CAPÍTULO V
TUBOS CAVIDADES Y GUÍAS DE ONDA

5.1 INTRODUCCIÓN

Comportamiento ondas campo libre, geometría simple.

Tubos

La longitud de onda, λ es mayor que las dimensiones de la sección del tubo.
Es usado en la medición de Coeficiente de Absorción α.
Teoría acústica de los Instrumentos de Viento.
Modelos de Ductos de Ventilación.

Cavidades

Modos normales de vibración.
Acústica de locales.

Guías de Ondas

Velocidad Fase
Velocidad de grupo

5.2 RESONANCIA EN TUBOS

Consideremos un tubo de sección transversal S, longitud L e impedancia mecánica de terminación $\mathbf{Z}_{\mathbf{mL}}$ en $x = L$.

Si $\lambda >> \sqrt{S}$, baja frecuencia y el pistón vibra armónicamente.

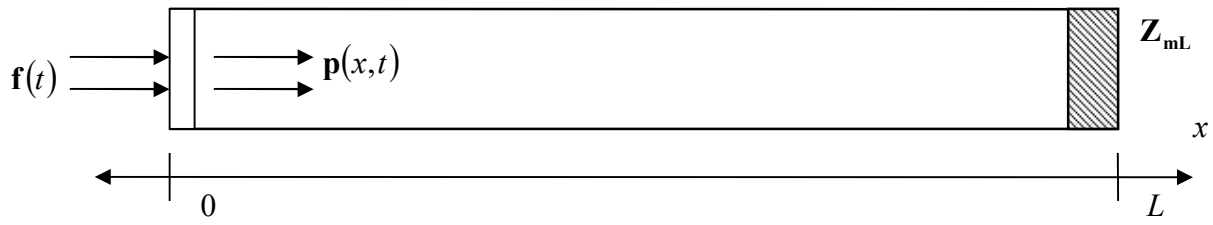

Figura 5.1. Tubo de sección constante y longitud finita de con terminación tipo impedancia

La onda de presión en el tubo tiene la forma

$$\mathbf{p}(x,t) = \mathbf{A}e^{j[\omega t + k(L-x)]} + \mathbf{B}e^{j[\omega t - k(L-x)]} \qquad (5.1)$$

$\mathbf{A}, \mathbf{B}$: Constantes determinadas por las condiciones de frontera en $x = 0$ y $x = L$.

$S\mathbf{p}(x,t)$: Fuerza del fluido

Se calcula la velocidad de partículas

$$\mathbf{u}(L,t)=\frac{-1}{\rho_0}\int\left.\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x}\right|_{x=L} dt \;=\; \pm\left.\frac{\mathbf{p}}{\rho_0 c}\right|_{x=L} \tag{5.2}$$

Se obtiene la impedancia mecánica de terminación

$$\mathbf{Z_{mL}}=\left.\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{u}}\right|_{x=L}=\frac{\mathbf{p}(L,t)S}{\mathbf{u}(L,t)} \tag{5.3}$$

$$\mathbf{Z_{mL}}=\frac{(\mathbf{A}+\mathbf{B})Se^{j\omega t}}{(\mathbf{A}-\mathbf{B})\dfrac{1}{\rho_0 c}e^{j\omega t}} \tag{5.4}$$

$$\mathbf{Z_{mL}}=\rho_0 cS\frac{(\mathbf{A}+\mathbf{B})}{(\mathbf{A}-\mathbf{B})} \tag{5.5}$$

Por un método análogo determinamos la impedancia mecánica de entrada $\mathbf{Z_{m0}}$

$$\mathbf{Z_{m0}}=\rho_0 cS\frac{\left(\mathbf{A}e^{jkL}+\mathbf{B}e^{-jkL}\right)}{\left(\mathbf{A}e^{jkL}-\mathbf{B}e^{-jkL}\right)} \tag{5.6}$$

A partir de la ecuación de la impedancia mecánica de terminación se puede obtener la relación entre las amplitudes de las presiones

$$\mathbf{Z_{mL}}=\rho_0 cS\frac{\mathbf{A}/\mathbf{B}+1}{\mathbf{A}/\mathbf{B}-1} \tag{5.7}$$

$$\frac{\mathbf{Z_{mL}}}{\rho_0 cS}=\frac{\mathbf{A}/\mathbf{B}+1}{\mathbf{A}/\mathbf{B}-1} \tag{5.8}$$

$$\frac{\mathbf{Z_{mL}}}{\rho_0 cS}\left(\mathbf{A}/\mathbf{B}-1\right)=\mathbf{A}/\mathbf{B}+1 \tag{5.9}$$

Entonces

$$\mathbf{A}/\mathbf{B}\left(1-\frac{\mathbf{Z_{mL}}}{\rho_0 cS}\right)=1+\frac{\mathbf{Z_{mL}}}{\rho_0 cS} \tag{5.10}$$

Obteniéndose la relación entre la presión sonora incidente y reflejada $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{\frac{\mathbf{Z_{mL}}}{\rho_0 cS} + 1}{\frac{\mathbf{Z_{mL}}}{\rho_0 cS} - 1} \tag{5.11}$$

Esta es reemplazada en la ecuación correspondiente a la impedancia mecánica de entrada

$$\frac{\mathbf{Z_{m0}}}{\rho_0 cS} = \frac{\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} e^{jkL} + e^{-jkL}}{\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} e^{jkL} + e^{-jkL}} \tag{5.12}$$

Operamos

$$\frac{\mathbf{Z_{m0}}}{\rho_0 cS} = \frac{\frac{1 + \mathbf{Z_{mL}} / \rho_0 cS}{-1 + \mathbf{Z_{mL}} / \rho_0 cS} e^{jkL} + e^{-jkL}}{\frac{1 + \mathbf{Z_{mL}} / \rho_0 cS}{-1 + \mathbf{Z_{mL}} / \rho_0 cS} e^{jkL} - e^{-jkL}} \tag{5.13}$$

$$\frac{\mathbf{Z_{m0}}}{\rho_0 cS} = \frac{\left(1 + \mathbf{Z_{mL}} / \rho_0 cS\right) e^{jkL} + \left(-1 + \mathbf{Z_{mL}} / \rho_0 cS\right) e^{-jkL}}{\left(1 + \mathbf{Z_{mL}} / \rho_0 cS\right) e^{jkL} - \left(-1 + \mathbf{Z_{mL}} / \rho_0 cS\right) e^{-jkL}} \tag{5.14}$$

Sabemos que

$$e^{jkL} + e^{-jkL} = 2\cos kL \tag{5.15}$$

$$e^{jkL} - e^{-jkL} = 2\,jsenkL \tag{5.16}$$

Luego

$$\frac{\mathbf{Z_{m0}}}{\rho_0 cS} = \frac{\left(e^{jkL} + e^{-jkL}\right) + \mathbf{Z_{mL}} / \rho_0 cS \left(e^{jkL} - e^{-jkL}\right)}{\left(e^{jkL} + e^{-jkL}\right) + \mathbf{Z_{mL}} / \rho_0 cS \left(e^{jkL} - e^{-jkL}\right)} \tag{5.17}$$

$$\frac{\mathbf{Z_{m0}}}{\rho_0 cS} = \frac{2\left(\mathbf{Z_{mL}} / \rho_0 cS \cos kL + j \sin kL\right)}{2\left(\cos kL + j\mathbf{Z_{mL}} / \rho_0 cS \sin kL\right)} \tag{5.18}$$

$$\frac{\mathbf{Z_{m0}}}{\rho_0 cS} = \frac{\mathbf{Z_{mL}} / \rho_0 cS + j \tan kL}{1 + \mathbf{Z_{mL}} / \rho_0 cS \tan kL} \tag{5.19}$$

Expresando la impedancia de terminación en forma genérica de resistencia y reactancia mecánica

$$\frac{\mathbf{Z_{mL}}}{\rho_0 cS} = r + jx \tag{5.20}$$

Y aplicando la condición en que la parte imaginaria es igual a cero se produce la resonancia. Esto nos lleva a una ecuación general de esta para cualquier tipo de terminación en un tubo de longitud finita

$$\Im m\left\{\frac{\mathbf{Z_{m0}}}{\rho_0 cS}\right\} = \frac{-x\tan^2 kL + \left(r^2 + x^2 - 1\right)\tan kL - x}{\left(r^2 + x^2\right)\tan^2 kL - 2x\tan kL + 1} = 0 \tag{5.21}$$

Si la resistencia entrada es pequeña entonces tenemos ***Resonancia***. Por otra parte si la resistencia entrada es grande entonces ocurre la ***Antiresonancia***

