

CAPÍTULO III
ELEMENTOS FINITOS EN ACÚSTICA:
PROBLEMAS BIDIMENSIONALES

3. ELEMENTOS FINITOS EN ACÚSTICA: PROBLEMAS BIDIMENSIONALES

3.1. ECUACION DE ONDA BIDIMENSIONAL, CONDICIONES INICIALES Y DE CONTORNO

Es común en el área de los elementos finitos, el aprovechar ciertas simetrías que se pueden dar en un problema en cuestión. En este caso es posible encontrar problemas acústicos que posean simetría alrededor de un plano. Es decir, un problema de tres dimensiones es posible trabajarlo en dos, ahorrando un gran costo computacional. Como ejemplo tenemos recintos y salas que pueden ser simétricos en un plano o bien situaciones de propagación sonora en exteriores, como lo es el problema de barreras acústicas en carreteras.

En este capítulo nos dedicaremos a trabajar en la formulación integral o débil de la ecuación de onda en dos dimensiones y presentaremos aspectos asociados a la construcción de funciones de interpolación y a las matrices elementales. Así mismo presentaremos aplicaciones de esta formulación a problemas acústicos más complejos que pueden ser modelados bidimensionalmente.

Por supuesto es de interés de este texto presentar aplicaciones en membranas, especialmente cuando estas son excitadas por un campo sonoro, como una primera aproximación a los modelos de micrófonos; este caso será sujeto a diversas simplificaciones que serán parte de la discusión de los resultados presentados.

La ecuación de onda bidimensional y sus condiciones iniciales son:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.001)$$

$$\mathbf{x} = [x, y]^T \in S$$

$$p(\mathbf{x}, 0) = p_0(\mathbf{x}) \quad (3.002)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \dot{p}_0(\mathbf{x}) \quad (3.003)$$

Condiciones de Contorno de Dirichlet

La cual puede ser nula o tener valores prescritos

$$p(\mathbf{x}_D, t) = 0$$

$$\mathbf{x}_D \in C_{D_0}$$

$$p(\mathbf{x}_D, t) = p_D$$

$$\mathbf{x}_D \in C_D$$

(3.007)

Condiciones de Contorno de Neumann

Tenemos la condición de contorno de Neumann homogénea, esto significa que la componente normal de la velocidad de partículas del fluido en la frontera es nula y por lo tanto tenemos una condición de pared rígida

$$\nabla p(\mathbf{x}_N, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (3.008)$$

$$\mathbf{x}_N \in C_{N0}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0$$

$$\mathbf{x}_N \in C_{N0}$$

Si la componente normal de la velocidad en el contorno es conocida tenemos

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = u_n$$

$$\mathbf{x}_N \in C_N$$

$$\nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} = -j\omega\rho_0 u \quad (3.009)$$

$$\mathbf{x}_N \in C_N$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -j\omega\rho_0 u_n$$

$$\mathbf{x}_N \in C_N$$

Condiciones de Contorno de Robin

Al considerar la impedancia en el contorno, en esta situación la impedancia acústica específica Z y a su recíproco la admitancia acústica específica Y , tenemos:

$$\nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\frac{j\omega\rho_0}{Z} p \quad (3.010)$$

$$\mathbf{x}_R \in C_R$$

$$\nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} = -j\omega\rho_0 Y p \quad (3.011)$$

$$\mathbf{x}_R \in C_R$$

$$Y = \frac{1}{Z} \quad (3.005)$$

Obviamente estas regiones pertenecientes al contorno no se interceptan

3.2. ECUACION DE ONDA ACÚSTICA: FORMULACIÓN DÉBIL

Tomemos la ecuación de onda, sin considerar en esta etapa las condiciones iniciales.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = 0 \quad (3.012)$$

Multipliquémosla por la función de peso/variación δp , que corresponde a una perturbación, la cual es compatible con todas las condiciones de contorno e integremos respecto a la superficie

$$\int_S \delta p \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p \right] dS = 0 \quad (3.013)$$

Separamos la integral y entonces para la variación y el gradiente de la presión sonora tenemos

$$\delta p \nabla^2 p = \nabla \cdot (\delta p \nabla p) - \nabla(\delta p) \cdot \nabla p \quad (3.014)$$

Al remplazar

$$\int_S \delta p \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dS + \int_S \nabla(\delta p) \cdot \nabla p dS - \int_S \nabla \cdot (\delta p \nabla p) dS = 0 \quad (3.015)$$

Además, la última integral puede ser transformada de usando una forma bidimensional del Teorema de Gauss

$$\int_S \delta p \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dS + \int_S \nabla(\delta p) \cdot \nabla p dS - \int_C \delta p \nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} dC = 0 \quad (3.016)$$

Si separamos la integral de línea en las distintas regiones que implican las condiciones de contorno tenemos

$$\begin{aligned} \int_S \delta p \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dS + \int_S \nabla(\delta p) \cdot \nabla p dS - \int_{C_N} \delta p \nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} dC - \int_{C_{N0}} \delta p \nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} dC \\ - \int_{C_R} \delta p \nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} dC = 0 \end{aligned} \quad (3.017)$$

La contribución de la integral de superficie calculada sobre la superficie C_{N0} en la ecuación (3.017) es nula, puesto que representa la componente normal de la velocidad de partículas sobre una pared rígida.

$$\int_R \delta p \nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} dC = 0 \quad (3.018)$$

Usando la ecuación de fuerza lineal y efectuando el producto interno por el vector normal a la frontera obtenemos:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (3.019)$$

Al mismo tiempo, al asumir la solución armónica en la ecuación (3.019) tenemos que:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{j\omega t} \cdot \hat{\mathbf{n}} = u_n(\mathbf{x}) e^{j\omega t} \quad (3.020)$$

$$\nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -j\omega \rho_0 u_n \quad (3.021)$$

Y podemos entonces, incorporar fuentes vibratorias ubicadas en la frontera del dominio. Además, la relación de impedancia/admitancia nos permite aplicar la condición de contorno de Robin en la ecuación (4.017)

$$\nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} = -j\omega \rho_0 Y p \quad (3.022)$$

Obtenemos entonces

$$\int_S \delta p \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dS + \int_S \nabla(\delta p) \cdot \nabla p dS + \int_{C_N} \delta p j \omega \rho_0 u_n dC + \int_{C_R} \delta p j \omega \rho_0 Y p dC = 0 \quad (3.023)$$

Por otra parte, en la ecuación (3.023), podemos incluir la derivada parcial con respecto al tiempo de la presión sonora, ya que asumimos la solución armónica

$$p(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}) e^{j\omega t} . \quad (3.024)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = j\omega p(\mathbf{x}, t) \quad (3.025)$$

Reemplazamos y ordenamos

$$\int_S \delta p \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dS + \int_{C_R} \rho_0 Y \delta p \frac{\partial p}{\partial t} dC + \int_S \nabla(\delta p) \cdot \nabla p dS + \int_{C_N} j\omega \rho_0 \delta p u_n dC = 0 \quad (3.026)$$

Y finalmente obtenemos la **Ecuación de Onda: Formulación Débil**

$$\int_S \frac{1}{c^2} \delta p \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dS + \int_{C_R} \rho_0 Y \delta p \frac{\partial p}{\partial t} dC + \int_S \nabla(\delta p) \cdot \nabla p dS = - \int_{C_N} j\omega \rho_0 \delta p u_n dC \quad (3.027)$$

En este caso se puede incluir en el problema de forma explícita la dependencia de la posición y del tiempo en la ecuación correspondiente, cuando consideramos la densidad y la velocidad del sonido como dependientes de la posición. En este caso estamos frente a un medio no homogéneo y dispersivo, esto último puede dar paso a considerar materiales absorbentes y/o disipación en el medio. En forma explícita tenemos.

$$\begin{aligned} & \int_S \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \delta p(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} dS \\ & + \int_{C_R} \rho_0(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) \delta p(\mathbf{x}, t) \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dC + \int_S \nabla(\delta p(\mathbf{x}, t)) \cdot \nabla p(\mathbf{x}, t) dS \\ & = - \int_{C_N} j\omega \rho_0(\mathbf{x}) \delta p(\mathbf{x}, t) u_n(\mathbf{x}, t) dC \end{aligned} \quad (3.028)$$

O bien

$$\begin{aligned} & \int_S \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \delta p(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} dS \\ & + \int_{C_R} \rho_0(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) \delta p(\mathbf{x}, t) \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dC + \int_S \nabla(\delta p(\mathbf{x}, t)) \cdot \nabla p(\mathbf{x}, t) dS = f \end{aligned} \quad (3.029)$$

Donde este último término representa la excitación del sistema por el movimiento prescrito de una región que forma parte de la interfaz en el contorno

$$f = - \int_{C_N} j\omega \rho_0(\mathbf{x}) \delta p(\mathbf{x}, t) u_n(\mathbf{x}, t) dC = - \int_{C_N} \rho_0(\mathbf{x}) \delta p(\mathbf{x}, t) \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) dC \quad (3.030)$$

3.3. DISCRETIZACIÓN

Para construir la discretización podemos utilizar una solución aproximada de la forma

$$p = p(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^N \hat{N}_i(\mathbf{x}) \hat{p}_i(t) = \sum_{i=1}^N \hat{N}_i(x, y) \hat{p}_i(t) \quad (3.031)$$

Donde

- $\hat{p}_i(t)$: son las presiones sonoras nodales expresadas de forma discreta en función del tiempo ($i = 1, \dots, N$).
- $\hat{N}_i(\mathbf{x})$: Son las funciones de interpolación ($i = 1, \dots, N$).
- N : Número de grados de libertad.

La ecuación anterior se puede expresar de manera matricial, que en forma compacta se denota como:

$$p = p(\mathbf{x}, t) \approx \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{p}}(t) \quad (3.032)$$

O bien

$$p = p(\mathbf{x}, t) \approx [\hat{N}_1(\mathbf{x}) \quad \hat{N}_2(\mathbf{x}) \quad \hat{N}_3(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \hat{N}_N(\mathbf{x})] \begin{bmatrix} \hat{p}_1(t) \\ \hat{p}_2(t) \\ \hat{p}_3(t) \\ \vdots \\ \hat{p}_N(t) \end{bmatrix} \quad (3.033)$$

Por otra parte, la variación de la presión sonora se puede también aproximar de manera similar

$$\delta p = \delta p(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^N \hat{N}_i(\mathbf{x}) \delta \hat{p}_i(t) = \sum_{i=1}^N \hat{N}_i(x, y) \delta \hat{p}_i(t) \quad (3.034)$$

- $\delta \hat{p}_i(t)$: son las variaciones de las presiones sonoras nodales expresadas de forma discreta en función del tiempo ($i = 1, \dots, N$).

