

CAPÍTULO IV
ELEMENTOS FINITOS EN PROBLEMAS
ACÚSTICOS EN TRES DIMENSIONES

4. ELEMENTOS FINITOS EN PROBLEMAS ACÚSTICOS EN TRES DIMENSIONES

4.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo nos centraremos en obtener la formulación débil o integral de la ecuación de onda usaremos el método de Galerkin (Marburg y Nolte, 2008) para poder discretizar las ecuaciones integrales resultantes, incorporaremos diversas fuentes y campos sonoros incidentes y finalmente determinaremos las matrices asociadas a los sistemas de ecuaciones resultantes. Consideraremos en esta etapa solamente problemas interiores, es decir que en esta parte del proceso existirá de algún tipo de frontera que puede ser modelada por medio de condiciones de Dirichlet, Neumann, Robin o una combinación de todas ellas. Los problemas exteriores serán parte de una sección posterior en este escrito.

Si bien existen variadas soluciones de orden analítico para algunas de estas condiciones de contorno, en la mayoría de los casos de interés en el área de la ingeniería, se deben usar métodos numéricos para encontrar soluciones aproximadas que den cuenta del problema en cuestión. El objetivo de este capítulo es presentar de manera general los procesos que forman parte del de la construcción de las ecuaciones asociadas a la formulación débil y su siguiente paso, la discretización, a fin de establecer los elementos básicos del Método de los Elementos Finitos (FEM) en el área de la acústica, (Givoli, 1992; Ihlenburg, 1998).

En este capítulo la formulación débil y la discretización serán presentados en forma general y serán particularizados a medida que se analicen con detalles los diversos casos en secciones posteriores. Como resultado se obtendrán matrices de masa acústica, amortiguamiento y rigidez acústicos, así mismo se incorporarán diversas fuerzas corporales y/o fuentes tales como superficies vibrantes.

Esto trae como consecuencia el convertir una ecuación diferencial en derivadas parciales a un sistema de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes. Además, la expresión de dicho sistema de ecuaciones como un conjunto de matrices, permite extraer diversas propiedades del sistema acústico tales como frecuencias naturales, modos normales de vibración y amortiguamiento modal entre otras. Esta forma de plantear el problema acústico permite utilizar extensas bibliotecas dedicadas a resolver este tipo de problemas, mediante métodos numéricos asociados principalmente al álgebra lineal computacional.

Como resultado, el Método de los Elementos Finitos (FEM) permite construir diversas visualizaciones de la solución del campo sonoro, las que nos ayudan a obtener importante información adicional, más allá de la presión sonora o los niveles de presión y que muchas veces en la solución analítica es más difícil de interpretar.

Es natural, sin embargo, que el proceso de discretización traiga en sí mismo una importante limitación, esto se debe a que un problema expresado a partir de la formulación diferencial continua posee infinitos grados de libertad, mientras que la formulación del mismo problema en términos de elementos finitos posee un número de grados de libertad limitados. En la práctica, esto significa que en altas frecuencias este método es poco aplicable e inexacto, porque a mayor frecuencia se debe usar mayor discretización y utilizar de manera excesiva los recursos computacionales para el análisis. Sin embargo, existen diversos avances en esta área a fin de extender el rango de frecuencia usando métodos como EFEM (Bitsie F, Bernhard RJ, 1998; Wang et. al., 2004)). Por otra parte, siempre es posible extender dicho rango de frecuencia utilizando simetrías geométricas u otras propiedades de los sistemas sonoros, a fin de obtener los modelos y predicciones que permitan diseñar soluciones y estudiar los fenómenos asociados a ellos. Además, hay que considerar otros aspectos que proporcionan una enorme ventaja a este método y es la posibilidad de incorporar problemas donde el medio es no homogéneo, interacción fluido estructura, y situaciones donde la

geometría es compleja. Es por estas razones es importante dedicar esfuerzos a este tipo de metodologías y poder incorporarlas a los procesos de formación en el área del sonido.

4.2. ECUACION DE ONDA ACÚSTICA: FORMULACIÓN DÉBIL

Tomemos la ecuación de onda, sin considerar en esta etapa las condiciones iniciales.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = 0 \quad (4.001)$$

Multipliquémosla por la función de peso/variación δp , que corresponde a una perturbación, la cual es compatible con todas las condiciones de contorno e integremos respecto al volumen

$$\int_V \delta p \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p \right] dV = 0 \quad (4.002)$$

Separamos la integral y entonces para la variación y el gradiente de la presión sonora tenemos

$$\delta p \nabla^2 p = \nabla \cdot (\delta p \nabla p) - \nabla(\delta p) \cdot \nabla p \quad (4.003)$$

Al remplazar

$$\int_V \delta p \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dV + \int_V \nabla(\delta p) \cdot \nabla p dV - \int_V \nabla \cdot (\delta p \nabla p) dV = 0 \quad (4.004)$$

Además, la última integral puede ser transformada de usando una forma bidimensional del Teorema de Gauss

$$\int_V \delta p \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dV + \int_V \nabla(\delta p) \cdot \nabla p dV - \int_S \delta p \nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \quad (4.005)$$

Si separamos la integral de línea en las distintas regiones que implican las condiciones de contorno tenemos

$$\begin{aligned} \int_S \delta p \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dV + \int_S \nabla(\delta p) \cdot \nabla p dV - \int_{S_N} \delta p \nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} dS - \int_{S_{N_0}} \delta p \nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\ - \int_{S_R} \delta p \nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \end{aligned} \quad (4.006)$$