Si $r = 0$ ***Resonancia***
Si $r = \infty$ ***Antiresonancia***

Tubo Abierto Cerrado

Al excitar el tubo en $x = 0$, con una tapa rígida en $x = L$ la impedancia mecánica de terminación tiende a infinito $\left|\frac{Z_{mL}}{\rho_0 cS}\right| \to \infty$. Por lo tanto

$$\frac{\mathbf{Z_{m0}}}{\rho_0 cS} = -j\cot kL \tag{5.22}$$

La reactancia es cero cuando $-\cot kL = 0$

$$\Im m\left\{\frac{\mathbf{Z_{m0}}}{\rho_0 cS}\right\} = -\cot kL = 0 \tag{5.23}$$

Esta ocurre para los valores de

$$k_n L = (2n-1)\frac{\pi}{2} \qquad n = 1,2,3... \tag{5.24}$$

Entonces

$$k_n = (2n-1)\frac{\pi}{2L} \tag{5.25}$$

$$\frac{\omega}{k} = c \tag{5.26}$$

$$\omega = kc \tag{5.27}$$

Por lo tanto se obtiene un conjunto de frecuencias de resonancia dadas por

$$\omega_n = (2n-1)\frac{\pi}{2L}c \tag{5.28}$$

$$f_n = \frac{2n-1}{4}\frac{c}{L} \tag{5.29}$$

Tubo Abierto Abierto

Existen tres situaciones para tubos abiertos, la primera que considera un caso ideal y los casos reales de terminación con pestaña (sin sonodeflector) y sin pestaña (con sonodeflector).

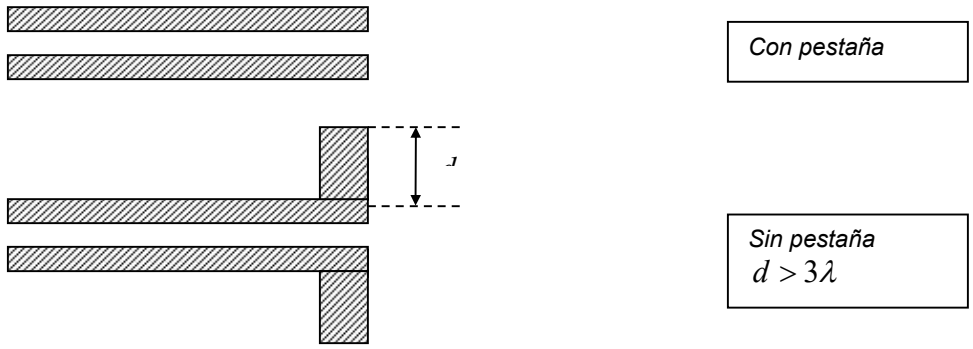

Figura 5.2. Tubo de sección constante con terminación abierta

Cuando el tubo es excitado en $x = 0$ y está abierto en $x = L$. La impedancia mecánica de terminación es nula

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{mL}} = 0 \tag{5.30}$$

Luego

$$\frac{\mathbf{Z}_{\mathbf{m0}}}{\rho_0 cS} = j\tan kL \tag{5.31}$$

$$\Im m\left\{\frac{\mathbf{Z}_{\mathbf{m0}}}{\rho_0 cS}\right\} = \tan kL = 0 \tag{5.32}$$

Esto sucede para

$$kL = n\pi \tag{5.33}$$

Por lo tanto

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \tag{5.34}$$

Las frecuencias naturales son

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} \tag{5.35}$$

$$f_n = \frac{nc}{2L} \qquad n = 1,2,3... \tag{5.36}$$

Pero esto es una aproximación trivial, pues supone que al final la presión sonora es inexistente sin embargo hay irradiación de sonido. Al irradiar sonido, implica que la impedancia de terminación es equivalente a la impedancia de radiación.

$$\mathbf{Z_{mL}} = \mathbf{Z_R} \tag{5.37}$$

Podemos considerar la abertura como un pistón circular plano con pestaña (sin sonodeflector)

$$\frac{\mathbf{Z_{mL}}}{\rho_0 cS} = \frac{1}{2}(ka)^2 + j\frac{8}{3\pi}ka \qquad \lambda >> a \qquad ka << 1 \tag{5.38}$$

$$\frac{\mathbf{Z_{mL}}}{\rho_0 cS} = r + jx \qquad r << 1 \qquad x << 1 \tag{5.39}$$

Aproximamos y obtenemos la condición de resonancia

$$\Im m\left\{\frac{\mathbf{Z_{m0}}}{\rho_0 cS}\right\} = \tan kL = -x \tag{5.40}$$

Reemplazamos

$$\tan(n\pi - knL) = \frac{8}{3\pi}k_n a \approx \tan\left(\frac{8}{3\pi}k_n a\right) \qquad n = 1,2,3,... \tag{5.41}$$

$$n\pi = k_n L + \frac{8}{3\pi}k_n a \tag{5.42}$$

$$f_n = \frac{n}{2}\frac{c}{L + \frac{8}{3\pi}a} \tag{5.43}$$

$$L_{eff} = L + \frac{8a}{3\pi} \tag{5.44}$$

En el caso que la terminación del tubo no posea pestaña, la impedancia de radiación es

$$\frac{\mathbf{Z_{mL}}}{\rho_0 cS} = \frac{1}{4}(ka)^2 + j\frac{3}{5}ka \tag{5.45}$$

$$L_{eff} = L + \frac{3}{5}a \tag{5.46}$$

Estas correcciones son independientes de la frecuencia y válidas para tubos de sección transversal constante

5.3 RADIACIÓN DE POTENCIA POR TUBOS ABIERTOS

La solución anterior da el coeficiente de reflexión de presión sonora

$$\mathbf{R_P} = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}} \tag{5.47}$$

$$\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{Z_{mL}}/\rho_0 cS - 1}{\mathbf{Z_{mL}}/\rho_0 cS + 1} \tag{5.48}$$

Coeficiente de Transmisión de Potencia

$$T_\pi = 1 - \left|\mathbf{B}/\mathbf{A}\right|^2 \tag{5.49}$$

Tubo con Pestaña

$$\mathbf{R_P} = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}} = \frac{\left(1 - 1/2(ka)^2\right) - j\,8/3\pi(ka)}{\left(1 + 1/2(ka)^2\right) + j\,8/3\pi(ka)} \tag{5.50}$$

Luego

$$T_\pi = \frac{2(ka)^2}{\left(1 + 1/2(ka)^2\right)^2 + (8/3\pi)^2(ka)^2} \tag{5.51}$$

Para $ka << 1$

$$T_\Pi \cong 2(ka)^2 \tag{5.52}$$

Lo que implica que

$$\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}} \approx -1 \tag{5.53}$$

Por lo tanto la onda incidente tiene una fase de 180º de la onda reflejada aproximadamente y las amplitudes de la onda incidente y reflejada son similares

$$|\mathbf{A}| \approx |\mathbf{B}| \tag{5.54}$$

hay un antinodo en $x = L$ y aproximadamente las amplitudes de velocidad de partículas son similares $U_I \approx U_R$ casi sin desfase. Sin embargo la radiación es poco eficiente

Tubo sin pestaña

$$T_{\Pi} = \frac{(ka)^2}{\left(1 + 1/4\,(ka)^2\right)^2 + (3/5)^2\,(ka)^2} \tag{5.55}$$

$$T_{\Pi} \approx (ka)^2 \tag{5.56}$$

5.4 PATRONES DE ONDA ESTACIONARIA

Supondremos sin pérdida de generalidad que la amplitud de onda incidente es real y la reflejada es compleja

$$A = A \in \Re \tag{5.56}$$

$$\mathbf{B} = Be^{j\theta} \in C \tag{5.57}$$

$$B \in \Re \tag{5.58}$$

Sustituimos en

$$\frac{\mathbf{Z_{mL}}}{\rho_0 cS} = \frac{A + \mathbf{B}}{A - \mathbf{B}} = \frac{1 + \dfrac{B}{A}e^{j\theta}}{1 - \dfrac{B}{A}e^{j\theta}} \tag{5.59}$$

Por lo tanto para A, B y θ dados obtenemos $\mathbf{Z_{mL}}$. Si substituimos en la ecuación

$$\mathbf{p}(x,t) = Ae^{j[\omega t + k(L-x)]} + \mathbf{B}e^{j[\omega t - k(L-x)]} \tag{5.60}$$

y calculamos la amplitud

$$P = |\mathbf{p}| \tag{5.61}$$

$$P = \left((A+B)^2 \cos^2\left(k(L-x) - \theta/2\right) + (A-B)^2\, sen^2\left(k(L-x) - \theta/2\right)\right)^{1/2} \tag{5.62}$$