En forma matricial y compacta es

$$\delta p = \delta p(\mathbf{x}, t) \approx \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \delta \hat{\mathbf{p}}(t) \quad (3.035)$$

$$\delta p = \delta p(\mathbf{x}, t) \approx [\hat{N}_1(\mathbf{x}) \quad \hat{N}_2(\mathbf{x}) \quad \hat{N}_3(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \hat{N}_N(\mathbf{x})] \begin{bmatrix} \delta \hat{p}_1(t) \\ \delta \hat{p}_2(t) \\ \delta \hat{p}_3(t) \\ \vdots \\ \delta \hat{p}_N(t) \end{bmatrix} \quad (3.036)$$

3.3.1. MATRIZ DE MASA

En forma resumida y adaptando los resultados del capítulo dos, primera integral de la ecuación (3.024) puede ser aproximada por

$$\int_S \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \delta p(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} dS \approx \delta \hat{\mathbf{p}}^T(t) \mathbf{M} \ddot{\hat{\mathbf{p}}}(t) \quad (3.037)$$

Donde $\mathbf{M}$ es la que la matriz de masa dada por:

$$\mathbf{M} = \left[\int_S \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \hat{\mathbf{N}}^T(\mathbf{x}) \quad \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \quad dS \right] \quad (3.038)$$

En detalle, cada elemento de la matriz es dado por:

$$m_{ij} = \int_S \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \hat{N}_i(\mathbf{x}) \quad \hat{N}_j(\mathbf{x}) \quad dS \quad (3.039)$$

3.3.2. MATRIZ DE RIGIDEZ

De igual forma otra de las integrales de (3.024) puede expresarse de manera aproximada como

$$\int_S \nabla(\delta p(\mathbf{x}, t)) \cdot \nabla p(\mathbf{x}, t) \quad dS \approx \delta \hat{\mathbf{p}}^T(t) \mathbf{K} \hat{\mathbf{p}}(t) \quad (3.040)$$

la matriz de rigidez es dada por

$$\mathbf{K} = \left[\int_S \left(\nabla \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \right)^T \quad \nabla \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \quad dS \right] \quad (3.041)$$

Cada término de la matriz es dado por:

$$k_{ij} = \int_S \left(\nabla \hat{N}_i(\mathbf{x}) \right)^T \quad \nabla \hat{N}_j(\mathbf{x}) \quad dS \quad (3.042)$$

Recordemos que

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \right]^T \quad (3.043)$$

$$k_{ij} = \int_S \left[\frac{\partial \hat{N}_i(\mathbf{x})}{\partial x} \quad \frac{\partial \hat{N}_i(\mathbf{x})}{\partial y} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{N}_j(\mathbf{x})}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{N}_j(\mathbf{x})}{\partial y} \end{bmatrix} dS \quad (3.044)$$

Entonces

$$k_{ij} = \int_S \frac{\partial \hat{N}_i(\mathbf{x})}{\partial x} \frac{\partial \hat{N}_j(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial \hat{N}_i(\mathbf{x})}{\partial y} \frac{\partial \hat{N}_j(\mathbf{x})}{\partial y} \quad dS \quad (3.045)$$

3.3.3. MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO

Siguendo los procedimientos anteriores y observando otra de las integrales de la ecuación (3.ddd) tenemos

$$\int_{C_R} \rho_0(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) \delta p(\mathbf{x}, t) \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dC \approx \delta \hat{\mathbf{p}}^T(t) \mathbf{C} \dot{\hat{\mathbf{p}}}(t) \quad (3.046)$$

La matriz de amortiguamiento $\mathbf{C}$ se puede calcular como

$$\mathbf{C} = \left[\int_{C_R} \rho_0(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}^T(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) dC \right] \quad (3.047)$$

Sus elementos son dados por:

$$c_{ij} = \int_{C_R} \rho_0(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) \hat{N}_i(\mathbf{x})^T \hat{N}_j(\mathbf{x}) dC \quad (3.048)$$

3.3.4. VECTOR DE FUERZAS

Al considerar que la componente normal de la velocidad de partículas en la interfaz sólido – fluido que por continuidad es la misma del sólido. Reemplazando en la integral la discretización de la presión sonora y su variación

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\partial \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (3.049)$$

Donde $\mathbf{u}_s$ es el desplazamiento del sólido, esto quiere decir que u_n puede ser la componente normal de la velocidad de superficie de una fuente sonora vibrando, la cual es conocida, tenemos el vector de fuerza. Entonces la integral de la ecuación (3.024) puede ser aproximada por:

$$\mathbf{f} = - \int_{C_N} \rho_0(\mathbf{x}) \delta p(\mathbf{x}, t) \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) dC \approx \delta \hat{\mathbf{p}}^T(t) \mathbf{f}(t) \quad (3.050)$$

$$\mathbf{f}(t) = - \int_{C_N} \rho_0(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}^T(\mathbf{x}) \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) dC \quad (3.051)$$

Donde cada elemento es

$$f_i(t) = - \int_{C_N} \rho_0(\mathbf{x}) \hat{N}_i(\mathbf{x}) \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) dC_N \quad (3.052)$$

Una expresión similar se puede derivar si existen otro tipo de fuentes, como aquellas que indican cambio de densidad $G(\mathbf{x}, t)$ y/o fuerzas corporales $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ distribuidas en el fluido. Entonces se puede agregar a la ecuación de onda en formulación fuerte

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (3.053)$$

En este caso el vector de fuerza en términos discretos queda como

$$\mathbf{f}(t) = - \int_{C_N} \rho_0(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) dC + \int_S \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T \left(\frac{\partial G(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \right) dS \quad (3.054)$$

Donde cada elemento se escribe como:

$$f_i(t) = - \int_{C_N} \rho_0(\mathbf{x}) \hat{N}_i(\mathbf{x}) \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) dC + \int_S \hat{N}_i(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial G(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \right) dS \quad (3.055a)$$

$$f_i(t) = - \int_{C_N} \rho_0(\mathbf{x}) \hat{N}_i(\mathbf{x}) \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) dC + \int_S q(\mathbf{x}, t) \hat{N}_i(\mathbf{x}) dS \quad (3.055b)$$

$$q(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\partial G(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \right) \quad (3.055c)$$

3.3.5. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

Juntamos todo lo visto en las secciones anteriores y vemos que tenemos la siguiente ecuación la que al incluir las condiciones iniciales queda

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{p}(t) &= \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{p}(0) &= \mathbf{p}_0 \\ \dot{\mathbf{p}}(0) &= \dot{\mathbf{p}}_0 \end{aligned} \quad (3.056)$$

3.4. ELEMENTO RECTANGULAR LINEAL

A fin de presentar el análisis de elementos finitos en una situación bidimensional el primer tipo de elemento a estudiar será el elemento rectangular lineal. En este caso partiremos de rectángulos desde el espacio de nuestro modelo en el espacio físico (x, y) y estos serán mapeados en el llamado espacio patrón (ξ, η) , a fin de derivar las matrices elementales de masa, rigidez, etc., de una manera simple e intuitiva, para después trabajar en situaciones de geometría más complicada.

Pensemos que nuestro modelo acústico bidimensional puede ser dividido en una malla de carácter rectangular, como muestra la figura 3.1 y que cada elemento se puede mapear a un elemento finito patrón. Esto nos permitirá derivar expresiones generales que simplificarán los procesos de montaje de las matrices que caracterizan la globalidad del campo sonoro a estudiar.

Las funciones de interpolación pueden ser construidas a partir de las funciones explicitadas en el capítulo tres y poseen la propiedad de tener el valor unitario en el respectivo nodo y ser nulas en los otros tres. Específicamente en este caso se trata del conjunto de funciones bilineales dadas por:

$$\begin{aligned} \hat{N}_1(x, y) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ \hat{N}_2(x, y) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ \hat{N}_3(x, y) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ \hat{N}_4(x, y) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (3.057)$$

En términos del elemento la presión es aproximada por:

$$p = p(x, y, t) \approx \sum_{i=1}^4 \hat{N}_i(x, y) \hat{p}_i(t) = \sum_{i=1}^4 \hat{N}_i(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \hat{p}_i(t) \quad (3.058)$$

Donde las expresiones $x(\xi, \eta)$ e $y(\xi, \eta)$ representan el mapeamiento del elemento rectangular al elemento padrón. En nuestro caso es obvio que esta relación está dada por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= a_x \xi & \xi &= \frac{x}{a_x} & dx &= a_x d\xi & \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{1}{a_x} \\ y(\xi, \eta) &= a_y \eta & \eta &= \frac{y}{a_y} & dy &= a_y d\eta & \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{1}{a_y} \end{aligned} \quad (3.059)$$

A modo de ejemplo podemos obtener algunas de las matrices elementales, partiendo en este caso por la matriz de masa

$$\mathbf{M}^e = \left[\int_S \frac{1}{c(\mathbf{x})^2} \hat{\mathbf{N}}^T(\mathbf{x}) \quad \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \quad dS \right] \quad (3.060)$$

$$m_{ij}^e = \int_S \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \hat{N}_i(\mathbf{x}) \quad \hat{N}_j(\mathbf{x}) \quad dS \quad i = 1,2,3,4 \quad j = 1,2,3,4 \quad (3.061)$$