La contribución de la integral de superficie calculada sobre la superficie S_{N_0} en la ecuación (4.006) es nula, puesto que representa la componente normal de la velocidad de partículas sobre una pared rígida.

$$\int_{S_{N_0}} \delta p \nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \quad (4.007)$$

Usando la ecuación de fuerza lineal y efectuando el producto interno por el vector normal a la frontera obtenemos:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (4.008)$$

Al mismo tiempo, al asumir la solución armónica en la ecuación (4.019) tenemos que:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{j\omega t} \cdot \hat{\mathbf{n}} = u_n(\mathbf{x}) e^{j\omega t} \quad (4.009)$$

$$\nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -j\omega \rho_0 u_n \quad (4.010)$$

Y podemos entonces, incorporar fuentes vibratorias ubicadas en la frontera del dominio. Además, la relación de impedancia/admitancia nos permite aplicar la condición de contorno de Robin en la ecuación (4.017)

$$\nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} = -j\omega \rho_0 Y p \quad (4.011)$$

Obtenemos entonces

$$\int_V \delta p \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dV + \int_V \nabla(\delta p) \cdot \nabla p dV + \int_{S_N} \delta p j\omega \rho_0 u_n dS + \int_{S_R} \delta p j\omega \rho_0 Y p dS = 0 \quad (4.012)$$

Por otra parte, en la ecuación (4.023), podemos incluir la derivada parcial con respecto al tiempo de la presión sonora, ya que asumimos la solución armónica

$$p(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}) e^{j\omega t} \quad (4.013)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = j\omega p(\mathbf{x}, t) \quad (4.014)$$

Reemplazamos y ordenamos

$$\int_V \delta p \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dV + \int_{S_R} \rho_0 Y \delta p \frac{\partial p}{\partial t} dS + \int_V \nabla(\delta p) \cdot \nabla p dV + \int_{S_N} j\omega \rho_0 \delta p u_n dS = 0 \quad (4.015)$$

Y finalmente obtenemos la **Ecuación de Onda: Formulación Débil**

$$\int_V \delta p \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dV + \int_{S_R} \rho_0 Y \delta p \frac{\partial p}{\partial t} dS + \int_V \nabla(\delta p) \cdot \nabla p dV = - \int_{S_N} j\omega \rho_0 \delta p u_n dS = 0 \quad (4.016)$$

En este caso se puede incluir en el problema de forma explícita la dependencia de la posición y del tiempo en la ecuación correspondiente, cuando consideramos la densidad y la velocidad del sonido como dependientes de la posición. En este caso estamos frente a un medio no homogéneo y dispersivo, esto último puede dar paso a considerar materiales absorbentes y/o disipación en el medio. En forma explícita tenemos.

$$\begin{aligned}
& \int_V \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \delta p(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} dV \\
& + \int_{S_R} \rho_0(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) \delta p(\mathbf{x}, t) \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dS + \int_V \nabla(\delta p(\mathbf{x}, t)) \cdot \nabla p(\mathbf{x}, t) dV \quad (4.017) \\
& = - \int_{S_N} j\omega \rho_0(\mathbf{x}) \delta p(\mathbf{x}, t) u_n(\mathbf{x}, t) dS
\end{aligned}$$

O bien

$$\begin{aligned}
& \int_V \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \delta p(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} dV \\
& + \int_{S_R} \rho_0(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) \delta p(\mathbf{x}, t) \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dS + \int_V \nabla(\delta p(\mathbf{x}, t)) \cdot \nabla p(\mathbf{x}, t) dV \quad (4.018) \\
& = - \int_{S_N} \rho_0(\mathbf{x}) \delta p(\mathbf{x}, t) \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) dS
\end{aligned}$$

Donde este último término representa la excitación del sistema por el movimiento prescrito de una región que forma parte de la interfaz en el contorno

$$f = - \int_{S_N} j\omega \rho_0(\mathbf{x}) \delta p(\mathbf{x}, t) u_n(\mathbf{x}, t) dS = - \int_{S_N} \rho_0(\mathbf{x}) \delta p(\mathbf{x}, t) \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) dS \quad (4.019)$$

4.3. DISCRETIZACIÓN

Partamos de la base que podemos utilizar una solución aproximada de la forma

$$p = p(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^N \hat{N}_i(\mathbf{x}) \hat{p}_i(t) = \sum_{i=1}^N \hat{N}_i(x, y, z) \hat{p}_i(t) \quad (4.020)$$

Donde

- $\hat{p}_i(t)$: son las presiones sonoras nodales expresadas de forma discreta en función del tiempo ($i = 1, \dots, N$)
- $\hat{N}_i(\mathbf{x})$: Son las funciones de interpolación ($i = 1, \dots, N$)
- N : Número de grados de libertad

La ecuación anterior se puede expresar de manera matricial

$$p = p(\mathbf{x}, t) \approx [\hat{N}_1(\mathbf{x}) \quad \hat{N}_2(\mathbf{x}) \quad \hat{N}_3(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \hat{N}_N(\mathbf{x})] \begin{bmatrix} \hat{p}_1(t) \\ \hat{p}_2(t) \\ \hat{p}_3(t) \\ \vdots \\ \hat{p}_N(t) \end{bmatrix} \quad (4.021)$$