Observamos que

Antitodo en $A+B$
Nodo en $A-B$

Definimos ***Relación de Onda Estacionaria*** como la máxima amplitud en el tubo dividida por la amplitud mínima

$$ROE = \frac{A+B}{A-B} \tag{5.63}$$

Luego

$$\frac{B}{A} = \frac{ROE-1}{ROE+1} \tag{5.64}$$

Entonces podemos calcular la Impedancia Mecánica de Terminación

a. Calculamos la Razón de Onda Estacionaria
b. Calculamos B/A
c. Calculamos la distancia del primer nodo desde $x = L$ a partir de la información de fase entre las amplitudes

$$\theta = 2k(L - x_1) - \pi \tag{5.65}$$

Ejemplo

$$ROE = 2 \tag{5.66}$$

$$\theta = \pi/2 \tag{5.67}$$

$$L - x = 3/8\,\lambda \tag{5.68}$$

$$B/A = 1/3 \tag{5.69}$$

$$\frac{Z_{mL}}{\rho_0 cS}\frac{1+1/3\,e^{j\pi/2}}{1-1/3\,e^{j\pi/2}} \approx 0{,}8 + j0{,}6 \tag{5.70}$$

5.5 ABSORCIÓN DEL SONIDO EN TUBOS

Si se considera absorción por las paredes y por el fluido, usamos constante de propagación compleja

$$\mathbf{k} = k - j\alpha \tag{5.71}$$

Si la substituimos en la ecuación de onda la solución armónica

$$\mathbf{p}(x,t) = Ae^{j[\omega t + \mathbf{k}(L-x)]} + Be^{j[\omega t + \mathbf{k}(L-x)]} \tag{5.72}$$

Usando las mismas deducciones, para una terminación rígida en $x = L$ esto implica que la solución final es

$$\mathbf{p}(x,t) = \frac{F}{S}\frac{\cos[\mathbf{k}(L-x)]}{\cos(\mathbf{k}L)}e^{j\omega t} \tag{5.73}$$

La impedancia de entrada es

$$\mathbf{Z_{m0}} = -j\rho_0 \frac{\omega}{\mathbf{k}} S\cot(\mathbf{k}L) \tag{5.74}$$

Expandiendo por medio de las identidades trigonométricas

$$\mathbf{z} = x + jy \qquad \cot g(\mathbf{z}) = \frac{\cos(2x) + \cosh(2y)}{\sin(2x) + j\sinh(2y)} \tag{5.75}$$

$$\frac{\mathbf{Z_{m0}}}{\rho_0 S} = -j\frac{\omega}{k - j\alpha}\left(\frac{\cos(2kL) + \cosh(2\alpha L)}{\sin(2kL) + j\sinh(2\alpha L)}\right) \tag{5.76}$$

$$\frac{\mathbf{Z_{m0}}}{\rho_0 cS} = -j\frac{1 + j\alpha/k}{1 + (\alpha/k)^2}\left(\frac{\cos(kL)\sin(kL) + j\cosh(\alpha L)\sinh(\alpha L)}{\sin^2(kL)\cosh^2(\alpha L) + \cos^2(kL)\sinh^2(\alpha L)}\right) \tag{5.77}$$

Potencia disipada

$$W = F^2\frac{R_{m0}}{2\left|\mathbf{Z_{m0}}\right|^2} = \frac{1}{2}\frac{F^2}{\rho_0 cS}\alpha L\frac{sen^2(kL) + (\alpha L)^2\cos^2(kL)}{(\alpha L)^2 + \cos^2(kL)sen^2(kL)} \tag{5.78}$$

En Resonancia

$$\cos kL = 0 \qquad W_R = \frac{1}{2}\frac{F^2}{\rho_0 cS}\frac{1}{\alpha L} \tag{5.79}$$

En Antiresonancia

$$\sin kL = 0 \qquad W_A = \frac{1}{2}\frac{F^2}{\rho_0 cS}\alpha L \tag{5.80}$$

La frecuencia de resonancia es aproximada a la de un tubo no amortiguado. Si examinamos la impedancia $\mathbf{Z_{m0}}$ para $\omega = \omega_n + \Delta\omega$

$$kL = \frac{\omega_n + \Delta\omega}{c} L = (2n-1)\frac{\pi}{2} + \Delta\omega \frac{L}{c} \tag{5.81}$$

$$\frac{Z_{m0}}{\rho_0 c S} \cong \alpha L + j\Delta\omega \frac{L}{c} \tag{5.82}$$

La resistencia mecánica de entrada $R_{m0} \approx cte$ en $\Delta\omega$. Los puntos de media potencia se encuentran cuando $R_{m0} = X_{m0}$

$$\Delta\omega = \pm\alpha c \tag{5.83}$$

El factor de calidad de la resonancia es

$$Q_n = \frac{\omega_n}{2\alpha c} = \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha/kn} \tag{5.84}$$

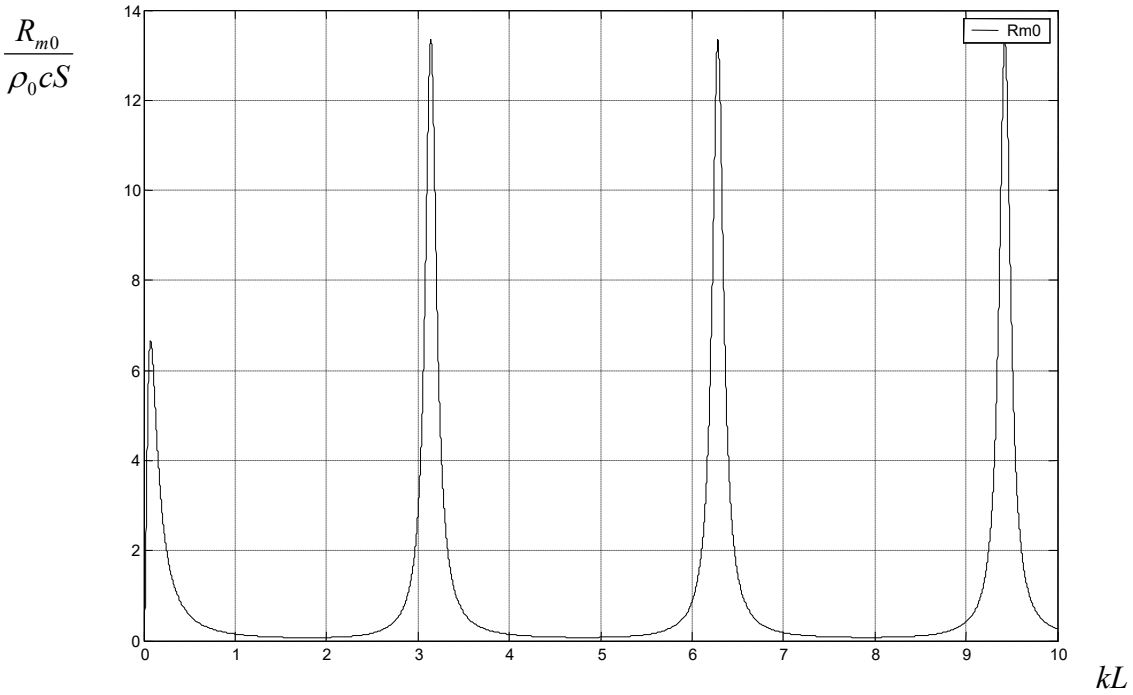

Figura 5.3. Resistencia Mecánica de Entrada Normalizada – Tubo con Absorción

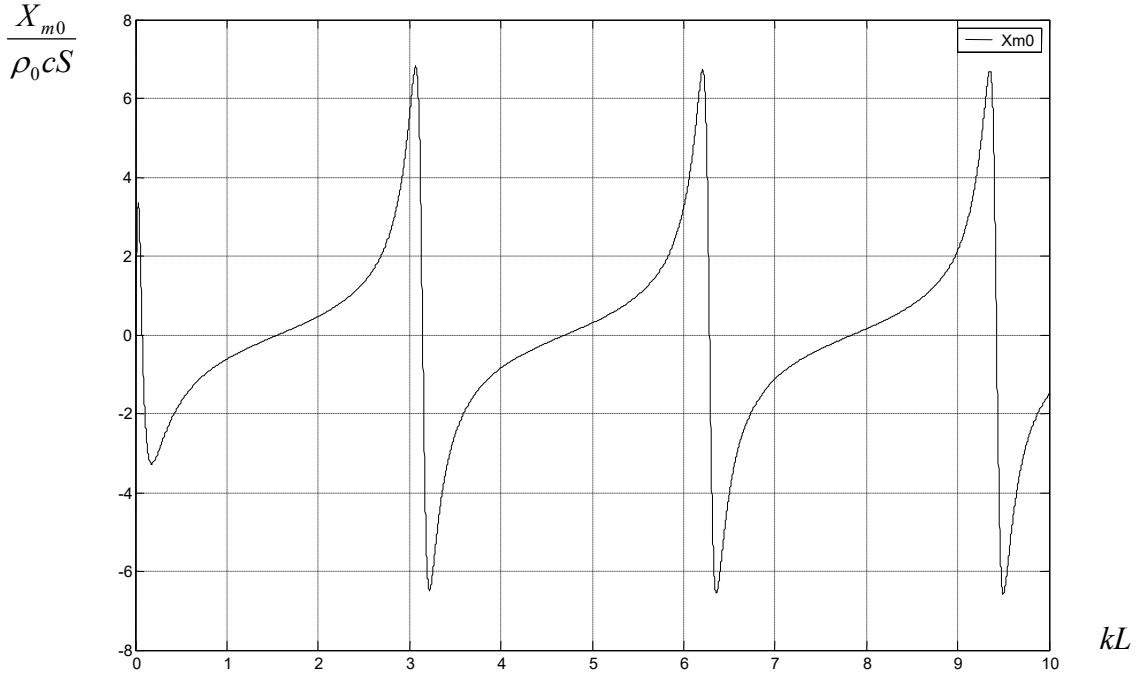

Figura 5.4. Reactancia Mecánica de Entrada Normalizada – Tubo con Absorción

Medición de Absorción Sonora en Fluidos

Método 1

Tubo cilíndrico largo
Eliminar ondas reflejadas con una Terminación Anecoica.
Pulsos cortos
Onda plana progresiva