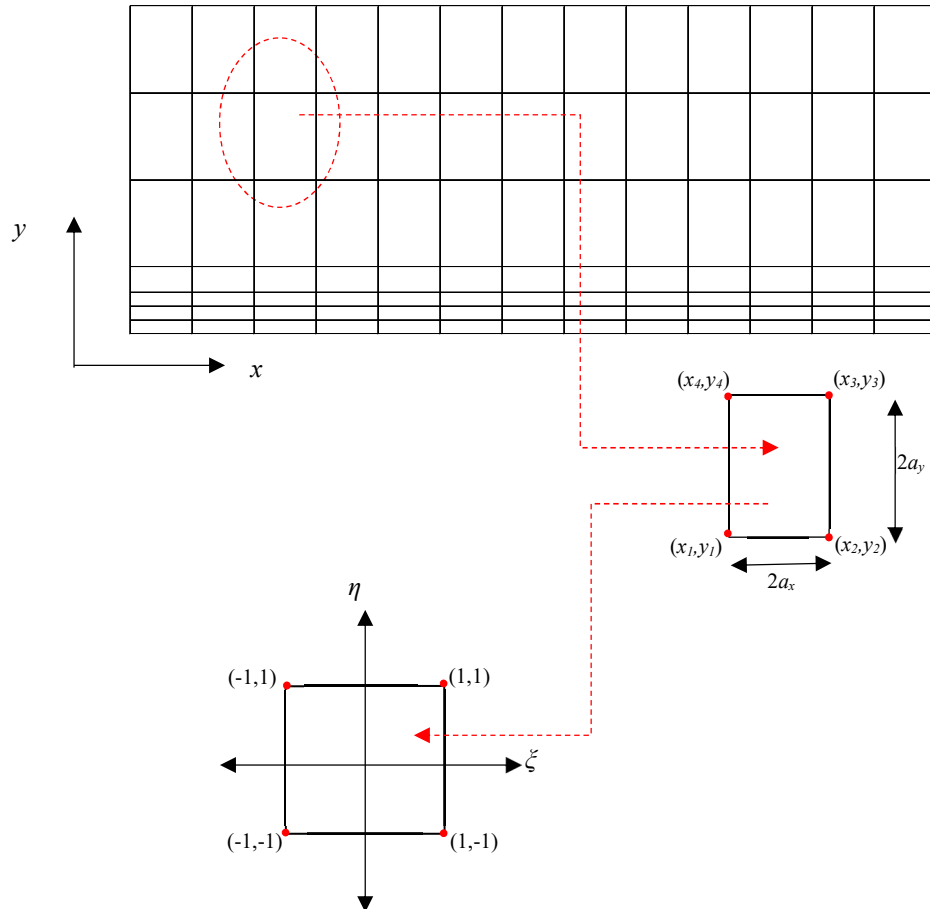


Figura 3.1. Modelo Acústico Rectangular - Mapeamiento a Elemento Finito Padrón

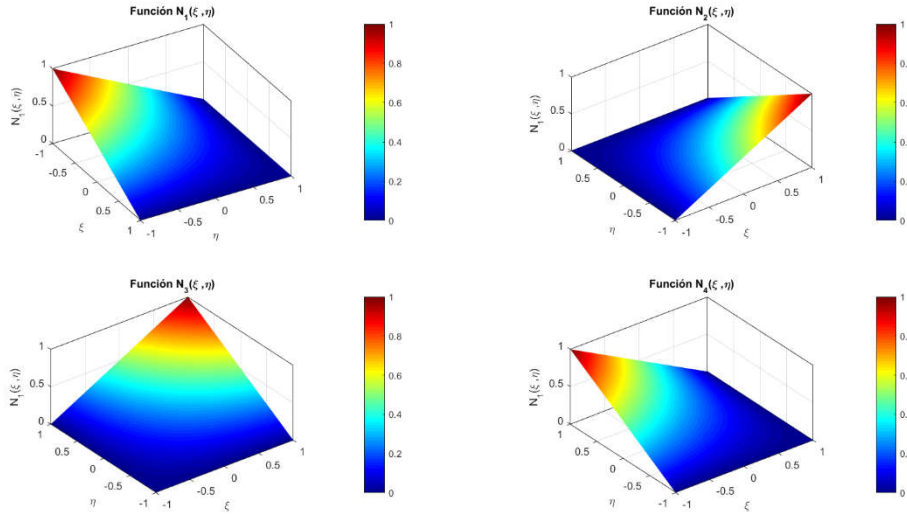


Figura 3.2. Funciones de Interpolación

$$m_{ij}^e = \int_S \frac{1}{c^2(x, y)} \hat{N}_i(x, y) \hat{N}_j(x, y) dx dy \quad (3.062)$$

$$m_{ij}^e = \int_S \frac{1}{c^2(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))} \hat{N}_i(x(\xi, \eta), x(\xi, \eta)) \hat{N}_j(x(\xi, \eta), x(\xi, \eta)) a_x d\xi a_y d\eta \quad (3.063)$$

En esta situación asumiremos que el medio dentro del elemento es homogéneo

$$m_{ij}^e = \frac{a_x a_y}{c^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, \eta) \hat{N}_j(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.064)$$

Entonces al evaluar la integral se obtiene la matriz de masa elemental

$$\mathbf{M}^e = \frac{a_x a_y}{9c^2} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.065)$$

Trabajamos de una manera similar en la matriz de rigidez

$$\mathbf{K}^e = \left[\int_S \left(\nabla \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \right)^T \nabla \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) dS \right] \quad (3.066)$$

$$k_{ij}^e = \int_S \left(\nabla \hat{N}_i(\mathbf{x}) \right)^T \nabla \hat{N}_j(\mathbf{x}) dS \quad (3.067)$$

$$k_{ij}^e = \int_S \left(\nabla \hat{N}_i(x, y) \right)^T \nabla \hat{N}_j(x, y) dx dy \quad (3.068)$$

Recordemos que el gradiente puede expresarse en el sistema de coordenadas (x, y) y en el sistema de coordenadas (ξ, η) utilizando las siguientes relaciones

O de manera resumida

$$\nabla = \nabla_{xy} = \mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi\eta} \quad (3.069)$$

Donde

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a_x & 0 \\ 0 & a_y \end{bmatrix} \quad (3.070)$$

Por lo tanto

$$k_{ij}^e = \int_S \left(\nabla_{xy} \hat{N}_i(x, y) \right)^T \nabla_{xy} \hat{N}_j(x, y) \, dx dy \quad (3.071)$$

$$k_{ij}^e = \int_S \left(\mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi\eta} \hat{N}_i(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \right)^T \mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi\eta} \hat{N}_j(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \, a_x d\xi \, a_y d\eta \quad (3.072)$$

$$k_{ij}^e = a_x a_y \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi\eta} \hat{N}_i(\xi, \eta) \right)^T \mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi\eta} \hat{N}_j(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \quad (3.073)$$

Entonces al evaluar la integral se obtiene la matriz de rigidez elemental, nuevamente consideraremos que el medio es homogéneo dentro del elemento.

$$\mathbf{K}^e = a_x a_y \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3a_x^2} + \frac{1}{3a_y^2} \right) & \left(\frac{-1}{3a_x^2} + \frac{1}{6a_y^2} \right) & \left(\frac{-1}{6a_x^2} + \frac{-1}{6a_y^2} \right) & \left(\frac{1}{6a_x^2} + \frac{-1}{3a_y^2} \right) \\ \left(\frac{-1}{3a_x^2} + \frac{1}{6a_y^2} \right) & \left(\frac{1}{3a_x^2} + \frac{1}{3a_y^2} \right) & \left(\frac{1}{6a_x^2} + \frac{-1}{3a_y^2} \right) & \left(\frac{-1}{6a_x^2} + \frac{-1}{6a_y^2} \right) \\ \left(\frac{-1}{6a_x^2} + \frac{-1}{6a_y^2} \right) & \left(\frac{1}{6a_x^2} + \frac{-1}{3a_y^2} \right) & \left(\frac{1}{3a_x^2} + \frac{1}{3a_y^2} \right) & \left(\frac{-1}{3a_x^2} + \frac{1}{6a_y^2} \right) \\ \left(\frac{1}{6a_x^2} + \frac{-1}{3a_y^2} \right) & \left(\frac{-1}{6a_x^2} + \frac{-1}{6a_y^2} \right) & \left(\frac{-1}{3a_x^2} + \frac{1}{6a_y^2} \right) & \left(\frac{1}{3a_x^2} + \frac{1}{3a_y^2} \right) \end{bmatrix} \quad (3.074)$$

La matriz de amortiguamiento elemental es dada por

$$\mathbf{C}^e = \left[\int_{C_R} \rho_0(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \, dC \right] \quad (3.075)$$

En forma más específica los elementos de la matriz de amortiguamiento son

$$c_{ij}^e = \int_{C_R} \rho_0(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) \hat{N}_i(\mathbf{x}) \hat{N}_j(\mathbf{x}) \, dC \quad (3.076)$$

$$c_{ij}^e = \int_{C_R} \rho_0(x, y) Y(x, y) \hat{N}_i(x, y) \hat{N}_j(x, y) \, dC \quad (3.077)$$

Como ejemplo podemos considerar la densidad y la admitancia constantes en el elemento, entonces si observamos el caso en que $x = -a_x$ o $\xi = -1$ tenemos la integral

$$c_{ij}^e = \rho_0 Y \int_{-a_y}^{a_y} \hat{N}_i(-a_x, y) \hat{N}_j(-a_x, y) \, dy \quad (3.078)$$

$$c_{ij}^e = \rho_0 Y \int_{-1}^1 \hat{N}_i(-1, \eta) \hat{N}_j(-1, \eta) a_y d\eta \quad (3.079)$$

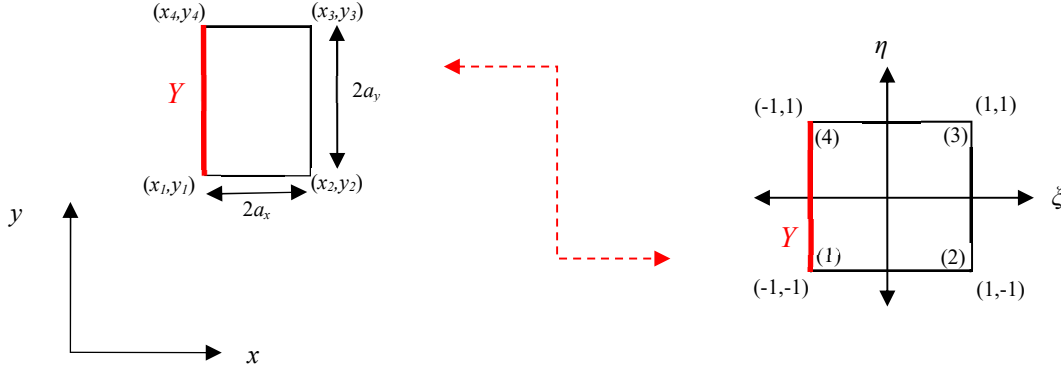


Figura 5.3. Mapeamiento del contorno

Ademas se puede observar que solamente las funciones de interpolación $N_1(\xi, \eta)$ y $N_4(\xi, \eta)$ son distintas de cero en el contorno donde la integración es llevada a cabo, por lo tanto, las únicas integrales no nulas son

$$c_{11}^e = \rho_0 Y a_y \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2} (1 - \eta) \right]^2 d\eta = \frac{2\rho_0 Y a_y}{3} \quad (3.080)$$

$$c_{14}^e = c_{41}^e = \rho_0 Y a_y \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2} (1 - \eta) \right] \left[\frac{1}{2} (1 + \eta) \right] d\eta = \frac{\rho_0 Y a_y}{3} \quad (3.081)$$

$$c_{44}^e = \rho_0 Y a_y \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2} (1 + \eta) \right]^2 d\eta = \frac{2\rho_0 Y a_y}{3} \quad (3.082)$$

Considerando las simetrías, las superposiciones y otros factores las matrices elementales de amortiguamiento posibles son dadas conforme a la tabla 3.1

En cuanto al vector de fuerzas tenemos

$$\mathbf{f}(t) = - \int_{C_N} \rho_0(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) dC_N + \int_S \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T \left(\frac{\partial G(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \right) dC_N \quad (3.083)$$

Donde cada elemento se escribe como:

$$f_i^e(t) = \int_S \hat{N}_i(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial G(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \right) dS - \int_{C_N} \rho_0(\mathbf{x}) \hat{N}_i(\mathbf{x}) \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) dC_N \quad (3.084)$$

La primera integral, la cual obviamente considera fuerzas corporales puede ser tratada conforme a lo visto anteriormente, es decir

$$f_{i1}^e(t) = \int_S \hat{N}_i(x, y) \left(\frac{\partial G(x, y, t)}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, t) \right) dS \quad (3.085)$$

