CAPÍTULO I
ECUACIÓN DE ONDAS SONORAS
FORMULACIÓN DIFERENCIAL

1. ECUACIÓN DE ONDAS SONORAS: FORMULACIÓN DIFERENCIAL

1.1. INTRODUCCION

El objetivo de este capítulo es presentar al lector aquellos elementos fundamentales que determinan la construcción de un modelo matemático asociado a la transmisión de ondas sonoras y las variables que intervienen en dicho modelo. Esto implica establecer las relaciones constitutivas, cinemáticas y aquellas asociadas a la conservación de la masa.

A partir de esto se determinará la ecuación de onda sonora y sus soluciones más simples, es decir ondas armónicas planas y ondas esféricas. Si bien estas son soluciones que corresponden a casos ideales, es importante destacar su tremenda validez para muchas aplicaciones en sonido y acústica.

Una restricción importante en este libro es que no se tratarán aspectos relacionados con infra y ultrasonido, así mismos fenómenos no lineales como son las ondas sonoras de alta intensidad y ondas de choque. Además, gran parte de los fenómenos, modelos y ejemplos a estudiar se desarrollarán en procesos de propagación sonora en el aire.

Entonces se definen los siguientes conceptos $\mathbf{x}$, la posición de equilibrio de una partícula de fluido en (x, y, z), $\boldsymbol{\xi}$ es el desplazamiento de la partícula de su posición de equilibrio y $\mathbf{u}$ la velocidad de partículas. Todos ellos definidos por las siguientes ecuaciones

$$\mathbf{x} = [x \quad y \quad z]^T \tag{1.001}$$

$$\boldsymbol{\xi} = [\xi_x \quad \xi_y \quad \xi_z]^T \tag{1.002}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + u_z\hat{z} = [u_x \quad u_y \quad u_z]^T \tag{1.003}$$

Considerando que en la mayoría de los casos de propagación sonora el flujo es irrotacional es válido definir el potencial de velocidad que está relacionado con la velocidad de partículas mediante la ecuación

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi \tag{1.004}$$

Finalmente entenderemos c como la velocidad de fase de la onda que depende de las carácterísticas del medio. Por otra parte, consideraremos el término partícula de fluido o simplemente partícula como el elemento de volumen lo suficientemente grande para contener millones de moléculas y pensar en el fluido como un elemento continuo, y sin embargo tan pequeño que se puede considerar que todas las variables acústicas son casi constantes en todo el elemento de volumen. ($dV = dxdydz$, en coordenadas cartesianas).

Se entenderá el concepto de onda de amplitud pequeña como aquellas donde los cambios de densidad son casi despreciables comparados con su valor de equilibrio. Y problemas interiores y exteriores, donde se considerará el dominio Ω, el contorno Γ y el vector normal $\hat{\mathbf{n}}$ en forma genérica, como muestran la figura (1.1). El problema interior está orientado a los casos donde la propagación sonora se desarrolla dentro de ciertos límites. Los problemas exteriores corresponden al caso contrario.

Ω	Dominio (1D, 2 D y 3D)	
$d\Omega = dV = dxdydz$	Elemento de Volumen	
$d\Omega = dS = dxdy$	Elemento de Superficie	(1.005)
$d\Omega = dC = dx$	Elemento de Curva	
$d\Gamma$	Elemento de Contorno	
$\hat{\mathbf{n}} = n_x\hat{x} + n_y\hat{y} + n_z\hat{z}$	Vector Normal al Contorno	

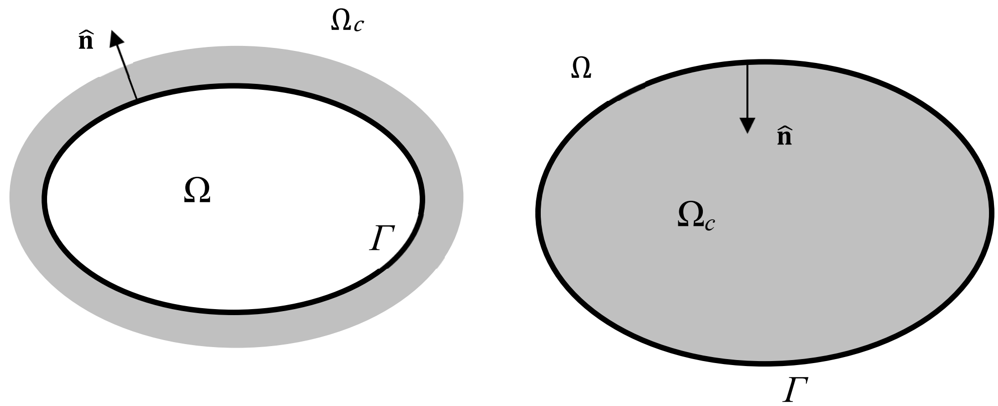

Figura 1.1. Problema Interior y problema exterior

1.2. RELACIÓN CONSTITUTIVA - ECUACION DE ESTADO

Las relaciones constitutivas generalmente se denominan ecuaciones de estado La ecuación de estado de un fluido relaciona las fuerzas restauradoras internas con las deformaciones correspondientes. En el caso de un gas perfecto existen diversas formas de expresar este proceso, en términos generales tenemos la ecuación de estado de un gas perfecto (1.006)