$$P_2 = P_1 e^{-\alpha(x2-x1)} \tag{5.85}$$

x_1, x_2 Puntos de medición

P_1 Presión medida x_1

P_2 Presión medida x_2

Método 2

Ondas estacionarias
Terminación rígida $x = L$

$$P_{INC} = P_{REF} = P_L \tag{5.86}$$

$$P = 2P_L\left(\cos^2\left[k(L-x)\right]\cosh^2\left[k(L-x)\right] + \sin^2\left[k(L-x)\right]\sinh^2\left[k(L-x)\right]\right)^{1/2} \tag{5.87}$$

Los nodos están ubicados en

$$k(L-x)=(2n-1)\frac{\pi}{2} \qquad n=1,2,3.. \tag{5.88}$$

Las amplitudes mínimas relativas

$$P_{\min}/P_L = 2\sinh(\alpha(L-x)) \approx 2\alpha(L-x) \tag{5.89}$$

Determinando la curva podemos determinar α

Los antinodos ocurren en

$$k(L-x)=n\pi \qquad n=1,2,3... \tag{5.90}$$

$$P_{\max}/P_L = 2\cosh(\alpha(L-x)) \approx 2+(\alpha(L-x))^2 \tag{5.91}$$

La absorción medida por este método es mayor debido a las pérdidas por las paredes del tubo.

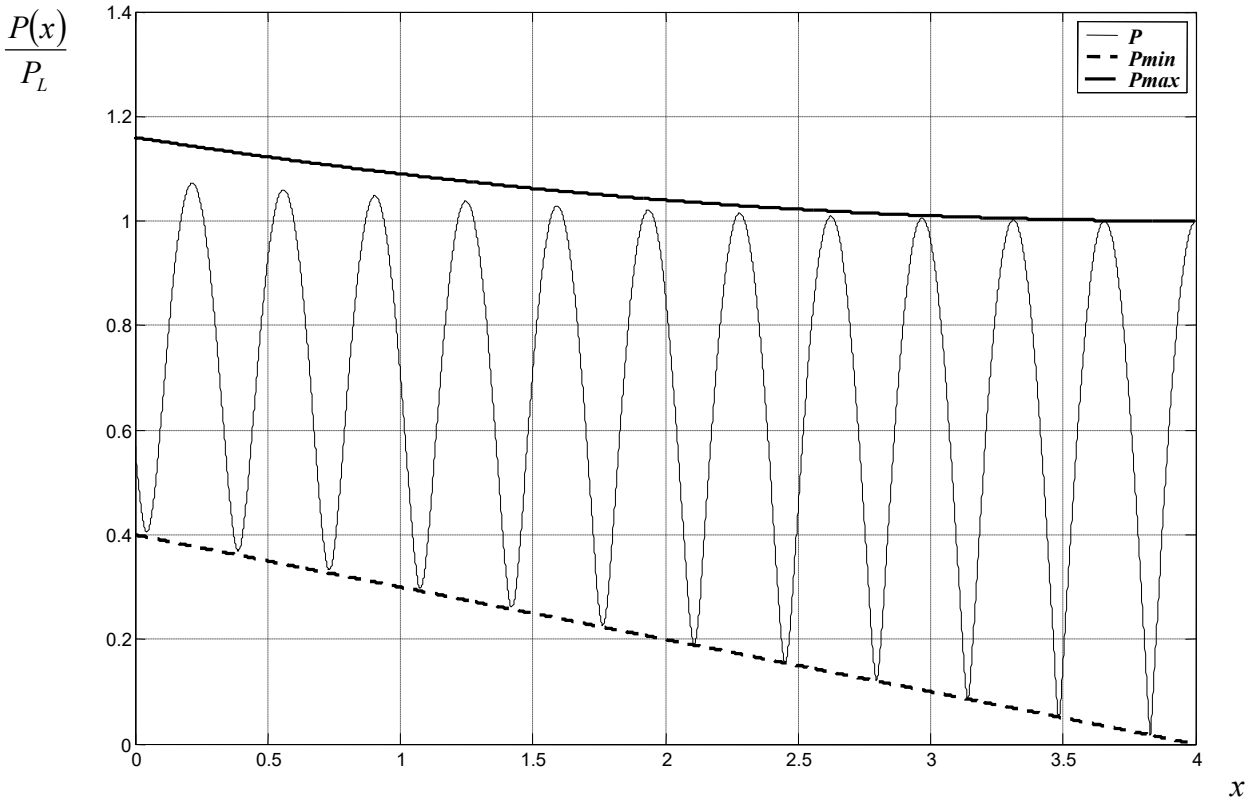

Figura 5.5. Distribución de la presión Sonora – Tubo con Absorción

Resistencia viscosa ***Helmholtz*** : Producida paredes tubo

$$x = 0 \qquad n = 0 \tag{5.92}$$

$$x = 2.28\sqrt{2\eta/(\rho_0 \omega)} \qquad \eta = u_{\max} \tag{5.93}$$

Resistencia viscosa ***Kirchoff***: Intercambio de Energía calórica entre fluido - pared

5.6 COMPORTAMIENTO DEL SISTEMA COMBINADO EXCITADOR – TUBO

Un aspecto importante es tomar el comportamiento del tubo cuando un excitador sonoro, es decir un parlante está adosado. El parlante como sistema mecánico y acústico aporta tanto en masa como en rigidez al campo sonoro y por lo tanto puede variar las frecuencias de resonancia consideradas anteriormente. En este caso no se considerarán las pérdidas de energía sonora causadas por las paredes del tubo.

Ecuación de movimiento

$$m\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -R_m\frac{d\varepsilon}{dt} - s\varepsilon - s\mathbf{p}(0,t) + \mathbf{f}(t) \tag{5.94}$$

Donde

$\mathbf{f}(t) = Fe^{j\omega t}$	Fuerza
ε	Desplazamiento
R_m	Resistencia mecánica
s	Rigidez resorte
m	Masa

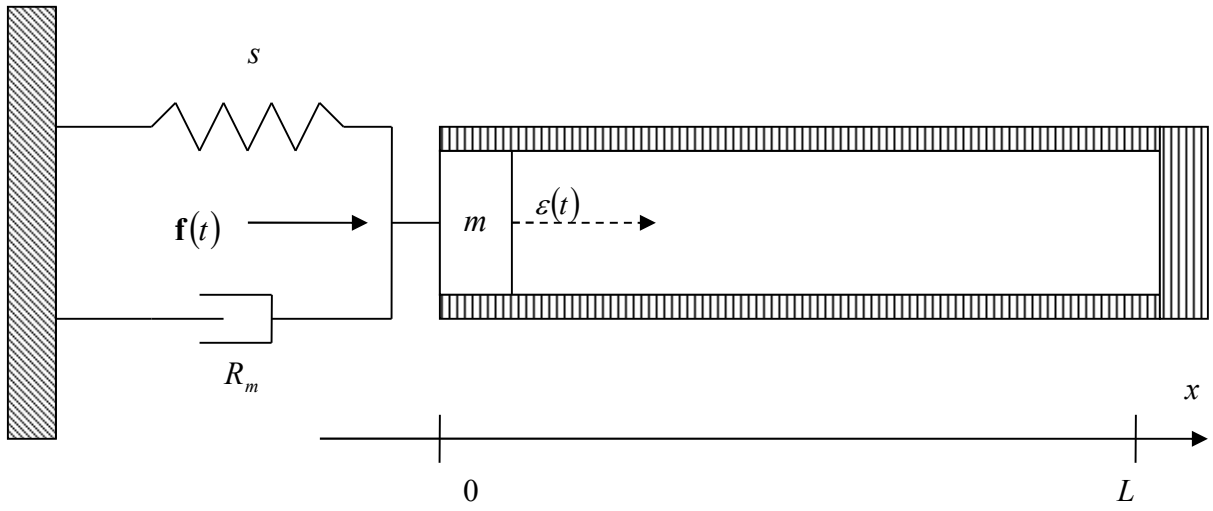

Figura 5.6. Sistema Excitador Tubo

Si la velocidad de la masa debe ser igual a la de partículas en $x = 0$ entonces:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \mathbf{u}(0,t) \tag{5.95}$$