Tabla 3.1. Matrices de Amortiguamiento Elementales

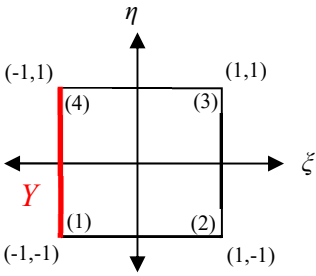
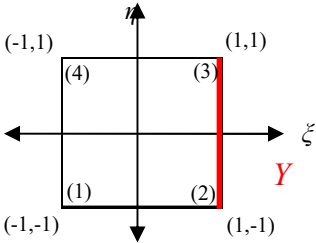
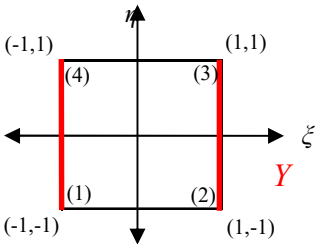
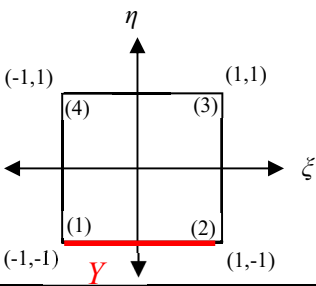
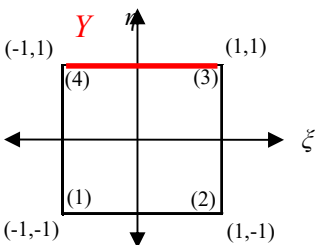
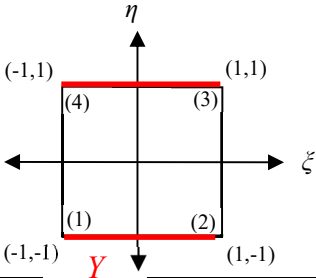
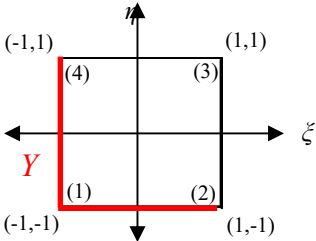
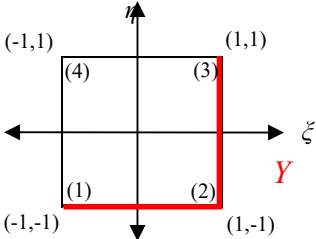
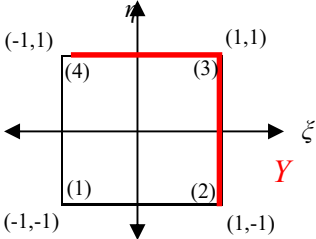
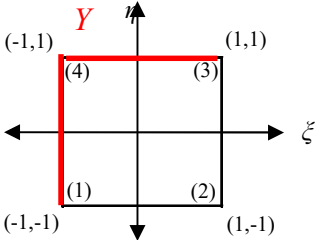
Condición de Contorno de Impedancia	Matriz de Amortiguamiento Elemental
	$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 a_y Y}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
	$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 a_y Y}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
	$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 a_y Y}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
	$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 a_x Y}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
	$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 a_x Y}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Tabla 3.1. Matrices de Amortiguamiento Elementales (Continuación)

Condición de Contorno de Impedancia	Matriz de Amortiguamiento Elemental
	$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 a_x Y}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
	$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y}{3} \begin{bmatrix} 2a_y + 2a_x & a_x & 0 & a_y \\ a_x & 2a_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_y & 0 & 0 & a_y \end{bmatrix}$
	$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y}{3} \begin{bmatrix} 2a_x & a_x & 0 & 0 \\ a_x & 2a_y + 2a_x & a_y & 0 \\ 0 & a_y & 2a_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
	$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a_y & a_y & 0 \\ 0 & a_y & 2a_y + 2a_x & a_x \\ 0 & 0 & a_x & 2a_x \end{bmatrix}$
	$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y}{3} \begin{bmatrix} 2a_y & 0 & 0 & a_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a_x & a_x \\ a_y & 0 & a_x & 2a_x + 2a_y \end{bmatrix}$

$$f_{i1}^e(t) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, \eta) \left(\frac{\partial G(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), t)}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{F}(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), t) \right) a_x d\xi a_y d\eta \quad (3.086)$$

La segunda es más interesante de analizar puesto que considera la excitación como parte de las condiciones de contorno, en este caso podemos considerar que la aceleración y la densidad son constantes en el elemento y tenemos

$$f_{i2}^e(t) = - \int_{C_N} \rho_0 \hat{N}_i(x, y) \dot{u}_n(t) dC_N \quad (3.087)$$

Como en el caso de la matriz de amortiguamiento podemos decir que en una de las posibles situaciones es que dicha excitación este la coordenada $x = -a_x$ o $\xi = -1$.

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{-a_y}^{a_y} \hat{N}_i(-a_x, y) dy \quad (3.088)$$

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{-1}^1 \hat{N}_i(-1, \eta) a_y d\eta \quad (3.089)$$

Solamente para las funciones $i = 1$ y 4 estas integrales son no nulas Los otros casos se pueden obtener mediante un razonamiento similar al de la matriz de amortiguamiento elemental y se muestran en la tabla 3.2

Tabla 3.2. Vectores de Fuerza Elementales

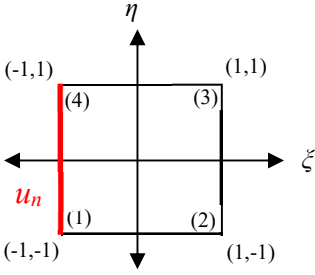
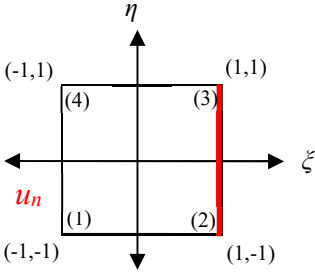
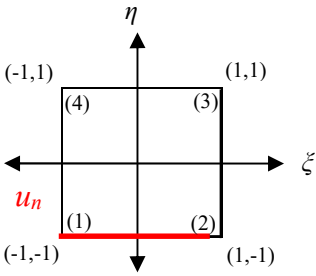
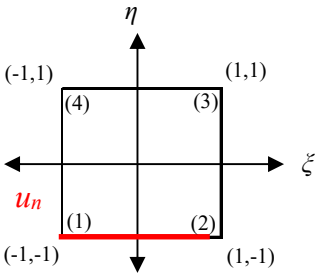
Condición de Contorno de Fuerza	Vector de Fuerza Elemental
	$f_2^e(t) = \begin{bmatrix} -\frac{2a_y \dot{u}_n(t) \rho_0}{3} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2a_y \dot{u}_n(t) \rho_0}{3} \end{bmatrix}$
	$f_2^e(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2a_y \dot{u}_n(t) \rho_0}{3} \\ -\frac{2a_y \dot{u}_n(t) \rho_0}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$

Tabla 3.2. Vectores de Fuerza Elementales (Continuación)

Condición de Contorno de Fuerza	Vector de Fuerza Elemental
	$f_z^e(t) = \begin{bmatrix} -\frac{2a_x \dot{u}_n(t) \rho_0}{3} \\ -\frac{2a_x \dot{u}_n(t) \rho_0}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
	$f_z^e(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2a_x \dot{u}_n(t) \rho_0}{3} \\ -\frac{2a_x \dot{u}_n(t) \rho_0}{3} \end{bmatrix}$

3.5. ELEMENTO CUADRILATERAL LINEAL ISOPARAMÉTRICO

En el caso de que la geometría donde se propagan las ondas sonoras sea mucho más compleja el elemento rectangular no se puede adaptar con tanta facilidad, en este caso lo conveniente sería usar un elemento trapezoidal (cuadrilateral).

Es perfectamente posible mapear la totalidad del elemento cuadrilateral del espacio físico al espacio patrón y viceversa usando las mismas funciones de interpolación por medio de las ecuaciones, como lo muestra la figura 3.4.

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \hat{N}_i(\xi, \eta) x_i \\ y &= y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \hat{N}_i(\xi, \eta) y_i \end{aligned} \quad (3.090)$$

Cuando las mismas funciones que determinan el comportamiento físico del elemento son usadas para generar la transformación de coordenadas, se denomina a esta familia de elementos como isoparamétricos. Determinaremos, como en el caso anterior, las expresiones generales para la matriz de masa y rigidez elementales, entendiendo que esta vez no podremos ir en tanto detalle, debido a la no regularidad del tipo de geometría. Comenzaremos con la matriz de masa elemental

$$\mathbf{M}^e = \left[\int_S \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \hat{\mathbf{N}}^T(\mathbf{x}) \quad \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \quad dS \right] \quad (3.091)$$

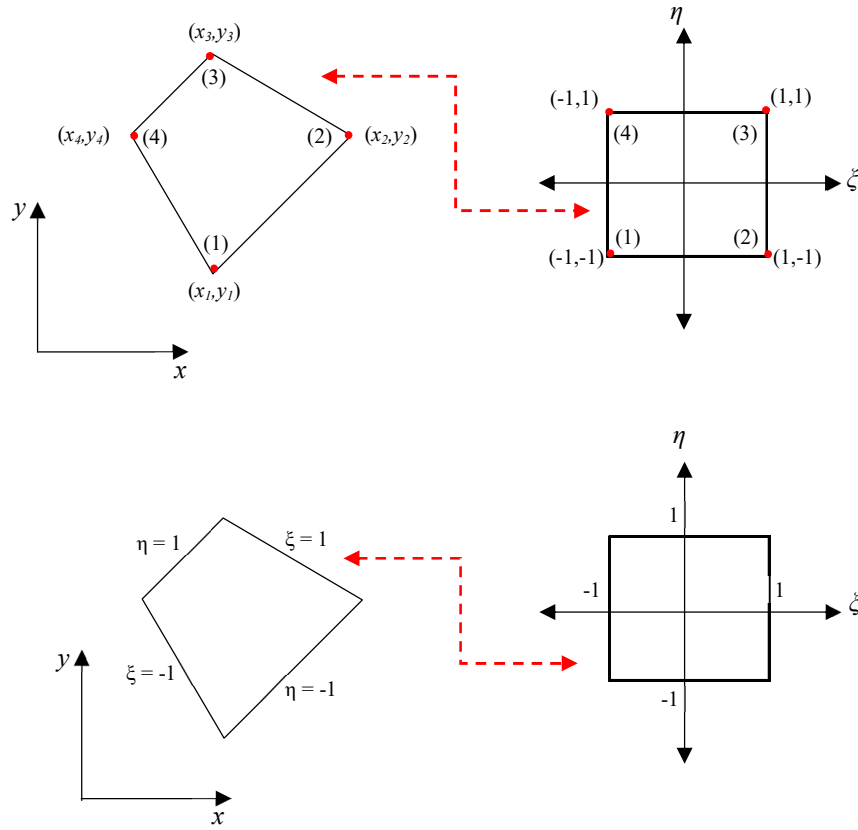


Figura 3.4. Modelo Acústico Cuadrilateral Isoparamétrico - Mapeamiento a Elemento Finito Patrón

$$m_{ij}^e = \int_S \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \hat{N}_i(\mathbf{x}) \hat{N}_j(\mathbf{x}) dS \quad i = 1,2,3,4 \quad j = 1,2,3,4 \quad (3.092)$$

Las líneas $\xi = \text{constante}$ y $\eta = \text{constante}$ no son perpendiculares en el plano (x, y) , pero los vectores mostrados en la ecuación (3.083), están dirigidos a lo largo de las líneas $\xi = \text{constante}$ y $\eta = \text{constante}$ respectivamente.