$$\mathcal{P} = \rho r T_K \tag{1.006}$$

Donde T_K es la temperatura en grados Kelvin y T es la temperatura en grados Celsius (1.007). Además ρ es la densidad instantánea en cualquier punto del fluido, es la densidad de equilibrio constante del fluido y s es la condensación en cualquier punto del fluido. Estas se relacionan mediante la ecuación (1.008).

$$T = 273.15 + T_K \tag{1.007}$$

$$s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \tag{1.008}$$

Por otra parte P es la presión instantánea en cualquier punto del fluido, P_0 es la presión de equilibrio constante en el fluido y p la presión sonora. La relación entre estas es:

$$p = \mathcal{P} - \mathcal{P}_0 \tag{1.009}$$

La cantidad r es una constante que depende del gas. En el caso de que el proceso se lleve a cabo a temperatura constante tenemos la ecuación de estado isotérmica:

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \tag{1.010}$$

Con respecto a la termodinámica, la fluctuación de la presión y, por lo tanto, la propagación del sonido ocurre con un flujo de calor insignificante porque los cambios de estado ocurren muy rápidamente, tanto que no hay tiempo para que la temperatura se iguale con el medio circundante. Esta es la propiedad fundamental de un proceso adiabático. Si fluctuaciones de amplitudes son lo suficientemente pequeñas, el proceso puede considerarse reversible e isoentrópico.

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \tag{1.011}$$

Donde γ es la razón de calores específicos. Expandiendo en serie de Taylor, la presión en función de la densidad queda

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 + \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}\right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial \rho^2}\right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 + \left(\frac{\partial^3 \mathcal{P}}{\partial \rho^3}\right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^3 + \cdots \tag{1.012}$$

Pero como las variaciones son pequeñas los términos de orden superior se desprecian

$$\left(\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial \rho^2}\right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 \approx 0 \tag{1.013}$$

$$\left(\frac{\partial^3 \mathcal{P}}{\partial \rho^3}\right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^3 \approx 0 \tag{1.014}$$

Reordenando y conservando solamente la parte lineal tenemos

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 + \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}\right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) \tag{1.015}$$

$$\mathcal{P} - \mathcal{P}_0 = \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}\right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) \tag{1.016}$$

Multiplicando y dividiendo por ρ_0 en el segundo miembro tenemos

$$\mathcal{P} - \mathcal{P}_0 = \rho_0 \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}\right)_{\rho_0} \frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0} \tag{1.017}$$

Si las fluctuaciones son pequeñas, se necesitan solamente los términos de más bajo orden y la relación que se obtiene es lineal

$$\mathcal{P} - \mathcal{P}_0 = \mathcal{B} \frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0} \tag{1.018}$$

Donde $\mathfrak{B}$ es el módulo adiabático de volumen

$$\mathcal{B} = \rho_0 \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}\right)_{\rho_0} \quad (1.019)$$

En términos de la presión acústica y la condensación la ecuación de estado adiabática se puede expresar como la ecuación de estado linealizada

$$p = \mathcal{B}s \quad (1.020)$$

1.3. CONSERVACIÓN DE LA MASA - ECUACION DE CONTINUIDAD

La Ecuación de Continuidad: relaciona el movimiento de un fluido con su compresión y dilatación. Es una relación funcional entre la velocidad de partícula $\mathbf{u}$, y la densidad instantánea ρ.

Se debe considerar un Elemento de Volumen, paralelepípedo rectangular de volumen $dV = dxdydz$ fijo en el espacio donde viajan las partículas de fluido.