$\mathbf{u}(0,t)$: Velocidad de partículas

Entonces podemos re escribir si $\varepsilon = \varepsilon^{j\omega t}$

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = j\omega\mathbf{u}(0,t) \tag{5.96}$$

$$\varepsilon = \frac{-j}{\omega}\mathbf{u}(0,t) \tag{5.97}$$

Reemplazando

$$\left[R_m + j\left(\omega m - \frac{s}{\omega}\right) + S\frac{\mathbf{p}(0,t)}{\mathbf{u}(0,t)}\right]\mathbf{u}(0,t) = \mathbf{f}(t) \tag{5.98}$$

$\mathbf{Z_{md}}$ Impedancia mecánica de entrada del excitador

$$\mathbf{Z_{md}} = R_m + j\left(\omega m - \frac{s}{\omega}\right) \tag{5.99}$$

$\mathbf{Z_{m0}}$ Impedancia mecánica de entrada del tubo

$$\mathbf{Z_{m0}} = S\frac{\mathbf{p}(0,t)}{\mathbf{u}(0,t)} \tag{5.100}$$

Entonces

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{Z_m}\mathbf{u}(0,t) = (\mathbf{Z_{md}} + \mathbf{Z_{m0}})\mathbf{u}(0,t) \tag{5.101}$$

Frecuencia de resonancia del excitador

$$\Im m\{\mathbf{Z_{md}}\} = 0 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{s}{m}} \tag{5.102}$$

Frecuencia de resonancia del tubo

$$\Im m\{\mathbf{Z_{m0}}\} = 0 \tag{5.103}$$

Frecuencia de resonancia sistema combinado

$$\Im m\{\mathbf{Z_{md}} + \mathbf{Z_{m0}}\} = 0 \tag{5.104}$$

Supongamos terminación rígida en $x = L$ y con absorción

$$\omega m - \frac{s}{\omega} - S\rho_0 c \frac{\cos kL \cdot \sin kL}{\sin^2 kL + (\alpha L)^2 \cos^2 kL} = 0 \tag{5.105}$$

Como $c = \frac{\omega}{k}$ podemos expresar todo en función de kL

$$\frac{\cos kL \cdot \sin kL}{\sin^2 kL + (\alpha L)^2 \cos^2 kL} = akL - \frac{b}{kL} \tag{5.106}$$

$$a = \frac{m}{s\rho_0 L} \qquad a = \frac{masa \quad excitador}{masa \quad fluido \quad tubo} \tag{5.107}$$

$$b = \frac{sL}{s\rho_0 c^2} \qquad b = \frac{rigidez \quad excitador}{rigidez \quad fluido \quad tubo} \tag{5.108}$$

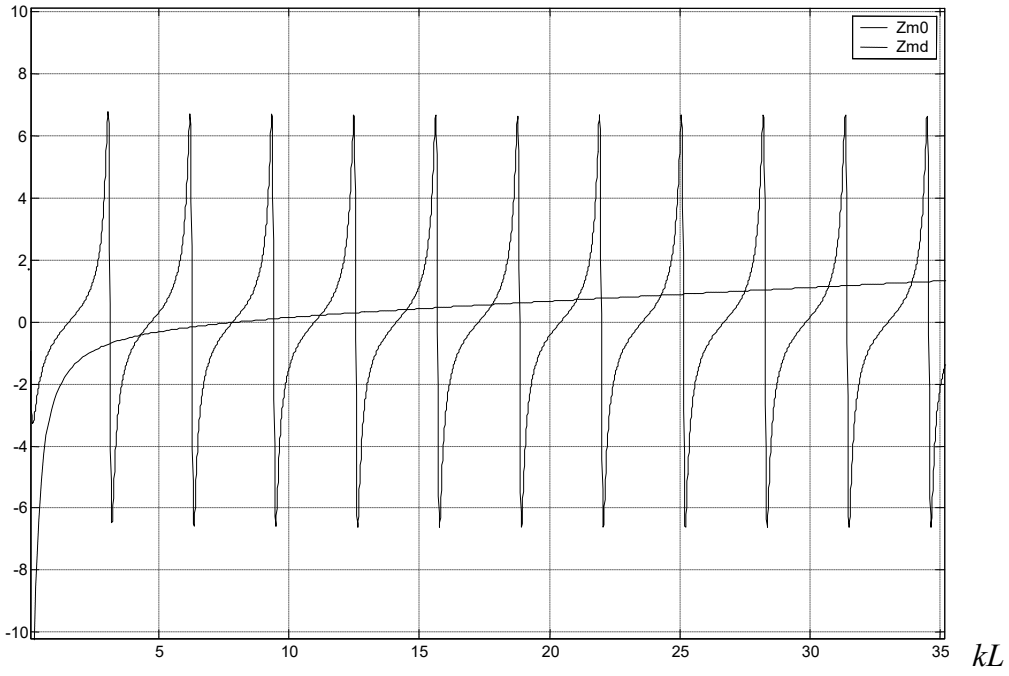

Figura 5.7. Solución gráfica para las frecuencias de resonancia para un tubo de 1m de longitud con un excitador flexible y liviano a = 0.04 y b = 2.57

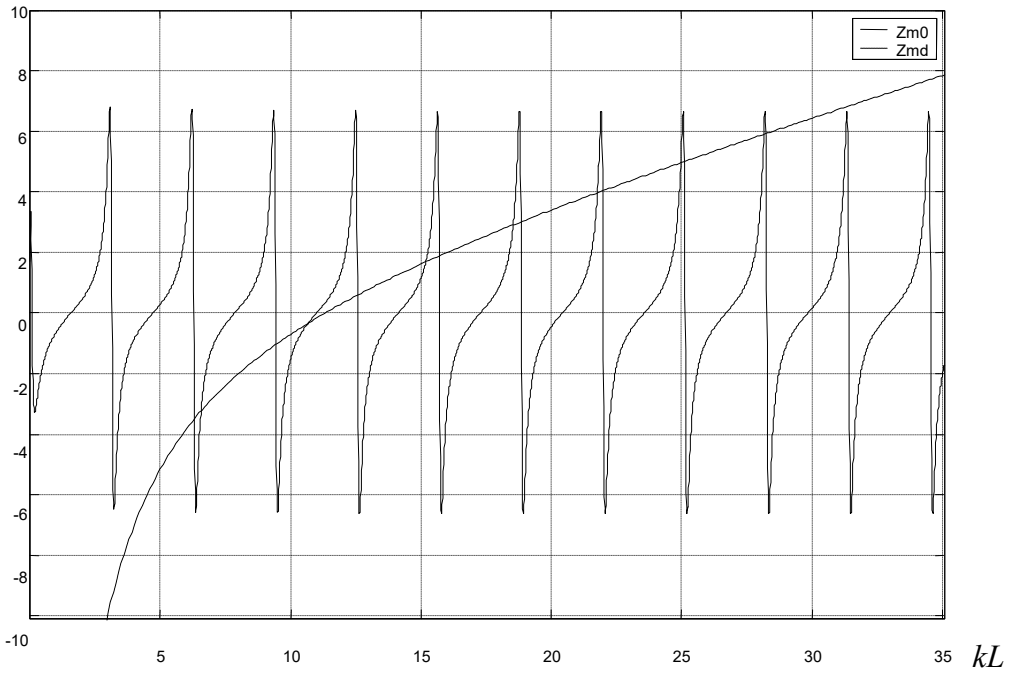

Figura 5.8. Solución gráfica para las frecuencias de resonancia para un tubo de 1m de longitud con un excitador rígido y pesado a = 0.25 y b = 32.0

Siempre existe antinodo en $x = L$

$$\mathbf{p}(x,t) = \mathbf{p}(0,t)\frac{\cos(\mathbf{k}(L-x))}{\cos \mathbf{k}L}e^{j\omega t} \tag{5.109}$$