Que en forma compacta se denota como:

$$p = p(\mathbf{x}, t) \approx \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{p}}(t) \quad (4.022)$$

Por otra parte, la variación de la presión sonora se puede también aproximar de manera similar

$$\delta p = \delta p(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^N \hat{N}_i(\mathbf{x}) \delta \hat{p}_i(t) = \sum_{i=1}^N \hat{N}_i(x, y, z) \delta \hat{p}_i(t) \quad (4.023)$$

$\delta \hat{p}_i(t)$: son las variaciones de las presiones sonoras nodales expresadas de forma discreta en función del tiempo ($i = 1, \dots, N$). En forma matricial esta queda conforme a la siguiente ecuación

$$\delta p = \delta p(\mathbf{x}, t) \approx [\hat{N}_1(\mathbf{x}) \quad \hat{N}_2(\mathbf{x}) \quad \hat{N}_3(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \hat{N}_N(\mathbf{x})] \begin{bmatrix} \delta \hat{p}_1(t) \\ \delta \hat{p}_2(t) \\ \delta \hat{p}_3(t) \\ \vdots \\ \delta \hat{p}_N(t) \end{bmatrix} \quad (4.024)$$

Que en forma compacta se ve conforme a la expresión (4.034)

$$\delta p = \delta p(\mathbf{x}, t) \approx \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \delta \hat{\mathbf{p}}(t) \quad (4.025)$$

En relación con la estructura de este texto se hará necesario derivar las matrices de masa, rigidez, amortiguamiento y el vector de fuerza por separado, con el objetivo de simplificar la comprensión, no solamente de este capítulo si no que también de los diversos temas que serán abordados en este libro.

4.3.1. MATRIZ DE MASA

Comenzaremos reemplazando las aproximaciones a la presión y a la variación de la presión, conforme se ha descrito en la sección anterior, en la primera integral que forma parte de la ecuación (4.026)

$$\int_V \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \delta p(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} dV \approx \int_V \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} [\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \delta \hat{\mathbf{p}}(t)] \left[\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \frac{d^2}{dt^2} \hat{\mathbf{p}}(t) \right] dV \quad (4.026)$$

$$\int_V \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} [\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \delta \hat{\mathbf{p}}(t)]^T \left[\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \frac{d^2}{dt^2} \hat{\mathbf{p}}(t) \right] dV \quad (4.027)$$

Reescribimos

$$\int_V \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \delta \hat{\mathbf{p}}^T(t) \hat{\mathbf{N}}^T(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \frac{d^2}{dt^2} \hat{\mathbf{p}}(t) dV \quad (4.028)$$

Extrayendo los términos que solamente dependen del tiempo fuera de la integral

$$\delta \hat{\mathbf{p}}^T(t) \left[\int_V \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \hat{\mathbf{N}}^T(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) dV \right] \frac{d^2}{dt^2} \hat{\mathbf{p}}(t) \quad (4.029)$$

$$\delta \hat{\mathbf{p}}^T(t) \left[\int_V \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \hat{\mathbf{N}}^T(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) dV \right] \ddot{\hat{\mathbf{p}}}(t) \quad (4.030)$$

$$\delta \hat{\mathbf{p}}^T(t) \mathbf{M} \ddot{\hat{\mathbf{p}}}(t) \quad (4.031)$$

$$\mathbf{M} = \left[\int_V \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \hat{\mathbf{N}}^T(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) dV \right] \quad (4.032)$$

En detalle, cada elemento de la matriz es dado por:

$$m_{ij} = \int_V \frac{1}{c(\mathbf{x})^2} \hat{N}_i(\mathbf{x}) \hat{N}_j(\mathbf{x}) dV \quad (4.033)$$

4.3.2. MATRIZ DE RIGIDEZ

Al igual que en la sección anterior, donde se derivó la matriz de masa, empezaremos reemplazando las aproximaciones a la presión y a la variación de la presión, en la tercera integral que forma parte de la ecuación (4.026)

$$\int_V \nabla(\delta p(\mathbf{x}, t)) \cdot \nabla p(\mathbf{x}, t) dV \approx \int_V \nabla(\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \delta \hat{\mathbf{p}}(t)) \cdot \nabla(\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{p}}(t)) dV \quad (4.034)$$

$$\int_V \left[\nabla(\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \delta \hat{\mathbf{p}}(t))^T \right] \left[\nabla(\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{p}}(t)) \right] dV \quad (4.035)$$

$$\int_V \delta \hat{\mathbf{p}}^T(t) (\nabla \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}))^T \nabla \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{p}}(t) dV \quad (4.036)$$

Extraemos los elementos dependientes del tiempo fuera de la integral

$$\delta \hat{\mathbf{p}}^T(t) \left[\int_V (\nabla \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}))^T \nabla \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) dV \right] \hat{\mathbf{p}}(t) \quad (4.037)$$

Y obtenemos de manera concisa la ecuación

$$\delta \hat{\mathbf{p}}^T(t) \mathbf{K} \hat{\mathbf{p}}(t) \quad (4.038)$$

Donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez

$$\mathbf{K} = \left[\int_V (\nabla \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}))^T \nabla \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) dV \right] \quad (4.039)$$

En detalle cada elemento de esta matriz es

$$k_{ij} = \int_V (\nabla \hat{N}_i(\mathbf{x}))^T \nabla \hat{N}_j(\mathbf{x}) dV \quad (4.040)$$