La rapidez neta con que la masa fluye a través de la superficie debe ser igual a la rapidez con que aumenta la masa dentro del volumen.

$$\left\{\rho u_x - \left[\rho u_x + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx\right]\right\} dydz = -\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dV \quad (1.021)$$

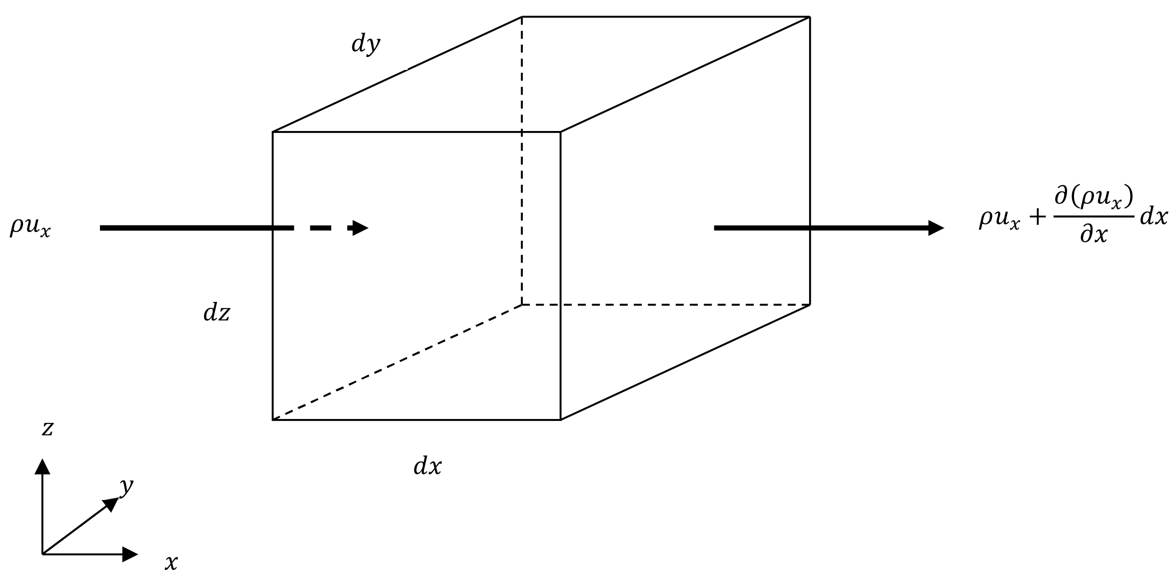

Figura 1.2. Flujo de Masa a través de una partícula de fluido

Similarmente para las componentes $y\,z$ de la velocidad del fluido

$$\left\{\rho u_y - \left[\rho u_y + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} dy\right]\right\} dxdz = -\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} dV \quad (1.022)$$

$$\left\{\rho u_z - \left[\rho u_z + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}dz\right]\right\}dxdy = -\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}dV \tag{1.023}$$

Resumiendo, la rapidez neta con que la masa fluye a través de la superficie en el volumen es

$$-\left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\right] \equiv -[\nabla \cdot (\rho \quad \mathbf{u})] \tag{1.024}$$

donde $\nabla \cdot (\quad)$es el operador divergencia

La rapidez neta con que la masa aumenta en el volumen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}dV \tag{1.025}$$

Igualamos y obtenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}dV = -[\nabla \cdot (\rho \quad \mathbf{u})]dV \tag{1.026}$$

Simplificamos dVpasamos todo hacia un lado y obtenemos la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + [\nabla \cdot (\rho \quad \mathbf{u})] = 0 \tag{1.027}$$

Si consideramos el hecho que los cambios de densidad son pequeños

$$\rho = \rho_0(1 + s) \tag{1.028}$$

Reemplazando en la ecuación (1.027)

$$\frac{\partial[\rho_0(1 + s)]}{\partial t} + [\nabla \cdot (\rho_0(1 + s)\mathbf{u})] = 0 \tag{1.029}$$

Desarrollando

$$(1 + s)\frac{\partial[\rho_0]}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial[(1 + s)]}{\partial t} + [\nabla \cdot (\rho_0(1 + s)\mathbf{u})] = 0 \tag{1.030}$$

Como la derivada de una constante es nula, podemos eliminar y simplificar términos como en las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial[\rho_0]}{\partial t} = 0 \tag{1.031}$$

$$\frac{\partial[(1 + s)]}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t} \tag{1.032}$$

Además $|s| << 1$, entonces $(s + 1) \approx 1$, por lo tanto, podemos intervenir el la ecuación de continuidad y linealizarla de tal forma que se tiene

$$[\nabla \cdot (\rho_0(1 + s)\mathbf{u})] \approx [\nabla \cdot (\rho_0(1)\mathbf{u})] = [\nabla \cdot (\rho_0\mathbf{u})] = \rho_0\nabla \cdot \mathbf{u} \tag{1.033}$$

Obtenemos

$$\rho_0 \frac{\partial s}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1.034}$$