Donde $\mathbf{p}(0,t)$ fue obtenido de $\mathbf{f}(t)$ y $\mathbf{Z}_{\mathbf{m}}$. Podemos evaluar la presión en $x = L$

$$\mathbf{p}(L,t) = \mathbf{p}(0,t)\frac{1}{\cos \mathbf{k}L} \tag{5.110}$$

Pero

$$\mathbf{p}(0,t) = \frac{\mathbf{Z}_{\mathbf{m0}}\mathbf{u}(0,t)}{S} \tag{5.111}$$

$$\mathbf{u}(0,t) = \frac{\mathbf{f}(t)}{\mathbf{Z}_{\mathbf{m}}} \tag{5.120}$$

$$\mathbf{p}(0,t) = \frac{\mathbf{Z}_{\mathbf{m0}}}{\mathbf{Z}_{\mathbf{m}}}\frac{\mathbf{f}(t)}{S} \tag{5.112}$$

$$\mathbf{p}(0,t) = \frac{\mathbf{Z_{m0}}}{\mathbf{Z_m}} \frac{F}{S} e^{j\omega t} \tag{5.113}$$

$$\mathbf{p}(L,t) = \frac{F}{S} \frac{\mathbf{Z_{m0}}}{\mathbf{Z_m}} \frac{e^{j\omega t}}{\cos \mathbf{k}L} \tag{5.114}$$

La amplitud de presión $P(L)$ extremo rígido $\alpha L << 1$

$$P(L) = \rho_0 c \frac{F}{|\mathbf{Z_m}|} \frac{1}{\sqrt{sen^2(kL) + (\alpha L)^2 \cos^2(kL)}} \tag{5.115}$$

5.7 LA CAVIDAD RECTANGULAR

La ecuación de onda es

$$\nabla^2 \mathbf{p} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} \tag{5.116}$$

Condiciones de contorno implican que la componente normal de la velocidad de partículas debe ser cero en las paredes

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \tag{5.117}$$

Podemos relacionar la presión con la velocidad de partículas

$$\vec{\mathbf{u}} = \frac{j}{\omega \rho_0} \nabla \mathbf{p} \tag{5.118}$$

Entonces

$$\frac{j}{\omega \rho_0} \nabla \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \tag{5.119}$$

Explicitamente

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=0} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=Lx} = 0 \tag{5.120}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{y=Ly} = 0 \tag{5.121}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_{z=0} = \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_{z=Lz} = 0 \tag{5.122}$$

Usaremos la solución armónica

$$\mathbf{p}(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)e^{j\omega t} \tag{5.123}$$

Esto nos divide el problema en tres ecuaciones

$$\frac{d^2x}{dx^2} + k_x^2 X = 0 \tag{5.124}$$

$$\frac{d^2y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0 \tag{5.125}$$

$$\frac{d^2z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0 \tag{5.126}$$

$$k^2 = \left(\omega/c\right)^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \tag{5.127}$$

Las funciones que cumplen las tres ecuaciones

$$\mathbf{p_{lmn}}(x,y,z,t) = \mathbf{A_{lmn}}\cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z)e^{j\omega_{lmn}t} \tag{5.128}$$

donde

$$k_{xl} = \frac{l\pi}{Lx} \qquad l = 0,1,2,... \tag{5.129}$$

$$k_{ym} = \frac{m\pi}{Ly} \qquad m = 0,1,2,... \tag{5.130}$$

$$k_{zn} = \frac{n\pi}{Lz} \qquad n = 0,1,2,... \tag{5.131}$$

Las frecuencias naturales

$$\omega_{lmn} = c\sqrt{\left(\frac{l\pi}{Lx}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{Ly}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{Lz}\right)^2} \tag{5.132}$$

$$f_{lmn} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{l}{Lx}\right)^2 + \left(\frac{m}{Ly}\right)^2 + \left(\frac{n}{Lz}\right)^2} \tag{5.133}$$

$$\mathbf{p_{lmn}}(x,y,z,t) = \frac{1}{8}\mathbf{A_{lmn}} \sum_{\pm permutación} e^{j\left(\omega t \pm k_{xl}x \pm k_{ym}y \pm k_{zn}z\right)} \tag{5.134}$$