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\xi} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix}^T d\xi \\ d\boldsymbol{\eta} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T d\eta \end{aligned} \quad (3.093)$$

Entonces el elemento de área es dado por el módulo del producto vectorial antisimétrico.

$$dS = |d\boldsymbol{\xi} \wedge d\boldsymbol{\eta}| = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta \quad (3.094)$$

Podemos escribir esta expresión como:

$$dS = \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \quad (3.095)$$

Donde $\det(\mathbf{J})$ es el determinante de la Matriz Jacobiana asociada a la transformación de coordenadas, específicamente esta matriz es dada por

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.096)$$

Si sustituimos la relación entre los sistemas de coordenadas (x,y) y (ξ,η) el Jacobiano es

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(\xi,\eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial y(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x(\xi,\eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial y(\xi,\eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sum_{i=1}^4 \hat{N}_i(\xi,\eta) x_i \right) & \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sum_{i=1}^4 \hat{N}_i(\xi,\eta) y_i \right) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sum_{i=1}^4 \hat{N}_i(\xi,\eta) x_i \right) & \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sum_{i=1}^4 \hat{N}_i(\xi,\eta) y_i \right) \end{bmatrix} \quad (3.097)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \hat{N}_2}{\partial \xi} & \frac{\partial \hat{N}_3}{\partial \xi} & \frac{\partial \hat{N}_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \hat{N}_2}{\partial \eta} & \frac{\partial \hat{N}_3}{\partial \eta} & \frac{\partial \hat{N}_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (3.098)$$

Cada elemento de la matriz de masa es entonces

$$m_{ij}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{c^2(\xi,\eta)} \hat{N}_i(\xi,\eta) \hat{N}_j(\xi,\eta) \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \quad (3.099a)$$

En el caso de que la velocidad del sonido sea homogénea en el elemento tenemos

$$m_{ij}^e = \frac{1}{c^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi,\eta) \hat{N}_j(\xi,\eta) \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \quad (3.099b)$$

En relación con el cálculo de la matriz de rigidez podemos ver que es necesario calcular el gradiente de las funciones de interpolación

$$\mathbf{K}^e = \left[\int_S \left(\nabla \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \right)^T \nabla \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) dS \right] \quad (3.100)$$

$$k_{ij}^e = \int_S \left(\nabla_{xy} \hat{N}_i(\mathbf{x}) \right)^T \nabla_{xy} \hat{N}_j(\mathbf{x}) dS \quad (3.101)$$

Para ello podemos usar la regla de la cadena y determinar las derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

$$\nabla_{xy} = \mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi\eta} \quad (3.105)$$

Entonces los elementos de la matriz de rigidez son

$$k_{ij}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi\eta} \hat{N}_i(\xi, \eta) \right)^T \mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi\eta} \hat{N}_j(\xi, \eta) \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \quad (3.106)$$

La matriz de amortiguamiento elemental tomará la forma de:

$$\mathbf{C}^e = \int_{C_R} \rho_0(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) dC \quad (3.107)$$

$$c_{ij}^e = \int_{C_R} \rho_0(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) \hat{N}_i(\mathbf{x})^T \hat{N}_j(\mathbf{x}) dC \quad (3.108)$$

Podemos considerar, a modo de ejemplo, el caso donde la admitancia este mapeada en $\xi = -1$ y las propiedades del material y de su contorno son constantes en el elemento. Conforme a la figura 5.4, contorno rojo y siguiendo las reglas de integración de línea tenemos

$$c_{ij}^e = \rho_0 Y \int_{-1}^1 \hat{N}_i(-1, \eta) \hat{N}_j(-1, \eta) \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}(-1, \eta) \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}(-1, \eta) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\eta \quad (3.109)$$

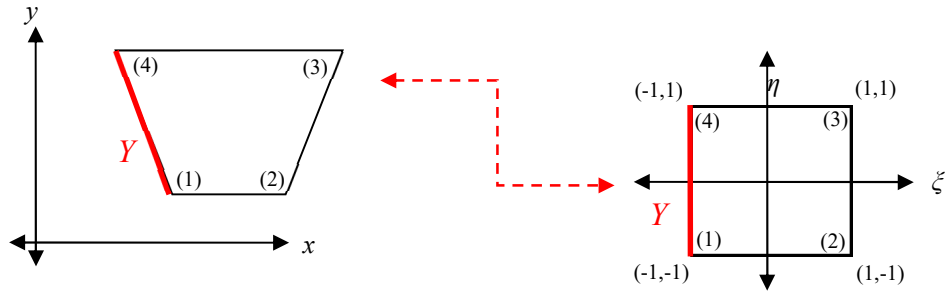


Figura 5.5. Mapeamiento de contorno – Elemento Cuadrilátero Isoparamétrico

tenemos para el mapeo en $\xi = 1$

$$c_{ij}^e = \rho_0 Y \int_{-1}^1 \hat{N}_i(1, \eta) \hat{N}_j(1, \eta) \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}(1, \eta) \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}(1, \eta) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\eta \quad (3.110)$$

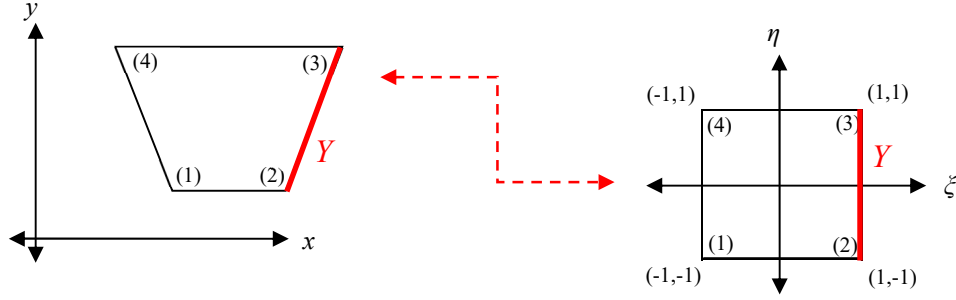


Figura 5.6. Mapeamiento de contorno – Elemento Cuadrilateral Isoparamétrico

Tenemos para el mapeo en $\eta = -1$

$$c_{ij}^e = \rho_0 Y \int_{-1}^1 \bar{N}_i(\xi, -1) \bar{N}_j(\xi, -1) \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi, -1) \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi, -1) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\xi \quad (3.111)$$

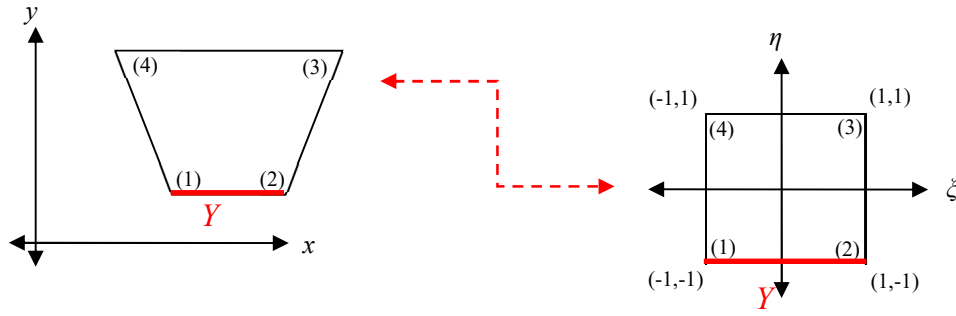


Figura 5.7. Mapeamiento de contorno – Elemento Cuadrilateral Isoparamétrico

Y para $\eta = 1$

$$c_{ij}^e = \rho_0 Y \int_{-1}^1 \bar{N}_i(\xi, 1) \bar{N}_j(\xi, 1) \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi, 1) \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi, 1) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\xi \quad (3.112)$$

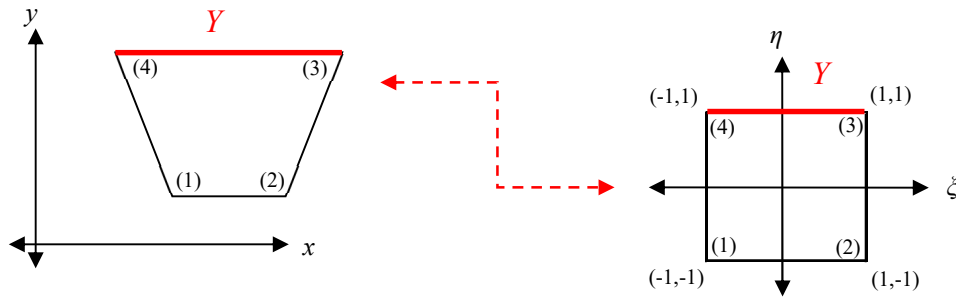


Figura 5.8. Mapeamiento de contorno – Elemento Cuadrilateral Isoparamétrico

El vector de fuerzas es en términos generales dado por:

$$\mathbf{f}(t) = - \int_{C_N} \rho_0(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) dC_N + \int_S \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T \left(\frac{\partial G(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \right) dS \quad (3.113)$$

La primera integral toma en cuenta las fuerzas corporales y en términos elementales es:

$$f_{i1}^e(t) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, \eta) \left(\frac{\partial G(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), t)}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{F}(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), t) \right) \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \quad (3.114)$$

Para considerar la excitación producto de la aceleración del contorno (rojo) en el caso donde este se mapea a $\xi = -1$. Si la aceleración es constante, tenemos la integral.

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{-1}^1 \hat{N}_i(-1, \eta) \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}(-1, \eta) \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}(-1, \eta) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\eta \quad (3.115)$$

Por supuesto esto se puede extender para otros casos. Aquí vemos la expresión asociada a $\xi = 1$

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{-1}^1 \hat{N}_i(1, \eta) \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}(1, \eta) \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}(1, \eta) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\eta \quad (3.116)$$

Luego tenemos $\eta = -1$

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, -1) \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi, -1) \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi, -1) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\eta \quad (3.117)$$

Y también para $\eta = 1$

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, 1) \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi, 1) \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi, 1) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\eta \quad (3.118)$$

Es recomendable que las matrices de masa y rigidez sean calculadas usando un esquema de integración Gauss - Legendre. Para calcular las integrales asociadas a la matriz de amortiguamiento y parte del vector de excitación se deben considerar las indicaciones de integración numérica del capítulo 2. Más detalles se pueden encontrar en la sección 3.6 de este capítulo.

3.6. INTEGRACION NUMÉRICA

Tanto como para el elemento rectangular como para el elemento cuadrilateral isoparamétrico las reglas de integración sugeridas en el capítulo 3 siguen siendo válidas, solamente que en este caso hay que considerar la dependencia de ambas variables (ξ, η)

Como en el caso anterior Comenzaremos analizando la matriz de masa elemental, la cual es dada por la ecuación (3.099b), podemos considerarla de manera general como

$$m_{ij}^e = \frac{1}{c^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, \eta) \hat{N}_j(\xi, \eta) \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g_m(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.119)$$

Podemos observar que $\det(\mathbf{J})$ en la mayoría de los casos es una función bilineal, exceptuando el caso de un paralelograma donde $\det(\mathbf{J})$ es constante, por otra parte, las funciones $\hat{N}_i(\xi, \eta)$ son bilineales entonces el producto $\hat{N}_i(\xi, \eta) \hat{N}_j(\xi, \eta)$ es bicuadrático. Entonces el integrando en la matriz de masa $g(\xi, \eta) = \hat{N}_i(\xi, \eta) \hat{N}_j(\xi, \eta) \det(\mathbf{J})$ es o una función bicúbica o bicuadrática, en este caso la integral de la ecuación (3.119) puede ser evaluada por un arreglo de puntos de integración de (2 X 2). Particularizando tenemos

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g_m(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{j=1}^n H_j g_m(\xi_j, \eta_j) \quad (3.178)$$

Donde los valores para ξ_j , η_j y H_j se obtienen de la tabla 2.7. Podemos ver que para matriz de masa tenemos:

$$m_{ij}^e = \sum_{j=1}^4 H_j g_m(\xi_j, \eta_j) = 1 \times g_m(-\sqrt{1/3}, -\sqrt{1/3}) + 1 \times g_m(\sqrt{1/3}, -\sqrt{1/3}) + 1 \times g_m(\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}) + 1 \times g_m(-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}) \quad (3.179)$$

En el caso de la matriz de rigidez lo que se obtiene de la integral dada por la ecuación (3.106) y podemos analizarla como una función bicuadrática dividida por una función bilineal, en este caso la integración numérica no es exacta, si bien la praxis ha demostrado que un esquema de integración de (2 X 2) es adecuado a fin de evitar una sobre rigidización de dicha matriz.

$$k_{ij}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi\eta} \hat{N}_i(\xi, \eta) \right)^T \mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi\eta} \hat{N}_j(\xi, \eta) \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g_k(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.120)$$

$$k_{ij}^e = \sum_{j=1}^4 H_j g_k(\xi_j, \eta_j) = 1 \times g_k(-\sqrt{1/3}, -\sqrt{1/3}) + 1 \times g_k(\sqrt{1/3}, -\sqrt{1/3}) + 1 \times g_k(\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}) + 1 \times g_k(-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}) \quad (3.121)$$

En relación con la matriz de rigidez y otros procesos de integración numérica en general, la discusión presentada en el libro de Petyt (2010), puede ser bastante clarificadora.