Simplificamos ρ_0 para llegar a la ecuación de continuidad linealizada

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1.035}$$

1.4. RELACIÓN CINEMÁTICA - ECUACION DE FUERZA SIMPLE DE EULER

Considérese un elemento de fluido $dV = dxdydz$ que se mueve con el fluido con una velocidad $\mathbf{u}$ y que contiene una masa $dm = \rho dV$.Entonces aplicando la Segunda Ley de Newton

$$d\mathbf{f} = \mathbf{a}dm \tag{1.036}$$

$d\mathbf{f}$: Fuerza Neta
$\mathbf{a}$: Aceleración

Calcularemos inicialmente la fuerza neta. Recordemos que de modo genérico la relación entre fuerza y presión está dada por la ecuación (1.037) que relaciona ambas a partir del área

$$f = \mathcal{P}A \tag{1.037}$$

En ausencia de viscosidad la componente x de la fuerza neta es

$$df_x = \left[\mathcal{P} - \left(P + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} dx\right)\right] dydz = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} dV \tag{1.038}$$

Usando igual razonamiento las otras componentes de la fuerza neta son

$$df_y = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} dV \tag{1.039}$$

$$df_z = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} dV \tag{1.040}$$

Como la fuerza total es el resultado de la suma vectorial de los tres componentes

$$d\mathbf{f} = df_x \hat{x} + df_y \hat{y} + df_z \hat{z} \tag{1.041}$$

Obtenemos

$$d\mathbf{f} = -\left[\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z}\hat{z}\right] dV \tag{1.042}$$

En notación compacta

$$d\mathbf{f} = \nabla \mathcal{P} dV \tag{1.043}$$

Donde $\nabla(\quad)$ es el operador gradiente.

Para calcular la aceleración deberemos considerar que la velocidad de partícula del elemento de fluido en un punto (x, y, z) en el tiempo t es dado por:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) \tag{1.044}$$

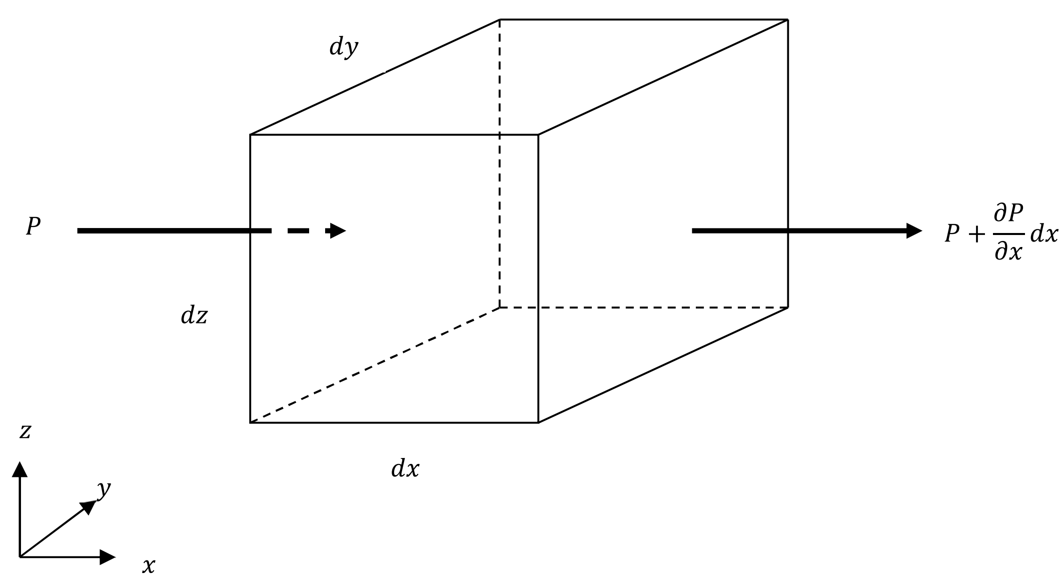

Figura 1.3. Fuerza Neta sobre la partícula de fluido

Cuando transcurre un instante de tiempo $t + dt$ el elemento de fluido se ha desplazado a una posición $(x + dx, y + dy, z + dz)$ y la velocidad es

$$\mathbf{u}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) \tag{1.045}$$

Por lo tanto, la aceleración es

$$\mathbf{a} = lim_{dt \to 0} \frac{\mathbf{u}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) - \mathbf{u}(x, y, z, t)}{dt} \tag{1.046}$$

Pero podemos relacionar los incrementos de posición con el tiempo y las componentes de velocidad

$$dx = u_x dt \tag{1.047}$$
$$dy = u_y dt \tag{1.048}$$
$$dz = u_z dt \tag{1.049}$$