Dicha solución puede interpretarse como la superposición de 8 ondas viajeras

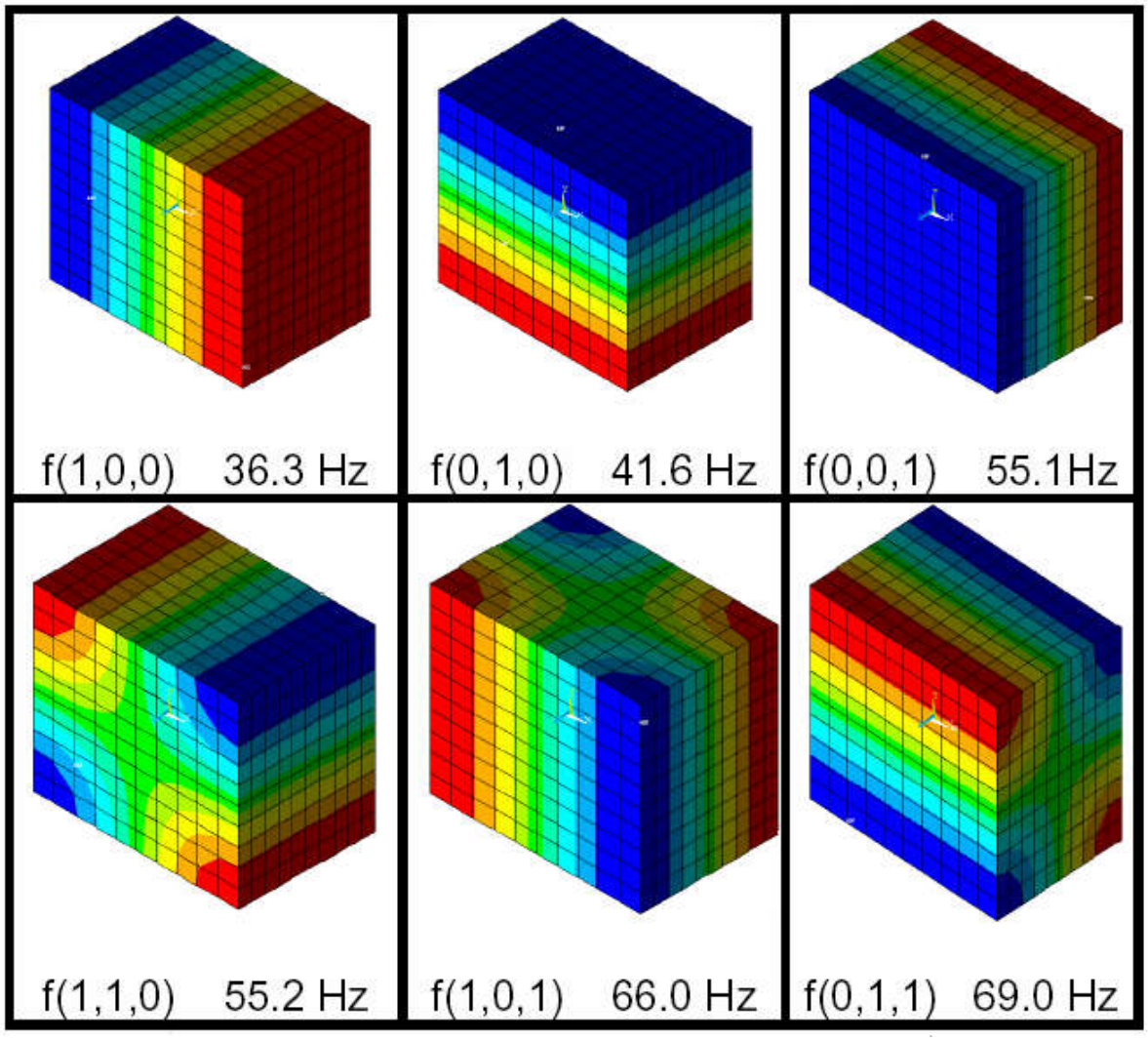

Figura 5.9. Modos Normales de Vibración

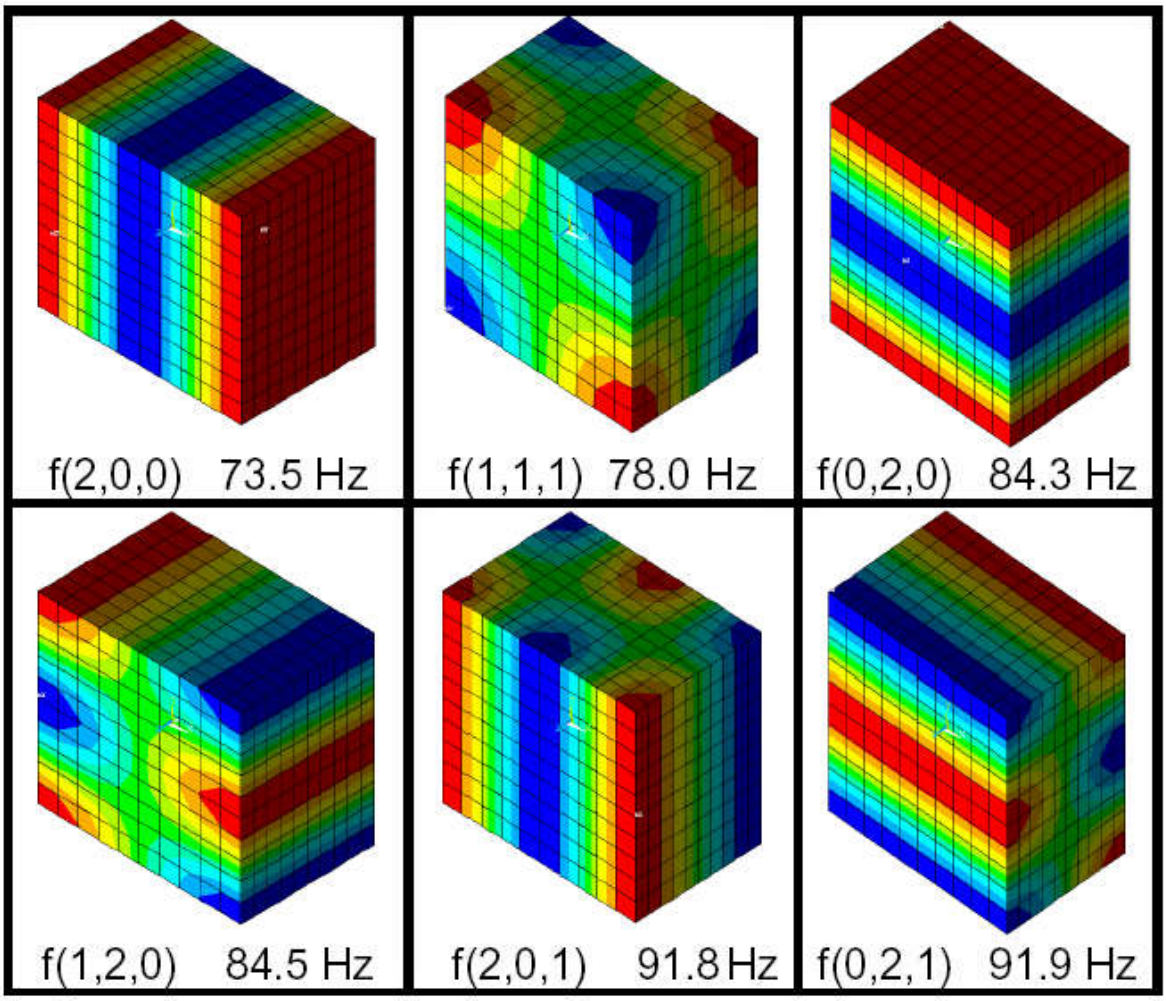

Figura 5.10. Modos Normales de Vibración

5.8 LA GUÍA DE ONDAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL CONSTANTE

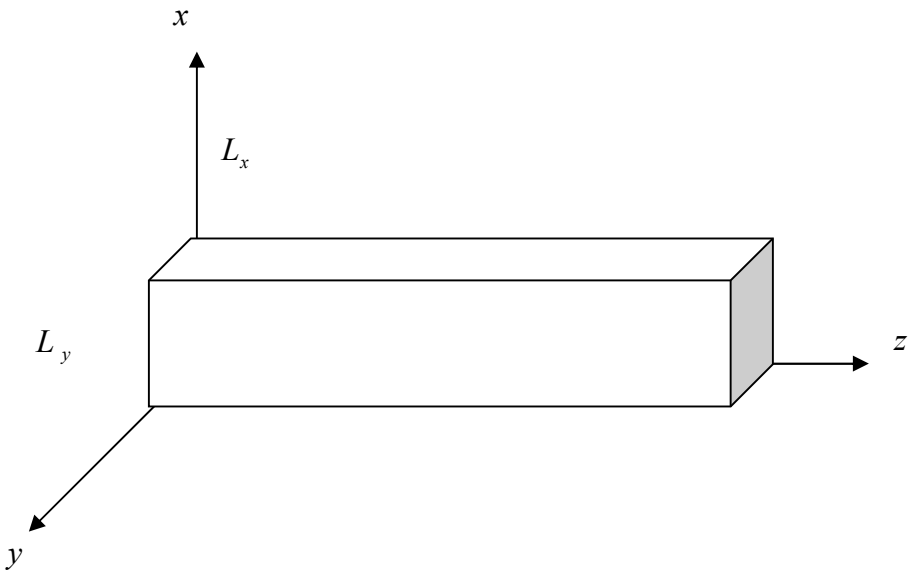

Figura 5.11. Guía de Ondas Rectangular

Una guía de ondas de sección transversal rectangular constante con fronteras rígidas, puede tener soluciones del tipo :

$$\mathbf{p_{lm}}(x,y,z,t) = \mathbf{A_{lm}}\cos(k_{xl}x)\cos(k_{ym}y)e^{j(\omega t - k_z z)} \tag{5.135}$$

Donde

$$\left(\omega/c\right)^2 = k^2 = k_{lx}^2 + k_{my}^2 + k_z^2 \tag{5.136}$$

Luego

$$k_z = \sqrt{\left(\omega/c\right)^2 - k_{lx}^2 - k_{my}^2} \tag{5.137}$$

Ahora ω puede ser cualquier valor, no como en la cavidad rectangular

$\vec{k}$ no es fijo
k_z no es fijo

Podemos, entonces, escribir

$$k_{lm} = \sqrt{k_{lx}^2 + k_{my}^2} \tag{5.138}$$

Entonces

$$k_z = \sqrt{\left(\omega/c\right)^2 - k_{lm}^2} \tag{5.139}$$

Tenemos tres casos

Caso 1

Cuando $\omega/c > k_{lm} \rightarrow k_z \in \Re$ (5.140)

Onda avanza en la dirección $+z$. ***Modo de propagación.***

Caso 2

Cuando $\omega/c = k_{lm} \rightarrow k_z = 0$ (5.141)

Frecuencia de Corte $\omega_{lm} = ck_{lm}$ para el modo (l, m).

Caso 3

Cuando $\omega/c < k_{lm} \rightarrow k_z \in \Im$

$$k_z = \pm j\sqrt{k_{lm}^2 - \left(\omega/c\right)^2} \tag{5.142}$$

Tomamos signo menos para que $p \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \infty$.

$$\mathbf{p_{lm}}(x, y, z, t) = \mathbf{A_{lm}} \cos(k_{xl}x)\cos(k_{ym}y)\exp\left(-z\sqrt{k_{lm}^2 - \left(\omega/c\right)^2}\right)e^{j\omega t} \tag{5.143}$$

Modo Desvanescente: onda estacionaria que decae exponencialmente con z. No se propaga energía sonora.

Si $\omega < \omega_{lm}$ modo desvanescente (y modos superiores.)

Si $\omega > \omega_{lm}$ modo propagación.

Existen solamente ondas planas si $f < f_c = \frac{1}{2}\frac{c}{L}$ (5.144)

L: Mayor dimensión.

Velocidad de Fase

$$c_p = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\sqrt{\left(\omega/c\right)^2 k_{lm}^2}} \tag{5.145}$$

$$c_p = \frac{c/k}{\sqrt{k^2 - k_{lm}^2}} \tag{5.146}$$

$$c_p = \frac{c}{\sqrt{1-\left(k_{lm}/k\right)^2}} \tag{5.147}$$

$$c_p == \frac{c}{\sqrt{1-\left(\omega_{lm}/\omega\right)^2}} \tag{5.148}$$

La solución exponencial compleja

$$\mathbf{p_{lm}}(x,y,z) = \frac{1}{4}\mathbf{A_{lm}}\sum_{\pm} e^{j\left(\omega t \pm k_{xl}x \pm k_{ym}y - k_z z\right)} \tag{5.149}$$