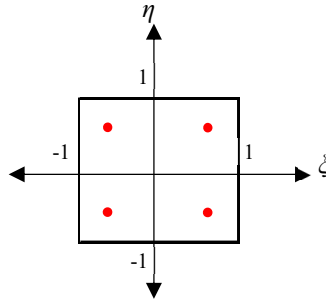


Figura 3.8. Puntos de Integración

3.7. ELEMENTO TRIANGULAR LINEAL

Otra forma de construir elementos que sean más flexibles en diversas geometrías es el uso de triángulos cuyas funciones de interpolación sean lineales. Partamos desde el sistema de coordenadas globales (x,y) y para propósitos de simplicidad no consideraremos el tiempo en este momento, ya que el objetivo es la construcción de las funciones de interpolación. Entonces la presión sonora se puede aproximar en el elemento como

$$p = p(x, y) \approx \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (3.119)$$

Evaluando la presión sonora en cada nodo del elemento tenemos

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 \\ \hat{p}_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 \\ \hat{p}_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 \end{aligned} \quad (3.120)$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

Luego los coeficientes son determinados al resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

La inversa de la matriz está dada por

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - y_2 x_3 & -x_1 y_3 + y_1 x_3 & x_1 y_2 - y_1 x_2 \\ -y_3 + y_2 & +y_3 - y_1 & -y_2 + y_1 \\ x_3 - x_2 & -x_3 + x_1 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} A_1^0 & A_2^0 & A_3^0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \quad (3.124)$$

Donde A es el área del triángulo dada por

$$A = \frac{1}{2} \det(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} (x_2 y_3 - y_2 x_3 - x_1 y_3 + y_1 x_3 + x_1 y_2 - y_1 x_2) \quad (3.125)$$

Entonces la presión sonora en el elemento es dada por:

$$p = \mathbf{N} \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \end{bmatrix} \quad (3.126)$$

Y las funciones de interpolación pueden ser construidas usando la siguiente ecuación

$$\hat{\mathbf{N}} = [\hat{N}_1 \quad \hat{N}_2 \quad \hat{N}_3] = [1 \quad x \quad y] \mathbf{A}^{-1} \quad (3.127)$$

Entonces

$$\hat{N}_i = \frac{1}{2A}(A_i^0 + a_i x + b_i y) \quad i = 1,2,3 \quad (3.128)$$

A partir de esto las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, junto a los vectores de excitación pueden ser evaluadas conforme a las ecuaciones generales ya presentadas. Sin embargo, es interesante redefinir el concepto de coordenadas a fin de optimizar los cálculos de estas matrices. En este caso trataremos con coordenadas de área de triángulos como es mostrado en la siguiente figura, el triángulo es subdividido

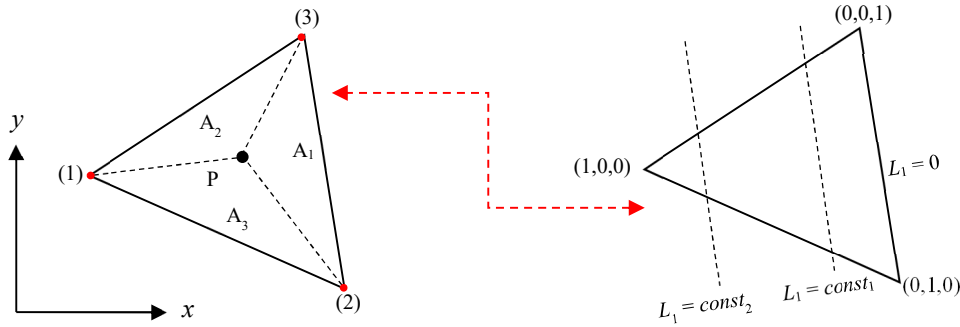


Figura 5.9. Definición de coordenadas de área para un triángulo

Las coordenadas de área para un punto P dentro del triángulo están dadas por

$$L_1 = \frac{A_1}{A} \quad L_2 = \frac{A_2}{A} \quad L_3 = \frac{A_3}{A} \quad (3.129)$$

Como

$$A_1 + A_2 + A_3 = A \quad (3.130)$$

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (3.131)$$

Las coordenadas cartesianas y de área están relacionadas por

$$\begin{aligned} x &= L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 \\ y &= L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 \end{aligned} \quad (3.132)$$

Uniendo esta expresión con la anterior ecuación podemos presentar de forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-T} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.134)$$

Y podemos ver que la inversa de la matriz transpuesta es:

$$\mathbf{A}^{-T} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - y_2 x_3 & -y_3 + y_2 & x_3 - x_2 \\ -x_1 y_3 + y_1 x_3 & y_3 - y_1 & -x_3 + x_1 \\ x_1 y_3 - y_1 x_3 & -y_2 + y_1 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} A_1^0 & a_1 & b_1 \\ A_2^0 & a_2 & b_2 \\ A_3^0 & a_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (3.135)$$

Entonces

$$L_i = \frac{1}{2A} (A_i^0 + a_i x + b_i y) = \hat{N}_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.136)$$

Entonces determinaremos la matriz de masa

$$\mathbf{M}^e = \left[\int_S \frac{1}{c(\mathbf{x})^2} \hat{\mathbf{N}}^T(\mathbf{x}) \quad \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \quad dS \right] \quad (3.137)$$

$$m_{ij}^e = \int_S \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \hat{N}_i(\mathbf{x}) \quad \hat{N}_j(\mathbf{x}) \quad dS \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.138)$$

Considerando la velocidad del sonido constante en el elemento tenemos

$$m_{ij}^e = \frac{1}{c^2} \int_S \hat{N}_i(\mathbf{x}) \quad \hat{N}_j(\mathbf{x}) \quad dS \quad m_{ij}^e = \frac{1}{c^2} \int_S L_i(\mathbf{x}) \quad L_j(\mathbf{x}) \quad dS \quad (3.139)$$

Podemos usar la siguiente fórmula (Eisenberg, Malvern, 1973)

$$\int_S L_1^m(\mathbf{x}) L_2^n(\mathbf{x}) L_3^p(\mathbf{x}) \quad dS = \frac{m! n! p!}{(m + n + p + 2)!} 2A \quad (3.140)$$

Entonces

$$m_{ij}^e = \frac{1}{c^2} \int_S L_i(\mathbf{x}) L_j(\mathbf{x}) \quad dS = \frac{1}{c^2} \frac{1! 1! 0!}{(1 + 1 + 0 + 2)!} 2A = \frac{1}{c^2} \frac{A}{12} \quad (3.141)$$

$$m_{ii}^e = \frac{1}{c^2} \int_S L_i^2(\mathbf{x}) \quad dS = \frac{1}{c^2} \frac{2! 0! 0!}{(1 + 1 + 0 + 2)!} 2A = \frac{1}{c^2} \frac{A}{6} \quad (3.142)$$

Entonces la matriz de masa es

$$\mathbf{M}^e = \frac{A}{12c^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.143)$$

La matriz de rigidez es dada por

$$\mathbf{K}^e = \left[\int_S \left(\nabla \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \right)^T \quad \nabla \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \quad dS \right] \quad (3.144)$$

$$k_{ij}^e = \int_S \left(\nabla_{xy} \hat{N}_i(\mathbf{x}) \right)^T \quad \nabla_{xy} \hat{N}_j(\mathbf{x}) \quad dS \quad (3.145)$$

Recordemos que

$$\nabla_{xy} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \right]^T \quad (3.146)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial L_j}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_j} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial L_j}{\partial y} \frac{\partial}{\partial L_j} \end{aligned} \quad (3.147)$$

Usando la definición de L_j , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{2A} \sum_{j=1}^3 a_j \frac{\partial}{\partial L_j} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{2A} \sum_{j=1}^3 b_j \frac{\partial}{\partial L_j} \end{aligned} \quad (3.148)$$

Y como N_j e L_j son iguales entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_j}{\partial x} &= \begin{cases} \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial N_j}{\partial L_i} = \frac{a_j}{2A} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \\ \frac{\partial N_j}{\partial y} &= \begin{cases} \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial N_j}{\partial L_i} = \frac{b_j}{2A} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \end{aligned} \quad (3.149)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_j}{\partial x} &= \frac{a_j}{2A} \\ \frac{\partial N_j}{\partial y} &= \frac{b_j}{2A} \end{aligned} \quad (3.150)$$

Por lo tanto, al incorporar esto en la matriz de rigidez tenemos:

$$\mathbf{K}^e = \left[\int_S \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} dS \right] \quad (3.151)$$

Como son elementos constantes, salen de la integral y esta corresponde al área del triángulo tenemos:

$$\mathbf{K}^e = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \left[\int_S dS \right] \quad (3.152)$$

$$\mathbf{K}^e = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \quad (3.153)$$

$$\mathbf{K}^e = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} a_1 a_1 + b_1 b_1 & a_1 a_2 + b_1 b_2 & a_1 a_3 + b_1 b_3 \\ a_2 a_1 + b_2 b_1 & a_2 a_2 + b_2 b_2 & a_2 a_3 + b_2 b_3 \\ a_3 a_1 + b_3 b_1 & a_3 a_2 + b_3 b_2 & a_3 a_3 + b_3 b_3 \end{bmatrix} \quad (3.154)$$

Donde a_i y b_i han sido definidos con anterioridad. En este momento podemos ver las enormes ventajas de definir este sistema de coordenadas. A continuación, trabajaremos la matriz de amortiguamiento para cada uno de los lados del triángulo. La matriz de amortiguamiento elemental tomará la forma básica de

$$\mathbf{C}^e = \int_{C_R} \rho_0(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) dC \quad (3.155)$$

$$c_{ij}^e = \int_{C_R} \rho_0(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) \hat{N}_i(\mathbf{x}) \hat{N}_j(\mathbf{x}) dC \quad (3.156)$$

Podemos considerar, a modo de ejemplo, el caso donde la admitancia esté en uno de los lados del triángulo y las propiedades del material y de su contorno sean constantes. Debemos definir las coordenadas lineales correspondientes. Entonces para un punto P tenemos las siguientes coordenadas

$$L_2 = \frac{l_2}{l_{23}} \quad L_3 = \frac{l_3}{l_{23}} \quad L_2 + L_3 = 1 \quad (3.157)$$

$$c_{ij}^e = \rho_0 Y \int_{C_R} \hat{N}_i(\mathbf{x}) \hat{N}_j(\mathbf{x}) dC_R = \rho_0 Y \int_{C_R} L_i(\mathbf{x}) L_j(\mathbf{x}) dC \quad (3.158)$$