Recordemos que el operador ∇ está dado por el conjunto de derivadas parciales

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right]^T \quad (4.041)$$

Por lo tanto, cada elemento de matriz de rigidez es dado por

$$k_{ij} = \int_V \left[\frac{\partial \hat{N}_i(\mathbf{x})}{\partial x} \quad \frac{\partial \hat{N}_i(\mathbf{x})}{\partial y} \quad \frac{\partial \hat{N}_i(\mathbf{x})}{\partial z} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{N}_j(\mathbf{x})}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{N}_j(\mathbf{x})}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{N}_j(\mathbf{x})}{\partial z} \end{bmatrix} dV \quad (4.042)$$

O bien se puede expresar de manera más clara como:

$$k_{ij} = \int_V \frac{\partial \hat{N}_i(\mathbf{x})}{\partial x} \frac{\partial \hat{N}_j(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial \hat{N}_i(\mathbf{x})}{\partial y} \frac{\partial \hat{N}_j(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial \hat{N}_i(\mathbf{x})}{\partial z} \frac{\partial \hat{N}_j(\mathbf{x})}{\partial z} dV \quad (4.043)$$

En forma extendida, también podemos decir que los elementos de la matriz de rigidez son:

4.3.3. MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO

Reemplazando la discretización en la segunda integral de la ecuación (4.026) podemos obtener la matriz de amortiguamiento

$$\int_{S_R} \rho_0(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) \delta p(\mathbf{x}, t) \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dS \approx \quad (4.044)$$

$$\approx \int_{S_R} \rho_0(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) [\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \delta \hat{\mathbf{p}}(t)]^T \left[\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{p}}(t) \right] dS \quad (4.045)$$

Extrayendo los elementos que solamente dependen del tiempo

$$\int_{S_R} \rho_0(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T \delta \hat{\mathbf{p}}(t)^T \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{p}}(t) dS \quad (4.046)$$

$$\delta \hat{\mathbf{p}}(t)^T \left[\int_{S_R} \rho_0(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) dS \right] \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{p}}(t) \quad (4.047)$$

$$\delta \hat{\mathbf{p}}(t)^T \left[\int_{S_R} \rho_0(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) dS \right] \dot{\hat{\mathbf{p}}}(t) \quad (4.048)$$

Donde

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}}(t) = \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{p}}(t)$$

Podemos expresar de manera compacta la ecuación anterior y tenemos

$$\mathbf{C} = \left[\int_{S_R} \rho_0(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) dS \right] \quad (4.049)$$

$$\delta \hat{\mathbf{p}}(t)^T \mathbf{C} \dot{\hat{\mathbf{p}}}(t) \quad (4.050)$$

En forma más específica los elementos de la matriz de amortiguamiento son

$$c_{ij} = \int_{S_R} \rho_0(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) \hat{N}_i(\mathbf{x})^T \hat{N}_j(\mathbf{x}) dS \quad (4.051)$$

4.3.4. VECTOR DE FUERZA

Al considerar que la componente normal de la velocidad de partículas en la interfaz sólido – fluido que por continuidad es la misma del sólido. Reemplazando en la integral la discretización de la presión sonora y su variación

$$u_n(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\partial \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (4.052)$$

Donde \mathbf{u}_s es el desplazamiento del sólido, esto quiere decir que u_n puede ser la componente normal de la velocidad de superficie de una fuente sonora vibrando, la cual es conocida

$$- \int_{S_N} \rho_0(\mathbf{x}) \delta p(\mathbf{x}, t) \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) \, dS \approx \quad (4.053)$$

$$\approx - \int_{S_N} \rho_0(\mathbf{x}) \left(\hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \delta \hat{\mathbf{p}}(t) \right)^T \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) \, dS \quad (4.054)$$

Extraemos términos que solamente dependen del tiempo

$$- \delta \hat{\mathbf{p}}(t)^T \int_{S_N} \rho_0(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) \, dS \quad (4.055)$$

Podemos identificar modo claro el vector de fuerza

$$\delta \hat{\mathbf{p}}(t)^T \left[- \int_{S_N} \rho_0(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) \, dS \right] \quad (4.056)$$

$$\delta \hat{\mathbf{p}}(t)^T \mathbf{f}(t) \quad (4.057)$$

$$\mathbf{f}(t) = - \int_{S_N} \rho_0(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) \, dS \quad (4.058)$$

Donde cada elemento es

$$f_i(t) = - \int_{S_N} \rho_0(\mathbf{x}) \hat{N}_i(\mathbf{x})^T \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) \, dS \quad (4.059)$$

Una expresión similar se puede derivar si existen otro tipo de fuentes, como aquellas que indican cambio de densidad $G(\mathbf{x}, t)$ y/o fuerzas corporales $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ distribuidas en el fluido. Entonces se puede agregar a la ecuación de onda en formulación fuerte

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (4.060)$$

En este caso el vector de fuerza en términos discretos queda como

$$\mathbf{f}(t) = - \int_{S_N} \rho_0(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) \, dS + \int_V \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T \left(\frac{\partial G(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \right) \, dV \quad (4.061)$$

Donde cada elemento se escribe como:

$$f_i(t) = - \int_{S_N} \rho_0(\mathbf{x}) \hat{N}_i(\mathbf{x}) \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) dS_N + \int_V \hat{N}_i(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial G(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \right) dV \quad (4.062)$$

$$f_i(t) = - \int_{S_N} \rho_0(\mathbf{x}) \hat{N}_i(\mathbf{x}) \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) dS_N + \int_V q(\mathbf{x}, t) \hat{N}_i(\mathbf{x}) dV \quad (4.062)$$