El vector de propagación hace un ángulo en el eje z

$$\cos(\theta) = \frac{k_z}{k} = \frac{\sqrt{\left(\omega/c\right)^2 - k_{lm}^2}}{\omega/c} \tag{5.150}$$

$$\cos(\theta) = \sqrt{1-k_{lm}^2/k^2} \tag{5.151}$$

$$\cos(\theta) = \sqrt{1-\left(\omega_{lm}/\omega\right)^2} \tag{5.152}$$

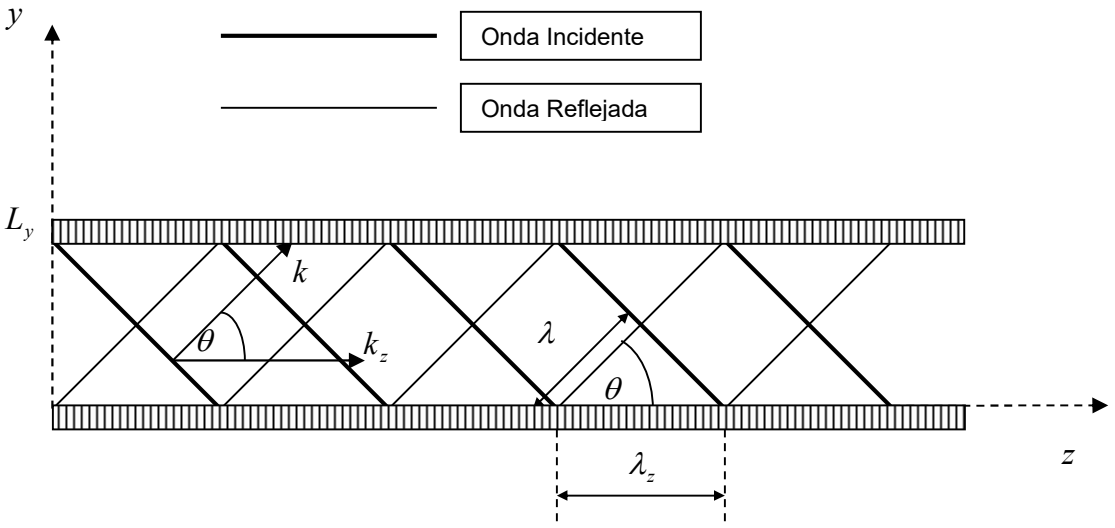

Figura 5.12. Guía de Ondas Rectangular Ondas Incidentes y Reflejadas

Podemos redefinir la ***Velocidad de Fase*** como

$$c_p = \frac{c}{\cos(\theta)} \tag{5.153}$$

Las ondas planas se cancelan en $\frac{L_y}{2}$ (5.154)

Plano nodal en $\frac{L_y}{2}$. Se define ***Longitud de Onda Aparente***

$$\lambda_z = \frac{\lambda}{\cos(\theta)}. \tag{5.155}$$

Para el modo más bajo (0,0) $k_z = k$. Las 4 ondas se colapsan en una sola que viaja por el eje $+z$.

Para

$\omega >> \omega_{lm}$	$\theta \approx 0°$	Onda plana normal
$\omega > \omega_{lm}$	θ	La onda tiene una dirección oblicua
$\omega < \omega_{lm}$	$\theta > 90°$	La onda se propaga hacia atrás, hacia la fuente.
$\omega = \omega_{lm}$	$\theta = 90°$	No hay propagación

El parámetro que describe la propagación de la energía es llamado ***Velocidad de Grupo.***

$$c_g = \frac{d\omega}{dk_z} \tag{5.156}$$

g es dada por la componente $\vec{c}$ que viaja por el eje de la guía de onda.

$$g = c\cos(\theta) = c\sqrt{1 - \left(\omega_{lm}/\omega\right)^2} \tag{5.157}$$

Para $\omega > \omega_{lm}$ tiene sus propios de c_p y c_g.

Para el modo (0,0) $c_p = c_g = c$, por lo tanto las ondas son planas.

Como condición de frontera en $z = 0$ se debe conocer

$\mathbf{p}(x, y, 0, t)$	Presión
$\bar{\mathbf{u}}(x, y, 0, t) \cdot \hat{\mathbf{z}}$	Componente z de la velocidad de partícula

Por ejemplo

$$\mathbf{p}(x,y,0,t) = P(x,y)e^{j\omega t} \tag{5.158}$$

pero la solución general es

$$\mathbf{p}(x,y,z,t) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{A_{lm}} \cos(k_{xl}x)\cos(k_{ym}y)e^{j(\omega t - k_z z)} \tag{5.159}$$

Reemplazando en $z = 0$

$$\mathbf{p}(x,y) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_{lm} \cos(k_{xl}x)\cos(k_{ym}y) \tag{5.160}$$

Se resuelve una serie de Fourier doble. No se desarrollarán más detalles aquí.

Sea un pulso bien definido en un solo modo que se propaga en la guía de ondas $f(t)$. Usando transformada de Fourier

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{5.161}$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{5.162}$$

Entonces

$$\mathbf{p}(x,y,z,t) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{A_{lm}} \cos(k_{xl}x)\cos(k_{ym}y)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{j\omega t}\right)e^{-jk_z(\omega)z}d\omega \tag{5.163}$$

Podemos reunir los términos de exponencial compleja

$$\mathbf{p}(x,y,z,t) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{A_{lm}} \cos(k_{xl}x)\cos(k_{ym}y)\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{j(\omega t - k_z(\omega)z)}d\omega \tag{5.164}$$

Debido a la fase dependiente de la frecuencia, el pulso cambiará de forma cuando viaje por el eje z.

Si el pulso está bien definido, $g(\omega)$ varía ligeramente.

La porción del integrando que más contribuye es para la cual el exponente es casi constante en la frecuencia. Para otros valores de frecuencia la fase del integrando varía rápidamente de tal manera que los ciclos se cancelan.

Entonces, la condición descrita es fase constante.

$$\frac{d}{d\omega}\left(\omega t - k_z(\omega) z\right) = 0 \tag{5.165}$$

$$t - \frac{dk_z}{d\omega} z = 0 \tag{5.166}$$

De donde vemos que

$$c_g = \frac{d\omega}{dk_z} \qquad \textbf{\textit{Velocidad de Grupo}} \tag{5.167}$$

$$c_p = \frac{\omega}{k_z} \qquad \textbf{\textit{Velocidad de Fase}} \tag{5.168}$$

Se debe considerar

$f(t)$ pulso tipo onda senoidal que aparece en $t = 0$.

Fuente excita un solo modo.

$g(\omega)$ banda contínua en un intervalo.

Cada frecuencia viaja con distinta c_p. La forma de onda cambia.

La primera señal llega a $t = z/c$ por la trayectoria más corta y es de fecuencia más alta.

A t grande la guía de ondas $\rightarrow$ estado estacionario “monofrecuencial” a la frecuencia portadora ω.

Tiempos intermedios amplitud creciente, periodo $t = z/c_g \rightarrow P_{ENVOLVENTE} = P/2$

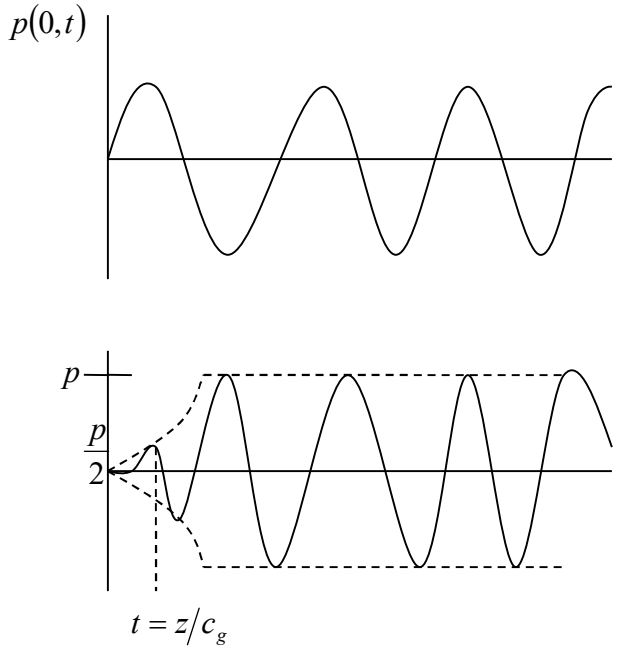

Figura 5.13. Guía de Ondas Rectangular Propagación de Transientes

Para una guía de ondas circular de radio a :

$$p_{ml}(r,\theta,z,t) = \mathbf{A_{ml}} J_m(k_{lm} r)\cos(m\theta) e^{j(\omega t - k_z z)} \tag{5.169}$$

J_m : función de Bessel en coordenadas cilíndricas

$$k_z^2 : \left(\omega/c\right)^2 - k_{ml} \tag{5.170}$$

k_{ml} está determinada por la condición de frontera.

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla \mathbf{p} = 0 \qquad r = a \tag{5.171}$$

$$k_{ml} = \frac{j'_{ml}}{a} \tag{5.172}$$

j'_{ml} : Ceros de $\dfrac{dJ_m(z)}{dz}$ (5.173)

Y seguimos un procedimiento análogo para rectangular.

Ejemplo: modo (0,0) $c_p = c \ \ \forall$ onda.

El modo no plano con la frecuencia de corte más baja es el modo (1,1) modo de salpicadura.

$$\omega_{1,1} = 1.84 \frac{c}{a} \tag{5.174}$$

$$f_{1,1} \approx \frac{101}{a} \qquad \textbf{\textit{Aire}} \tag{5.175}$$

$$f < f_{1,1} \qquad \textbf{\textit{Ondas Planas}} \tag{5.176}$$