Podemos usar la fórmula

$$\int_{C_R} L_2^n(\mathbf{x}) L_3^p(\mathbf{x}) dC = \frac{n! p!}{(n + p + 1)!} l_{23} \quad (3.159)$$

Donde la longitud del lado 23 del triángulo es:

$$l_{23} = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} \quad (3.160)$$

Y por lo tanto incorporar esto en cada elemento de la matriz de amortiguamiento

$$\int_{C_R} L_2^2(\mathbf{x}) dC = \frac{2! 1!}{(1 + 0 + 1)!} l_{23} = \frac{2}{6} l_{23} = \frac{1}{3} l_{23} \quad (3.161)$$

$$\int_{C_R} L_2^1(\mathbf{x}) L_3^1(\mathbf{x}) dC = \frac{1! 1!}{(1 + 1 + 1)!} l_{23} = \frac{1}{6} l_{23} \quad (3.162)$$

$$\int_{C_R} L_3^2(\mathbf{x}) dC = \frac{0! 2!}{(1 + 1 + 1)!} l_{23} = \frac{2}{6} l_{23} = \frac{1}{3} l_{23} \quad (3.163)$$

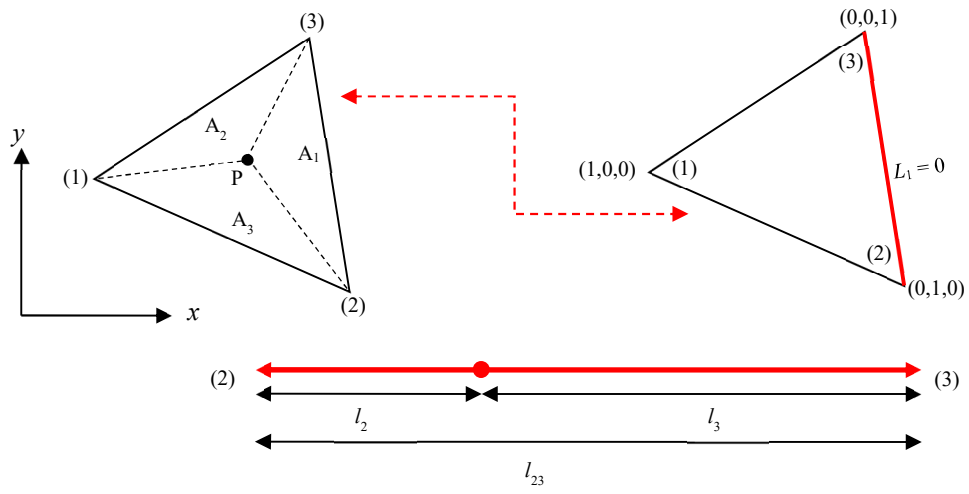


Figura 3.10. Definición de coordenadas de longitud para un lado de un triángulo

Entonces para el lado 23 (rojo) en particular la matriz de amortiguamiento elemental es

$$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y}{6} l_{23} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.164)$$

$$l_{23} = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$$

Para el lado 12

$$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y}{6} l_{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.165)$$

$$l_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

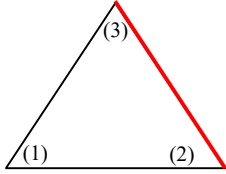
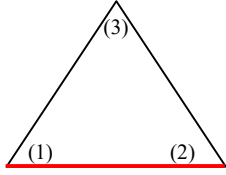
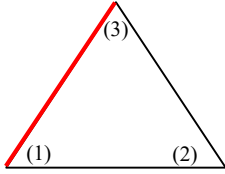
Para el lado 31

$$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y}{6} l_{31} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.166)$$

$$l_{31} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$$

Podemos resumir estos resultados en la tabla 5.3.

Tabla 5.3. Matrices de Amortiguamiento Elemental – Elemento Triangular

Condición de Contorno de Impedancia	Matriz de Amortiguamiento Elemental
	$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y}{6} l_{23} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
	$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y}{6} l_{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
	$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y}{6} l_{31} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Por otra parte, el vector de fuerzas es en términos generales dado por:

$$f^e(t) = - \int_{C_N} \hat{\mathbf{N}}^T(\mathbf{x}) \rho_0 \ddot{u}_n(\mathbf{x}, t) dC + \int_S \hat{\mathbf{N}}^T(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial G(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \right) dS \quad (3.167)$$

La primera integral toma en cuenta las fuerzas corporales en términos elementales es:

$$f_1^e(t) = \int_S \hat{N}_i(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial G(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \right) dS \quad (3.168)$$

En el caso de que la excitación fuera constante en el elemento tenemos

$$f_{i1}^e(t) = \left(\frac{\partial G(t)}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{F}(t) \right) \int_S \hat{N}_i(\mathbf{x}) dS = \left(\frac{\partial G(t)}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{F}(t) \right) \int_S L_i(\mathbf{x}) dS \quad (3.169)$$

Específicamente la integral

$$\int_S L_i(\mathbf{x}) dS = \frac{1! 0! 0!}{(1 + 0 + 0 + 2)!} 2A = \frac{1}{3} A \quad (3.170)$$

Entonces esta parte del vector de fuerzas es

$$\mathbf{f}_1^e(t) = \frac{A}{3} \left(\frac{\partial G(t)}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{F}(t) \right) [1 \quad 1 \quad 1]^T \quad (3.171)$$

Cuando el estímulo proviene del contorno y la aceleración y otras propiedades son constantes en el elemento tenemos:

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{C_N} N_i(\mathbf{x}) dC_N = -\rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{C_N} L_i(\mathbf{x}) dC \quad (3.172)$$

Podemos usar la expresión para el lado 23

$$\int_{C_N} L_2^n(\mathbf{x}) L_3^p(\mathbf{x}) dC = \frac{n! p!}{(n+p+1)!} l_{23} \quad (3.173)$$

En este caso tenemos

$$\int_{C_N} L_i(\mathbf{x}) dC_N = \frac{1! 0!}{(1+0+1)!} l_{23} = \frac{l_{23}}{2} \quad (3.174)$$

Y el correspondiente componente elemental del vector de fuerza

$$\mathbf{f}_2^e(t) = -\frac{1}{2} \rho_0 \dot{u}_n(t) l_{23} [0 \quad 1 \quad 1]^T \quad (3.175)$$

Para los lados 12 y 31 tenemos respectivamente

$$\mathbf{f}_2^e(t) = -\frac{1}{2} \rho_0 \dot{u}_n(t) l_{12} [1 \quad 1 \quad 0]^T \quad (3.176)$$

$$\mathbf{f}_2^e(t) = -\frac{1}{2} \rho_0 \dot{u}_n(t) l_{31} [1 \quad 0 \quad 1]^T \quad (3.177)$$

3.8. INCREMENTANDO LA EXACTITUD DE LOS ELEMENTOS

De igual forma que en el capítulo anterior podemos elevar la calidad de la resolución elevando el grado de los polinomios que forman las funciones de interpolación en los elementos. Una de las formas más directas es usar funciones bicuadráticas a partir de los polinomios lagrangianos obteniendo un elemento rectangular de nueve nodos como es mostrado en la ecuación (3.178) y en la figura 3.9

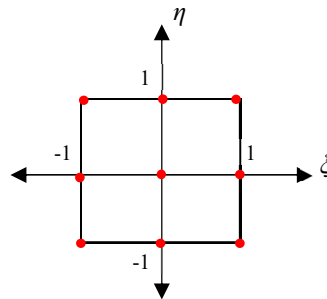


Figura 3.8. Elemento lagrangiano de nueve nodos

$$p = p(x, y, t) \approx \sum_{i=1}^9 \hat{N}_i(x, y) \hat{p}_i(t) = \sum_{i=1}^9 \hat{N}_i(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \hat{p}_i(t)$$

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \xi (1 - \xi) \eta (1 - \eta)$$

$$N_2(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} \xi (1 - \xi) (1 - \eta^2)$$

$$N_3(\xi, \eta) = -\frac{1}{4} \xi (1 - \xi) \eta (1 + \eta)$$

$$N_4(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} (1 - \xi^2) \eta (1 - \eta)$$

$$N_5(\xi, \eta) = (1 - \xi^2) (1 - \eta^2)$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) \eta (1 + \eta)$$

$$N_7(\xi, \eta) = -\frac{1}{4} \xi (1 + \xi) \eta (1 - \eta)$$

$$N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \xi (1 + \xi) (1 - \eta^2)$$

$$N_9(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \xi (1 + \xi) \eta (1 + \eta)$$
(3.178)

Si el elemento es rectangular se puede usar las transformaciones especificadas en las ecuaciones (3.059) y optar por un esquema de integración (3 X 3) para las matrices de masa y rigidez. En el caso de desear un cuadrilátero formado por secciones curvas, podemos mapear el elemento mediante la isoparametrización de sus coordenadas como se observa en las ecuaciones (3.179) y en la figura 3.9

$$x = x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^9 \hat{N}_i(\xi, \eta) x_i$$

$$y = y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^9 \hat{N}_i(\xi, \eta) y_i$$
(3.179)

Para esta situación se recomienda usar esquemas de integración de (4 X4) tanto para las matrices de masa como la de rigidez

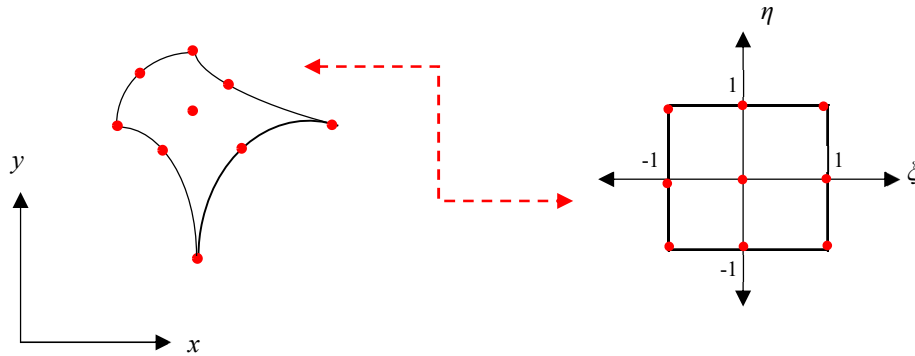


Figura 3.9. Modelo Acústico Cuadrilateral Isoparamétrico de nueve nodos - Mapeamiento a Elemento Finito Patrón

Podemos generar mayor exactitud en los elementos triangulares usando las funciones de interpolación definidas en la sección 3.7

$$p = p(x, y, t) \approx \sum_{i=1}^6 \hat{N}_i(x, y) \hat{p}_i(t)$$

$$\hat{N}_i = L_j(2L_j - 1) \quad j = 1, 2, 3$$

$$\hat{N}_4 = 4L_1L_2$$

$$\hat{N}_5 = 4L_2L_3$$

$$\hat{N}_6 = 4L_3L_1$$
(3.180)

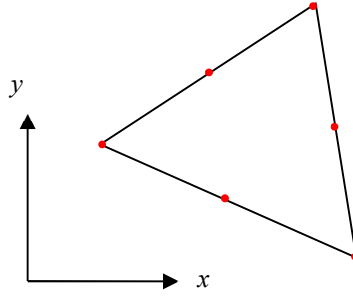


Figura 3.10. Elemento triangular de seis nodos

El proceso de integración se ejecuta de manera similar a la sección 3.7 de este capítulo. Este elemento puede ser usado en casos curvos mediante la transformación de la ecuación (3.181) usando las ecuaciones definidas en (3.180).

$$x = x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^6 \hat{N}_i(\xi, \eta) x_i$$

$$y = y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^6 \hat{N}_i(\xi, \eta) y_i$$
(3.181)

Las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento se pueden evaluar usando las expresiones (3.091), (3.100) y (3.107) si las coordenadas (ξ, η) son definidas

$$L_1 = \xi$$

$$L_2 = \eta$$

$$L_3 = 1 - \xi - \eta$$
(3.181)

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial L_1} - \frac{\partial}{\partial L_3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial L_2} - \frac{\partial}{\partial L_3}$$
(3.182)

Se usa integración numérica para evaluar las matrices de masa y rigidez, si bien los detalles serán expuestos más adelante, podemos decir que para la matriz de masa son necesarios doce puntos de integración y para la matriz de rigidez como mínimo deben ser tres.

