamos esta expresión

$$u(x,t) = -\frac{1}{\rho_0} \int \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{P_0 sen[k(L-x)]}{sen(kl)} e^{j\omega t} \right] dt$$

$$u(x,t) = -\frac{1}{\rho_0} \int \left[\frac{-kP_0 cos[k(L-x)]}{sen(kl)} e^{j\omega t} \right] dt$$

Integramos con respecto al tiempo

$$u(x,t) = \frac{1}{\rho_0} \frac{k}{j\omega} \frac{P_0 cos[k(L-x)]}{sen(kl)} e^{j\omega t}$$

$$u(x,t) = -j \frac{1}{\rho_0 c} \frac{P_0 cos[k(L-x)]}{sen(kl)} e^{j\omega t}$$

La impedancia acústica específica de entrada, es decir en $x = 0$

$$z_0 = \frac{p(0,t)}{u(0,t)} = \frac{\frac{P_0 sen[k(L-0)]}{sen(kl)} e^{j\omega t}}{-j \frac{1}{\rho_0 c} \frac{P_0 cos[k(L-0)]}{sen(kl)} e^{j\omega t}}$$

$$z_0 = \frac{p(0,t)}{u(0,t)} = \frac{\frac{P_0 sen[k(L-0)]}{sen(kl)} e^{j\omega t}}{-j \frac{1}{\rho_0 c} \frac{P_0 cos[k(L-0)]}{sen(kl)} e^{j\omega t}}$$

$$z_0 = \frac{p(0,t)}{u(0,t)} = j\rho_0 c \frac{sen(kL)}{cos(kL)}$$

La impedancia acústica específica de entrada es

$$z_0 = \frac{p(0,t)}{u(0,t)} = (j\rho_0 c)tan(kL)$$

La impedancia mecánica de entrada es la fuerza dividido por la velocidad en $x = 0$

$$Z_{M0} = \frac{f(0,t)}{u(0,t)} = \frac{Sp(0,t)}{u(0,t)}$$

Donde S es el área de la sección transversal de tubo

$$Z_{M0} = \frac{f(0,t)}{u(0,t)} = j\rho_0 cStan(kL)$$

Aproximemos esta expresión para un tubo cerrado de corta longitud y donde la frecuencia de excitación sea mucho más grande que la longitud del tubo $kL << 1$

$$Z_{M0} = \frac{f(0,t)}{u(0,t)} = j\rho_0 cS\frac{sen(kL)}{cos(kL)}$$

$$sen(kL) \approx kL$$

$$cos(kL) \approx 1$$

$$Z_{M0} \approx j\rho_0 cSkL$$

$$Z_{M0} \approx j\rho_0 cS\frac{\omega}{c}L$$

$$Z_{M0} \approx j\rho_0 SL\omega$$

Analizaremos el término $\rho_0 SL$ en relación con sus unidades

$$\rho_0 SL = \frac{kg}{m^3}m^2 m = kg$$

$$Z_{M0} \approx jM_M\omega$$

El decir el comportamiento del tubo es el comportamiento inercial de una masa concentrada, llamada masa mecánica M_M

Se debe considerar que la masa de aire del tubo irradia al exterior, recordemos la influencia de la impedancia acústica específica de radiación / impedancia mecánica de radiación

Entonces una expresión mas adecuada para la impedancia acústica específica / impedancia mecánica de un tubo abierto parra un tubo de sección circular

$$Z_{M0} \approx j\rho_0 S(L + L')\omega$$

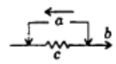
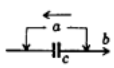
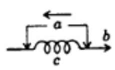
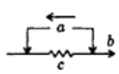
Para un tubo con pestaña

$$L' = \frac{8a}{3\pi}$$

Tuno sin pestaña

$$L' = \frac{3a}{5}$$

TABLE 3.2. Values for a, b, and c in Electrical, Mechanical, and Acoustical Circuits

Element	Electrical	Mechanical		Acoustical	
		Mobility analogy†	Impedance analogy	Impedance analogy†	Mobility analogy
a	e	u	f	p	U
b	i	f	u	U	p
	$c = R_E$	$c = \frac{1}{R_M} = r_M$	$c = R_M$	$c = R_A$	$c = \frac{1}{R_A} = r_A$
	$c = C_E$	$c = M_M$	$c = C_M$	$c = C_A$	$c = M_A$
	$c = L$	$c = C_M$	$c = M_M$	$c = M_A$	$c = C_A$
	$c = Z_E = \frac{e}{i}$	$c = z_M = \frac{u}{f} = \frac{1}{Z_M}$	$c = Z_M = \frac{f}{u} = \frac{1}{z_M}$	$c = Z_A = \frac{p}{U} = \frac{1}{z_A}$	$c = z_A = \frac{U}{p} = \frac{1}{Z_A}$

† Preferred analogies.

Para bajas frecuencias y tubos cortos

Analogía	Impedancia Mecánica	Impedancia Acústica Específica	Impedancia Acústica
General	$Z_M = \frac{f}{u} = \frac{Sp}{u} = Sz$	$z = \frac{p}{u}$	$Z_A = \frac{p}{U} = \frac{p}{Su} = \frac{z}{S}$
Masa (tubo abierto)	$M_M = \rho_0 S(L + L')$	$m_z = \rho_0(L + L')$	$M_A = \frac{\rho_0(L + L')}{S}$
Compliancia (tubo cerrado)	$C_M = \frac{L}{\rho_0 c^2 S}$	$c_z = \frac{L}{\rho_0 c^2}$	$C_A = \frac{SL}{\rho_0 c^2}$
Resistencia (material absorbente en el tubo)	R_M	r_z	R_A