Donde $q(\mathbf{x}, t)$ corresponde a todo tipo de fuerzas corporales

$$q(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\partial G(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \right) \quad (4.062)$$

4.3.5. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

Juntamos todo lo visto en las secciones anteriores y vemos que tenemos la siguiente ecuación

$$\delta \hat{\mathbf{p}}^T(t) \{ \mathbf{M} \ddot{\hat{\mathbf{p}}}(t) + \mathbf{C} \dot{\hat{\mathbf{p}}}(t) + \mathbf{K} \hat{\mathbf{p}}(t) - \mathbf{f}(t) \} = \mathbf{0} \quad (4.063)$$

Considerando que el resultado de esta será nulo si y solamente si los elementos contenidos entre el paréntesis de llave son cero, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes, que en forma general se denota como:

$$\mathbf{M} \ddot{\hat{\mathbf{p}}}(t) + \mathbf{C} \dot{\hat{\mathbf{p}}}(t) + \mathbf{K} \hat{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (4.064)$$

Al incluir las condiciones iniciales $\hat{\mathbf{p}}(0) = \hat{\mathbf{p}}_0$ y $\dot{\hat{\mathbf{p}}}(0) = \dot{\hat{\mathbf{p}}}_0$ que corresponden a la presión inicial y la tasa de cambio de la presión inicial, ambas discretizadas

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \ddot{\hat{\mathbf{p}}}(t) + \mathbf{C} \dot{\hat{\mathbf{p}}}(t) + \mathbf{K} \hat{\mathbf{p}}(t) &= \mathbf{f}(t) \\ \hat{\mathbf{p}}(0) &= \hat{\mathbf{p}}_0 \\ \dot{\hat{\mathbf{p}}}(0) &= \dot{\hat{\mathbf{p}}}_0 \end{aligned} \quad (4.065)$$

4.4. CAVIDAD AXISIMÉTRICA

Ciertas cavidades, o espacios sonoros como un recinto, pueden analizarse utilizando elementos finitos tridimensionales. Estos pueden ser de forma tetraédrica, pentaédrica o hexaédrica. Sin embargo, si la estructura es axisimétrica, el análisis tridimensional puede ser reemplazado por una secuencia de problemas bidimensionales, a partir de expandir la excitación como una serie de Fourier en la coordenada circunferencial. Estos problemas pueden resolverse usando técnicas bidimensionales similares a las vistas en el capítulo anterior

Algunas cavidades tridimensionales poseen simetría axial, es decir su superficie puede ser generada al rotar una curva bidimensional alrededor de un eje de simetría, asumiendo que el eje de simetría es z , como es mostrado en la figura 4.1, entonces la solución en coordenadas cilíndricas es dada por la ecuación (4.091). Aún cuando el sólido sea axisimétrico la excitación, ya sea por fuerzas corporales o por la presencia de velocidad normal en la frontera, no son necesariamente axisimétricos.

$$u_n = \sum_{m=0}^{\infty} u_{nm}(r, z, t) \cos(m\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{u}_{nm}(r, z, t) \sin(m\theta) \quad (4.066)$$

$$q = \sum_{m=0}^{\infty} q_m(r, z, t) \cos(m\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{q}_m(r, z, t) \sin(m\theta) \quad (4.067)$$

Donde u_{nm} representa a los componentes simétricos de la distribución de velocidad y \bar{u}_{nm} los antisimétricos, de igual forma para las fuerzas corporales q_m y \bar{q}_m . La presión sonora es dada por (Petyt, 1983):

$$p = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(r, z, t) \cos(m\theta) \quad (4.068)$$

4.4.1. ELEMENTO TRIANGULAR

Inicialmente el tratar con una serie de Fourier puede parecer complejo, sin embargo, lo primero es establecer una solución de la forma

$$p_m(r, \theta, z) = p_n(r, z) \cos(m\theta) \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.069)$$

Se reemplazará esta solución en las expresiones generales de las matrices de masa, amortiguamiento, rigidez y vectores de fuerza y luego analizaremos nuevamente la ecuación de movimiento.

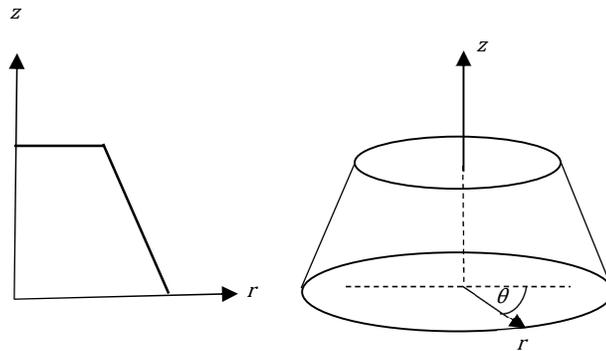


Figura 4.1. Sólido de revolución

Inicialmente usaremos elemento triangular e igual que en la sección 3.7 obtendremos la dependencia del tiempo a fin de concentrarnos en la claridad del proceso de obtención de las matrices elementales.