Lo anterior corresponde a una linealización de la trayectoria de la partícula como se ve en la Figura 1.4. Como se está suponiendo que los incrementos son muy pequeños podemos expandir en serie de Taylor hasta el primer término

$$\mathbf{u}(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) = \mathbf{u}\big(x+u_x dt, y+u_y dt, z+u_z dt, t+dt\big) \qquad (1.050)$$

$$\mathbf{u}(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) = \mathbf{u}(x, y, z, t) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} u_x dt + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} u_y dt + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} u_z dt + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dt \qquad (1.051)$$

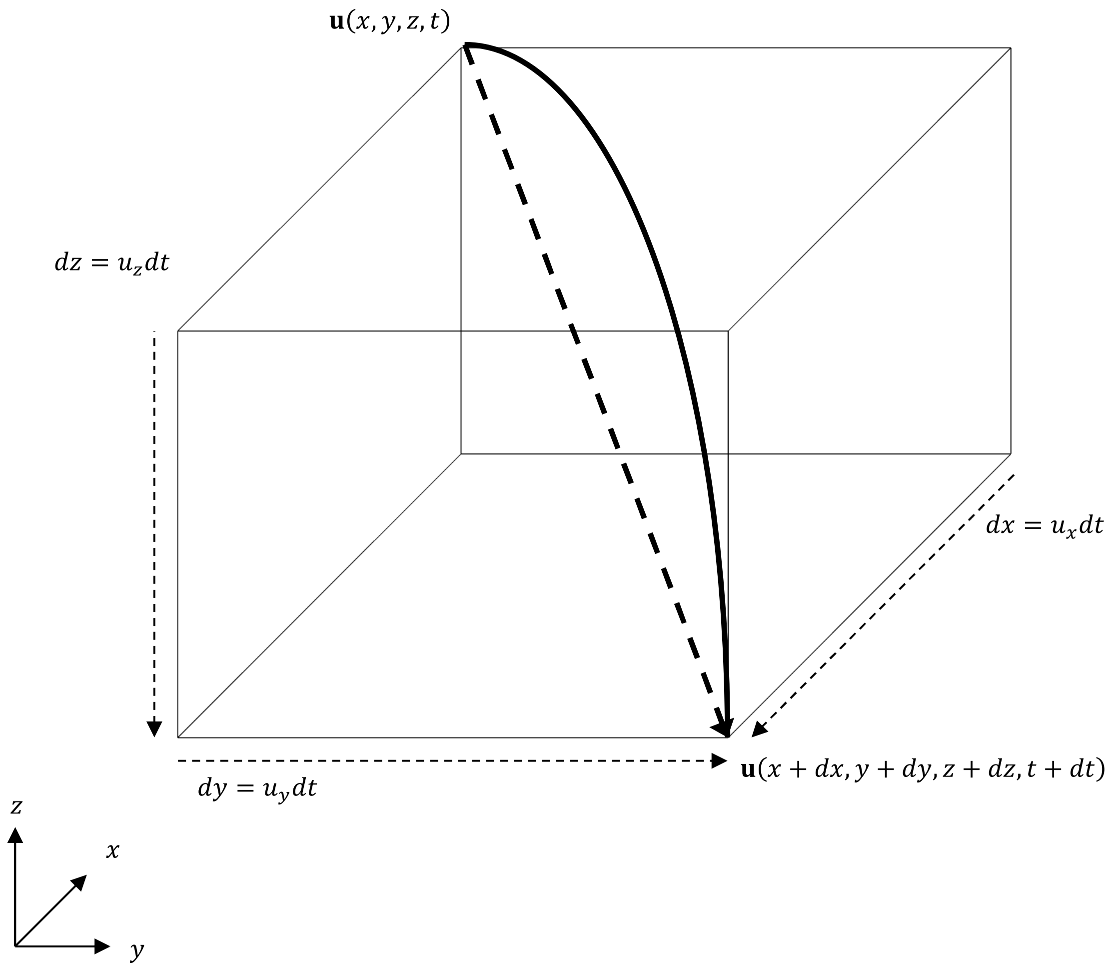

Figura 1.4. Linealización de la trayectoria de la velocidad de partículas

Reemplazamos

$$\mathbf{a} = lim_{dt\to 0} \frac{\mathbf{u}(x, y, z, t) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} u_x dt + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} u_y dt + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} u_z dt + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dt - \mathbf{u}(x, y, z, t)}{dt} \qquad (1.052)$$

Restamos términos semejantes y simplificamos dt y obtenemos

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} u_x + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} u_y + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} u_z + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \qquad (1.053)$$