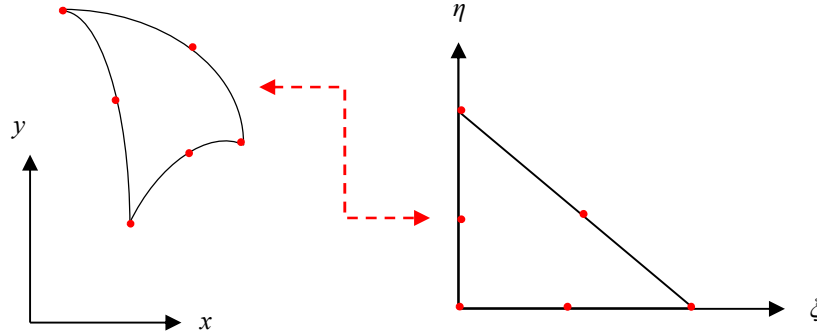


Figura 3.11. Elemento triangular de seis nodos - Mapeamiento

3.9. EJEMPLO DE APLICACIÓN: DETERMINACIÓN DE LA RESPUESTA DE UN RECINTO A PARTIR MÉTODOS ANALÍTICOS Y DE ELEMENTOS FINITOS

Consideremos un recinto que posea un par de superficies idénticas y paralelas como es ejemplificado en la siguiente figura 3.9. Asumiremos por propósitos de simplificación que no hay absorción en ninguna de las superficies del recinto, la fuente puede ser considerada como puntual. Luego la ecuación de onda y la respectiva condición de contorno son

Consideremos un recinto que posea un par de superficies idénticas y paralelas como es ejemplificado en la siguiente figura 3.9. Asumiremos por propósitos de simplificación que no hay absorción en ninguna de las superficies del recinto, la fuente puede ser considerada como puntual. Luego la ecuación de onda y la respectiva condición de contorno son

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.183)$$

$$\nabla p \cdot \hat{n} = 0$$

Al suponer una solución armónica la anterior ecuación se convierte en la ecuación de Helmholtz y al usar variables separables tenemos

$$p(x, y, z, t) = P(x, y, z) e^{j\omega t} \quad (3.184)$$

Donde $k = \omega/c$

$$\nabla^2 P + k^2 P = 0 \quad (3.185)$$

$$\nabla P \cdot \hat{n} = 0$$

$$P(x, y, z) = P_{xy}(x, y) P_z(z) \quad (3.186)$$

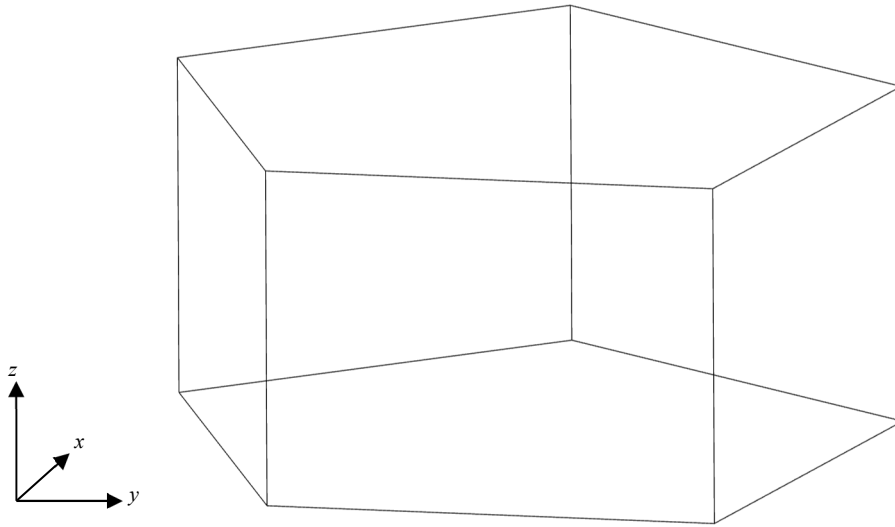


Figura 3.12. Recinto de superficies paralelas

Entonces tenemos dos ecuaciones, la primera está relacionada con la geometría irregular en dos dimensiones, la que con su respectiva condición de contorno es:

$$\begin{aligned}\nabla^2 P_{xy} + k_{xy}^2 P_{xy} &= 0 \\ \nabla P_{xy} \cdot \hat{n} &= 0\end{aligned}\tag{3.187}$$

Esta puede ser resuelta de manera numérica por el método de los elementos finitos en dos dimensiones. Es decir, obtenemos el problema de valores propios, el cual puede ser resuelto por diversos métodos computacionales disponibles

$$\mathbf{K}\varphi = k_{xy}^2 \mathbf{M}\varphi\tag{3.188}$$

Mientras que la segunda ecuación con su condición de contorno se expresa como

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P_z}{\partial z^2} + k_z^2 P_z &= 0 \\ \frac{\partial P_z}{\partial z}\bigg|_{z=0} &= \frac{\partial P_z}{\partial z}\bigg|_{z=L_z} = 0\end{aligned}\tag{3.189}$$

El conjunto de soluciones de carácter analítico es ampliamente conocido

$$\begin{aligned}P_z(z) &= A_{n_z} \cos(k_z z) \\ k_z &= \frac{n_z \pi}{L_z} \\ n_z &= 0, 1, 2, 3, \dots\end{aligned}\tag{3.190}$$

Por lo tanto, las frecuencias naturales pueden ser calculadas como.

$$\omega_{n_{xy}n_z} = c \sqrt{k_{xy}^2 + k_z^2} \quad (3.191)$$

Entonces si una fuente puntual ideal está ubicada en $\mathbf{x}_1 = [x_1, y_1, z_1]^T$ y el punto de recepción está en $\mathbf{x}_2 = [x_2, y_2, z_2]^T$, entonces la presión sonora puede estimarse usando

$$p(x, y, z, \omega) = \sum_{n_{xy}=1}^{N_{xy}} \sum_{n_z=0}^{N_z} A(\omega) \frac{\phi_{rn_{xy}} \cos(k_z z_1) \phi_{sn_{xy}} \cos(k_z z_2)}{\omega^2 - \omega_{n_{xy}n_z}^2} \quad (3.192)$$

Donde la coordenada modal r está asociada al punto $\mathbf{x}_1$ sin considerar la altura $[x_1, y_1]^T$ y la coordenada s está asociada al punto $\mathbf{x}_2$ de la misma forma, es decir $[x_2, y_2]^T$. La función $A(\omega)$ depende de las características de la fuente.

Podemos ver la comparación de los resultados analíticos dados por la clásica fórmula de la ecuación (4.136) y los resultados dados por (4.134), para las diez primeras frecuencias de resonancia de un recinto rectangular de dimensiones $L_x = 5.4$ [m] $L_y = 11.2$ [m] $L_z = 5.3$ [m]

Tabla 3.3. Frecuencias Teóricas y Elementos Finitos

f Teórica [Hz]	f FEM [Hz]	Error (%)
15,36	15,36	0,01
30,71	30,73	0,06
32,45	31,87	1,78
35,90	35,90	0,00
44,68	44,70	0,03
45,90	45,49	0,89
46,07	46,13	0,14
48,40	48,02	0,79
55,22	54,91	0,56
56,35	56,41	0,09

3.10. EJEMPLO DE APLICACIÓN: RESPUESTA DE UNA MEMBRANA BAJO UN CAMPO SONORO

Considerando las similitudes y diferencias, los resultados obtenidos mediante el método de los elementos finitos en la resolución de la ecuación de onda acústica en dos dimensiones, puede ser utilizada para determinar el comportamiento de una membrana excitada por un campo sonoro uniforme. Una de las aplicaciones más importantes es el de generar un modelo que pueda explicar el comportamiento de la membrana de un micrófono. Este será desarrollado bajo ciertas hipótesis simplificadoras, de manera más específica podemos decir que no se considerará el acoplamiento entre la vibración de la membrana, el campo sonoro de la cavidad y otros efectos asociados a la transducción electroacústica. Además, la membrana será excitada por ondas planas en incidencia normal. En este caso trataremos con una membrana de las siguientes características: Radio $r = 10$ [mm], velocidad de ondas en la membrana $c = 842.6$ [m/s] la amplitud de la presión sonora incidente es $P = 1.0$ [Pa].

Se ha calculado el desplazamiento en función de la frecuencia para un punto de la membrana con ubicación $x_1 = 0.0020$ [m] e $y_1 = -0.0070$ [m] donde se puede observar que la primera resonancia está aproximadamente a los 30000 [Hz], bastante por encima del rango de la escucha humana y que la respuesta hasta los 20000 [Hz] es bastante plana.

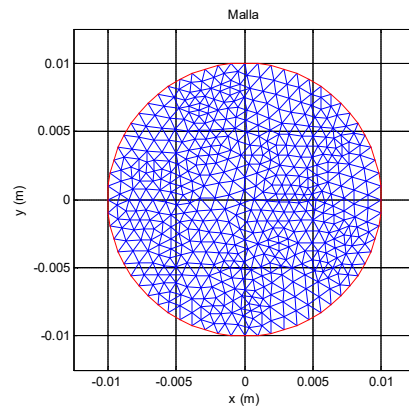


Figura 3.13. Geometría y malla de la membrana

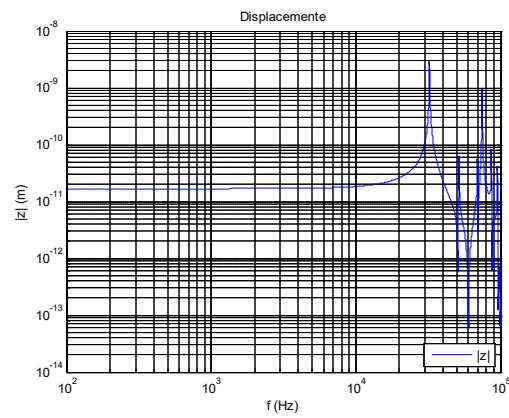


Figura 3.14. Desplazamiento de la membrana en el punto e x_1 0.0020 [m] e y_1 = -0.0070 [m]