Como se trata de un elemento triangular asumiremos la expansión

$$p = p(r, z) \approx \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 z \quad (4.070)$$

Evaluando la presión sonora en cada nodo del elemento tenemos

$$\hat{p} = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 z \quad (4.071)$$

$$\hat{p}_3 = \alpha_1 + \alpha_2 r_3 + \alpha_3 z_3$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (4.072)$$

Luego los coeficientes son determinados al resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \end{bmatrix} \quad (4.073)$$

La inversa de la matriz está dada por

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} r_2 z_3 - z_2 r_3 & -r_1 z_3 + z_1 r_3 & r_1 z_2 - r_2 z_1 \\ -z_3 + z_2 & z_3 - z_1 & -z_2 + z_1 \\ r_3 - r_2 & -r_3 + r_1 & r_2 - r_1 \end{bmatrix} \quad (4.074)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} A_1^0 & A_2^0 & A_3^0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \quad (4.075)$$

Donde A es el área del triángulo dada por

$$A = \frac{1}{2} \det(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} (r_2 z_3 - z_2 r_3 - r_1 z_3 + z_1 r_3 + r_1 z_2 - z_1 r_2) \quad (4.076)$$

Entonces la presión sonora en el elemento es dada por:

$$p_m(r, \theta, z) = \hat{\mathbf{N}} \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \end{bmatrix} \cos(m\theta) = [1 \quad r \quad z] \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \end{bmatrix} \cos(m\theta) \quad (4.077)$$

Y las funciones de interpolación pueden ser construidas usando la siguiente ecuación

$$\hat{\mathbf{N}} = [\hat{N}_1 \quad \hat{N}_2 \quad \hat{N}_3] = [1 \quad r \quad z] \mathbf{A}^{-1} \cos(m\theta) \quad (4.078)$$

Entonces

$$\hat{N}_i = \frac{1}{2A} (A_i^0 + a_i r + b_i z) \cos(m\theta) = L_i(r, z) \cos(m\theta) = L_i \cos(m\theta) \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.079)$$

Al hechar mano de las expresiones generales para las matrices de masa y rigidez tenemos

$$\mathbf{M}^e = \left[\int_V \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \hat{\mathbf{N}}^T(\mathbf{x}) \quad \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \quad dV \right] \quad (4.080)$$

$$\mathbf{M}^e = \left[\frac{1}{c^2} \int_0^{2\pi} \cos^2(m\theta) \quad d\theta \int_S \hat{\mathbf{N}}^T(r, z) \quad \hat{\mathbf{N}}(r, z) r \quad dS \right] \quad (4.081)$$

$$\mathbf{M}^e = \left[\frac{\pi}{c^2} \int_S \hat{\mathbf{N}}^T(r, z) \quad \hat{\mathbf{N}}(r, z) r \quad dS \right] \quad (4.082)$$

$$m_{ij}^e = \frac{\pi}{c^2} \int_S \hat{N}_i(r, z) \hat{N}_j(r, z) r \, dS \quad m_{ij}^e = \frac{\pi}{c^2} \int_S L_i(r, z) L_j(r, z) r \, dS \quad (4.083)$$

La coordenada r puede ser expresada como

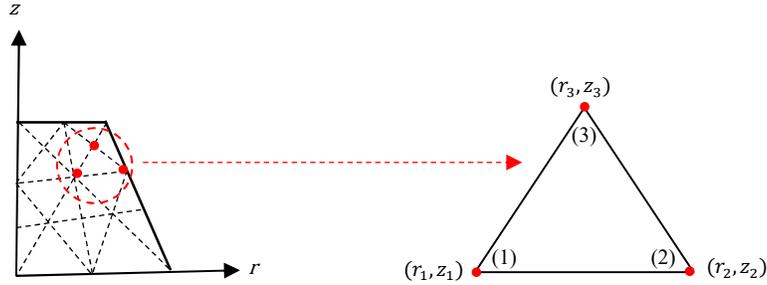


Figura 4.2. Sólido de revolución – Elementos triangulares

$$r = r_1 L_1 + r_2 L_2 + r_3 L_3$$

$$m_{ij}^e = \frac{\pi}{c^2} \int_S L_i L_j (r_1 L_1 + r_2 L_2 + r_3 L_3) \, dS \quad (4.084)$$

Los resultados de esta matriz se pueden evaluar usando la fórmula (3.140)

$$\int_S L_1^m(\mathbf{x}) L_2^n(\mathbf{x}) L_3^p(\mathbf{x}) \, dS = \frac{m! n! p!}{(m+n+p+2)!} 2A \quad (3.085)$$

$$\mathbf{M}^e = \frac{\pi A}{60c^2} \begin{bmatrix} 6r_1 + 2r_2 + 2r_3 & 2r_1 + 2r_2 + r_3 & 2r_1 + r_2 + 2r_3 \\ 2r_1 + 2r_2 + r_3 & 2r_1 + 6r_2 + 2r_3 & r_1 + 2r_2 + 2r_3 \\ 2r_1 + r_2 + 2r_3 & r_1 + 2r_2 + 2r_3 & 2r_1 + 2r_2 + 6r_3 \end{bmatrix} \quad (4.086)$$

El gradiente de la presión sonora en coordenadas cilíndricas es

$$\nabla p = \left[\frac{\partial p}{\partial r} \quad \frac{\partial p}{\partial z} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right]^T \quad (4.087)$$