Definimos el el operador vectorial como

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) = u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \qquad (1.054)$$

Entonces la aceleración se puede escribir más brevemente

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \tag{1.055}$$

$$dm = \rho dV \tag{1.056}$$

Entonces al usar la Segunda Ley de Newton tenemos

$$d\mathbf{f} = \mathbf{a}dm \tag{1.057}$$

$$-\nabla P dV = \rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}\right] dV \tag{1.058}$$

Simplificamos y obtenemos la ecuación de fuerza de Euler

$$-\nabla \mathcal{P} = \rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}\right] \tag{1.059}$$

Podemos considerar las siguientes simplificaciones

$$|s| << 1 \rightarrow \rho \approx \rho_0 \tag{1.060}$$

$$|(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}| << \left|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right| \tag{1.061}$$

Considerando que la componente estática (atmosférica) de la presión desaparece

$$\nabla \mathcal{P} = \nabla p \tag{1.062}$$

Obtenemos ecuación de fuerza no viscosa linealizada

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p \tag{1.063}$$

1.5. ECUACION DE ONDA ACÚSTICA: FORMULACIÓN FUERTE

Combinaremos la Ecuación de Estado, la Ecuación de Continuidad Linealizada y la Ecuación de Fuerza no Viscosa Linealizada

$$p = \mathcal{B}s \tag{1.064}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1.065}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p \tag{1.066}$$

Tomamos la divergencia en la ecuación de fuerza linealizada

$$\nabla \cdot \left(\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right) = \nabla \cdot (-\nabla p) \tag{1.067}$$

Intercambiamos divergencia y derivada temporal, debido a que ambos operadores son lineales y como la divergencia del gradiente es el operador laplaciano

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\nabla^2 p \tag{1.068}$$

Tomemos la derivada temporal de la ecuación de continuidad linealizada

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \tag{1.069}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \tag{1.070}$$

Igualamos los términos que tienen $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{u})$ entre sí

$$-\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla^2 p \tag{1.071}$$

Usando la ecuación de estado linealizada

$$s = \frac{p}{B} \tag{1.072}$$

$$\nabla^2 p = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\mathcal{B}}\right) \tag{1.073}$$

$$\nabla^2 p = \frac{\rho_0}{\mathcal{B}}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \tag{1.074}$$

Por lo tanto, tenemos la ecuación de onda linealizada

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \tag{1.075}$$

Y la velocidad de propagación del sonido se expresa como

$$c = \sqrt{\frac{\mathcal{B}}{\rho_0}} \tag{1.076}$$

La ecuación de estado linealizada se puede escribir en forma más conveniente como

$$p = \rho_0 c^2 s \tag{1.077}$$

Como la presión p y la condensación s son proporcionales esta última satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2 s = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \tag{1.078}$$

Por otra parte, como la condensación y la densidad instantánea ρ están relacionadas linealmente

$$\nabla^2 \rho = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \tag{1.079}$$

En virtud de que el rotacional del gradiente de una función es igual a cero se tiene que

$$\nabla \times \nabla f = 0 \tag{1.080}$$

Además, supondremos que no existen capas de frontera, vórtices ondas cortante y turbulencia, para los procesos acústicos de amplitud infinitesimal, entonces

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0 \tag{1.081}$$

Por lo tanto, existe una función escalar Φ llamada potencial de velocidad que satisface las ecuaciones (1.081), (1.082) y (1.083).

$$\nabla \times \nabla \Phi = 0 \tag{1.082}$$

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi \tag{1.083}$$

Si substituimos esta última ecuación en la ecuación de fuerza linealizada tenemos

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \Phi) = -\nabla p \tag{1.084}$$

Como podemos intercambiar la derivada temporal por el gradiente, ya que son funciones lineales

$$\nabla \left(\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = -\nabla p \tag{1.085}$$

Podemos reunir ambos términos en una sola ecuación

$$\nabla \left(\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p\right) = 0 \tag{1.086}$$

En ausencia de excitación acústica la cantidad entre paréntesis se puede hacer cero, entonces obtenemos la relación funcional entre presión sonora y potencial de velocidad

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{1.087}$$

Si la substituimos en la ecuación de onda con respecto a la presión sonora

$$\nabla^2 \left(-\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \left(-\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)}{\partial t^2} \tag{1.088}$$

$$-\rho_0 \nabla^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = -\rho_0 \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)}{\partial t^2} \tag{1.089}$$

Simplificamos la densidad de equilibrio y los signos negativos

$$\nabla^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)}{\partial t^2} \tag{1.090}$$

Intercambiamos operadores

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\Phi)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right) \tag{1.091}$$

Integrando con respecto al tiempo observamos que el potencial de velocidad satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \tag{1.092}$$

1.6. VELOCIDAD DEL SONIDO EN FLUIDOS

Combinando las ecuaciones anteriores veíamos que

$$c=\sqrt{\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\rho}\right)_{Adiabático}} \tag{1.093}$$

Para ondas acústicas ordinarias

$$\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\rho}\right)_{Adiabático}=\gamma\frac{\mathcal{P}_0}{\rho_0} \tag{1.094}$$

$$c=\sqrt{\gamma\frac{\mathcal{P}_0}{\rho_0}} \tag{1.095}$$

Considerando los valores normales del aire para $0\,^0C$ y presión atmosférica normal, $P_0=1.103\times10^5\,N/m^2$densidad de equilibrio $\rho_0=1.293\,kg/m^3$y $\gamma=1.402$ obtenemos la velocidad del sonido

$$c_0=\sqrt{1.402\frac{1.103\times10^5}{1.293}}=331.6\,m/s \tag{1.096}$$

Considerando la dependencia de la temperatura

$$c=c_0\sqrt{\frac{T_K}{273}} \tag{1.097}$$

$$c=c_0\sqrt{1+\frac{T}{273}} \tag{1.098}$$

Así dependiendo de diversos factores, como la temperatura, por ejemplo, la velocidad del sonido puede cambiar y en este caso el medio no es homogéneo

1.7. ONDAS ARMONICAS PLANAS Y ESFÉRICAS

Si todas las variables acústicas son funciones de una única coordenada espacial, la fase de cualquier es constante en cualquier superficie perpendicular a esta coordenada. A tal onda se le llama onda plana. Si se elige el sistema de coordenadas de tal forma que esta onda se propague por el eje x la ecuación de onda se reduce a:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \tag{1.099}$$

Donde

$$p = p(x,t) \tag{1.100}$$

La forma compleja de la solución armónica para la presión acústica de una onda plana, para sonido incidente y reflejado es

$$p(x,t) = Ae^{j(\omega t - kx)} + Be^{j(\omega t + kx)} \tag{1.101}$$

La ecuación de onda en coordenadas esféricas es:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial p}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \tag{1.102}$$

En el caso de que las ondas tengan simetría radial, esto es no dependen de los ángulos θ , ϕ , la ecuación de onda para campos de presión radialmente simétricos es

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \tag{1.103}$$

La conservación de la energía lleva a esperar que la amplitud de presión decaiga con una razón $1/r$, de tal manera que la cantidad rp pueda tener una amplitud independiente de r. Si se trata a rp como la variable dependiente, se puede reescribir la ecuación de onda como

$$\frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2} \tag{1.104}$$

Y la solución armónica es finalmente

$$p(r,t) = \frac{A}{r}e^{j(\omega t - kr)} \tag{1.105}$$

1.8. CONDICIONES INICIALES Y DE CONTORNO

No se puede considerar la ecuación de onda por si sola, esta debe ser entendida en conjunto con sus condiciones iniciales y de contorno. Las condiciones inciales se refieren a la presión inicial como también a la taza de cambio de presión inicial. Las condiciones de contorno expresan la descripción de los elementos existentes en la frontera donde la onda sonora se propaga. Entonces para un medio tenemos en primer lugar la ecuación de onda. Entonces para un punto $\mathbf{x}$ asociado con el dominio donde la onda se propaga Ω

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \tag{1.106}$$

La que comúnmente debe estar acompañada de las condiciones iniciales

$$p(\mathbf{x}, 0) = p_0(\mathbf{x}) \tag{1.107}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \dot{p}_0(\mathbf{x}) \tag{1.108}$$

Siendo estas dos últimas la distribución inicial de la presión sonora en el recinto y la segunda corresponde la razón de cambio de la presión cuando el tiempo es cero.

A partir de la ecuación (1.109) se puede describir el comportamiento de variadas condiciones de contorno, es decir puntos $\mathbf{x}$ pertenecientes a la frontera Γ. En este caso la condición de contorno generalizada, como se describe en las ecuaciones (1.109 – 1.110), implican en una primera aproximación, que las velocidades del fluido y del sólido en el contorno no son las mismas. Las respectivas simplificaciones que se tomarán a continuación nos llevarán a las diferentes condiciones de contorno

$$Z\left(\mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{u_s}}{\partial t}\right) \cdot \hat{\mathbf{n}} = p \tag{1.109}$$

O bien

$$\left(\mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{u_s}}{\partial t}\right) \cdot \hat{\mathbf{n}} = Yp \tag{1.110}$$