Donde

$$\frac{\partial p_m}{\partial r} = \frac{1}{2A} [a_1 \quad a_2 \quad a_3] \cos(m\theta) \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \end{bmatrix} \quad (4.088)$$

$$\frac{\partial p_m}{\partial z} = \frac{1}{2A} [b_1 \quad b_2 \quad b_3] \cos(m\theta) \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \end{bmatrix} \quad (4.089)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p_m}{\partial \theta} = -\frac{m}{r} [L_1 \quad L_2 \quad L_3] \sin(m\theta) \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \end{bmatrix} \quad (4.090)$$

Al incorporar esto en la expresión general de la matriz de rigidez

$$\mathbf{K}^e = \left[\int_V \left(\nabla \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \right)^T \nabla \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) dV \right] \quad (4.091)$$

Tenemos

$$k_{ij}^e = \int_V \frac{a_i a_j}{4A^2} \cos^2(m\theta) + \frac{b_i b_j}{4A^2} \cos^2(m\theta) + \frac{m^2}{r^2} L_i L_j \sin^2(m\theta) r dr dz d\theta \quad (4.092)$$

Separamos las integrales

$$\begin{aligned} k_{ij}^e &= \int_0^{2\pi} \cos^2(m\theta) d\theta \int_S \frac{a_i a_j}{4A^2} r dr dz + \\ &\int_0^{2\pi} \cos^2(m\theta) d\theta \int_S \frac{b_i b_j}{4A^2} r dr dz + \\ &\int_0^{2\pi} \sin^2(m\theta) d\theta \int_V \frac{m^2}{r} L_i L_j \sin^2(m\theta) dr dz \end{aligned} \quad (4.093)$$

Podemos resolver con facilidad las integrales asociadas a la variable angular y expresando r en términos de las coordenadas de triángulos tenemos

$$\begin{aligned} k_{ij}^e &= \pi \int_S \frac{a_i a_j}{4A^2} (r_1 L_1 + r_2 L_2 + r_3 L_3) dr dz + \\ &\pi \int_S \frac{b_i b_j}{4A^2} (r_1 L_1 + r_2 L_2 + r_3 L_3) dr dz + \\ &\pi \int_V \frac{m^2}{r} L_i L_j dr dz \end{aligned} \quad (4.094)$$

Si redefinimos en términos de las coordenadas de área

$$\nabla N_i = \left[\frac{\partial \hat{N}_i}{\partial r} \quad \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial z} \right]^T = \left[\frac{\partial L_i}{\partial r} \quad \frac{\partial L_i}{\partial z} \right]^T = \left[\frac{a_i}{2A} \quad \frac{b_i}{2A} \right]^T = \nabla L_i \quad (4.095)$$

$$\mathbf{K}^{e1} = \pi \int_S \left(\nabla \hat{\mathbf{N}}(r, z) \right)^T \nabla \hat{\mathbf{N}}(r, z) r dS \quad (4.096)$$

$$k^{e1}_{ij} = \pi \int_S \frac{a_i a_j}{4A^2} (r_1 L_1 + r_2 L_2 + r_3 L_3) dr dz + \pi \int_S \frac{b_i b_j}{4A^2} (r_1 L_1 + r_2 L_2 + r_3 L_3) dr dz$$

Mientras que la segunda integral es

$$\mathbf{K}^{e2} = \pi \int_S \frac{1}{r} \hat{\mathbf{N}}^T(r, z) \hat{\mathbf{N}}(r, z) dS \quad (4.097)$$

$$k^{e2}_{ij} = \pi \int_V \frac{m^2}{r} L_i L_j \, dr dz$$

Resumiendo

$$\mathbf{K}^e = \left[\pi \int_S (\nabla \hat{\mathbf{N}}(r, z))^T \nabla \hat{\mathbf{N}}(r, z) r \, dS + \pi \int_S \frac{m^2}{r} \hat{\mathbf{N}}^T(r, z) \hat{\mathbf{N}}(r, z) \, dS \right] \quad (4.098)$$

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}^{e1} + m^2 \mathbf{K}^{e2*} \quad (4.099)$$

Puede parecer en primera instancia de que el segundo término de la matriz de rigidez sea problemático de integrar al poseer un término de la forma $1/r$ sin embargo esto puede ser solucionado de manera eficiente usando integración numérica. Si bien es posible obtener de manera analítica la matriz \mathbf{K}^{e1} , la matriz \mathbf{K}^{e2} es más un proceso más costoso, por lo mismo se recomienda obtener la matriz elemental de rigidez \mathbf{K}^e de forma numérica.

En este caso para regiones triangulares se sigue un proceso similar a la integración de regiones trapezoidales como fue visto en el capítulo anterior.

$$\int_S g_m(L_1, L_2, L_3) \, dS = A \sum_{j=1}^n H_j g(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) \quad (3.100)$$