Con

$$Y = \frac{1}{Z} \tag{1.111}$$

$$\mathbf{u_s} = [u_{sx}(\mathbf{x}, t) \quad u_{sy}(\mathbf{x}, t) \quad u_{sz}(\mathbf{x}, t)]^T \tag{1.112}$$

Donde Z es la impedancia acústica específica, Y es la admitancia acústica específica, $\mathbf{u}$ es la velocidad de partículas del fluido y $\mathbf{u_s}$ es el desplazamiento del medio sólido que está en contacto con el fluido. En muchas situaciones el desplazamiento del sólido será considerado nulo. En general a partir de esta expresión se puede particularizar para los siguientes casos:

Condiciones de Contorno de Dirichlet

Si consideramos la impedancia del contorno como nula tenemos la condición de contorno de Dirichlet homogénea, la cual es conocida como liberación de presión para $\boldsymbol{x}_D \in \Gamma_{D_0}$

$$p(\mathbf{x}_D, t) = 0 \tag{1.113}$$

Si existe un valor pre escrito podemos reescribir para $\mathbf{x}_D \in \Gamma_D$

$$p(\mathbf{x}_D, t) = p_D \tag{1.114}$$

Este valor prescrito puede representarse como la presencia de una fuente sonora, que, si bien no está dentro del dominio, tiene influencia sobre el Sin embargo la implementación tanto de la condición de contorno de Dirichlet homogénea como de la no homogénea serán explicadas más adelante.

Condiciones de Contorno de Neumann

Si consideramos la admitancia del contorno como nula tenemos la condición de contorno de Neumman homogénea, esto significa que la componente normal de la velocidad de partículas del fluido en la frontera es nula y por lo tanto tenemos una condición de pared rígida. Entonces para un punto $\boldsymbol{x}_N \in \Gamma_{N0}$

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \tag{1.115}$$

Por otra parte, la ecuación de fuerza en régimen armónico

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x})e^{j\omega t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] = j\omega \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \tag{1.116}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u} = -\frac{1}{j\omega\rho_0}\nabla p \tag{1.117}$$

Tenemos

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{j\omega\rho_0}\nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \tag{1.118}$$

Entonces|

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u} = -\frac{1}{j\omega\rho_0}\nabla p \tag{1.119}$$

$$\nabla p(\boldsymbol{x}_N, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \tag{1.120}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \tag{1.121}$$

Por supuesto si la velocidad es pre escrita en el contorno tenemos para un punto $\boldsymbol{x}_N \in \Gamma_N$

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = u_n \tag{1.122}$$

Y podemos arreglar esto como

$$\nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} = -j\omega\rho_0 u_n \tag{1.123}$$

$$\nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} = w_n \tag{1.124}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -j\omega\rho_0 u_n \tag{1.125}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = w_n \tag{1.126}$$

Condiciones de Contorno de Robin

También es conocida como condición de contorno de impedancia, en este caso la situación se referirá a la impedancia acústica específica Z y a su recíproco la admitancia acústica específica $Y=1/Z$. A partir de la expresión general para punto $\mathbf{x}_R \in \Gamma_R$, es decir la región donde se consideran las condiciones de Robin

$$Z\left(\mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{u_S}}{\partial \mathrm{t}}\right) \cdot \hat{\mathbf{n}} = p \tag{1.127}$$

Donde $\mathbf{u_s}$ es el desplazamiento del sólido en el contorno. Considerando el desplazamiento del sólido en la frontera con el fluido $\mathbf{u}_{\mathrm{S}}$ nulo se tiene

$$Z\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = p \tag{1.128}$$

Usando la relación entre velocidad de partícula y presión sonora es

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{j\omega\rho_0}\nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{1.129}$$

$$p = -\frac{Z}{j\omega\rho_0}\nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{1.130}$$

$$\frac{j\omega\rho_0}{Z} p = -\nabla p \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \tag{1.131}$$

$$\nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} = -j\omega\rho_0 Y p \tag{1.132}$$

Obviamente estas regiones pertenecientes al contorno no se interceptan

$$\Gamma_D \cap \Gamma_{D0} \cap \Gamma_N \cap \Gamma_{N0} \cap \Gamma_R = \phi \tag{1.133}$$

Condiciones de Radiación de Sommerfield

Expresa el proceso de dispersión de la energía sonora en un proceso de propagación externa. La implementación de estas condiciones significará un capítulo aparte en este texto y se abordará con el específico detalle que merece. Este proceso puede ser resumido como

$$\lim_{r\to\infty}\left[r\left(\frac{\partial p}{\partial r} + jkp\right)\right] = \mathbf{0} \tag{1.134}$$