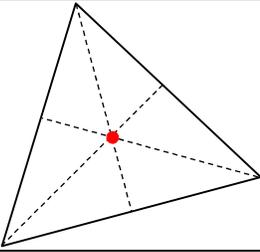
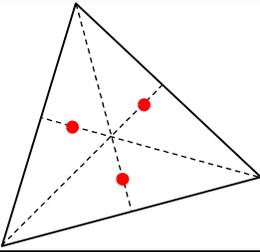
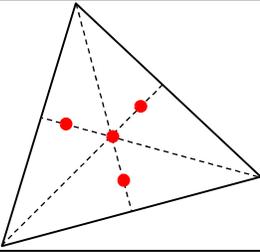
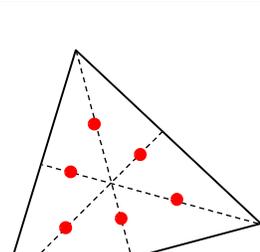
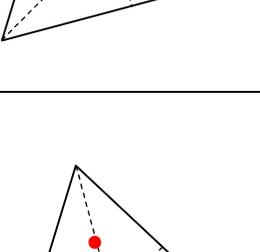
Donde (ξ_j, η_j, ζ_j) son las coordenadas de área de los puntos de integración, n el total de los puntos de integración y H_j son los coeficientes de peso. La integral asociada a \mathbf{K}^{e2} no puede ser evaluada de manera exacta por este método, ya que el integrando es un polinomio de grado dos dividido por un polinomio de grado uno. El número mínimo de puntos de integración necesarios depende del tamaño del elemento y su distancia del eje z . Elementos pequeños situados lejos del eje z se pueden evaluar con solo tres puntos, mientras que los elementos grandes cercanos al eje requieren muchos más. Como se ha dicho anteriormente, la forma más conveniente de calcular la matriz de rigidez es evaluar la matriz completa usando integración numérica. La tabla 4.1 muestra los esquemas de integración considerando el el orden del polinomio más alto que puede ser integrado exactamente, la posición de los puntos de integración y los coeficientes de peso

Pasamos ahora a la matriz de amortiguamiento, conforme a lo visto anteriormente podemos suponer a fin de simplificar que las propiedades son constantes en el elemento.

$$\mathbf{C} = \left[\rho_0 Y \int_{S_R} \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \, dS \right] \quad (4.101)$$

$$\mathbf{C} = \left[\rho_0 Y \int_0^{2\pi} \cos^2(m\theta) \, d\theta \int_{C_R} \hat{\mathbf{N}}^T(r, z) \hat{\mathbf{N}}(r, z) r \, dC \right] \quad (4.102)$$

Tabla 4.1. Puntos de Integración y Coeficientes de Peso para Triángulos

Elemento	Orden del Polinomio	j	ξ_j	η_j	ζ_j	H_j
	1	1	1/3	1/3	1/3	1
	2	1	2/3	1/6	1/6	1/3
		2	1/6	2/3	1/6	1/3
		3	1/6	1/6	2/3	1/3
	3	1	1/3	1/3	1/3	-27/48
		2	3/5	1/5	1/5	25/48
		3	1/5	3/5	1/5	25/48
		4	1/5	1/5	3/5	25/48
	4	1	0.81684757	0.09157621	0.09157621	0.10995174
		2	0.09157621	0.81684757	0.09157621	0.10995174
		3	0.09157621	0.09157621	0.81684757	0.10995174
		4	0.10810302	0.44594849	0.44594849	0.22338159
		5	0.44594849	0.10810302	0.44594849	0.22338159
		6	0.44594849	0.44594849	0.10810302	0.22338159
	5	1	0.33333333	0.33333333	0.33333333	0.22500000
		2	0.79742699	0.10128651	0.10128651	0.12593918
		3	0.10128651	0.79742699	0.10128651	0.12593918
		4	0.10128651	0.10128651	0.79742699	0.12593918
		5	0.05971587	0.47014206	0.47014206	0.13239415
		6	0.47014206	0.05971587	0.47014206	0.13239415
		7	0.47014206	0.47014206	0.05971587	0.13239415

Por otra parte, nos concentraremos en el lado 23 del triángulo, esto implica $L_1 = 0$ por lo tanto

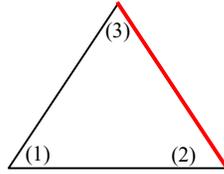


Figura 4.2. Elemento triangular axisimétrico

$$\hat{\mathbf{N}}(r, z) = [0 \quad L_2 \quad L_3] \quad (4.103)$$

$$\mathbf{C}^e = \left[\rho_0 Y \pi \int_{C_R} \hat{\mathbf{N}}^T(r, z) \hat{\mathbf{N}}(r, z) r \, dC \right] \quad (4.104)$$

$$c_{ij}^e = \rho_0 Y \pi \int_{C_R} L_i L_j (r_2 L_2 + r_3 L_3) \, dC \quad (4.105)$$

$$c_{ij}^e = \rho_0 Y \pi \int_{C_R} r_2 L_2 L_i L_j + r_3 L_3 L_i L_j \, dC \quad (4.106)$$

Usamos la expresión

$$\int_{C_R} L_2^n(\mathbf{x}) L_3^p(\mathbf{x}) \, dC = \frac{n! p!}{(n+p+1)!} l_{23} \quad (3.107)$$

Y obtenemos

$$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y \pi}{24} l_{23} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6r_2 + 2r_3 & 2r_2 + 2r_3 \\ 0 & 2r_2 + 2r_3 & 2r_2 + 6r_3 \end{bmatrix} \quad (4.108)$$

Resumimos los resultados posibles para la matriz de amortiguamiento elemental en la tabla 4.2

De igual forma podemos trabajar en el vector de excitación producto de una condición de Neumann no nula, es decir una superficie del contorno que esté moviéndose con una velocidad prescrita u_{nm} y de fuerzas corporales. Si estas fueran constantes en el elemento el vector de fuerza puede expresarse como:

$$\mathbf{f}_m^e(t) = q_m(t) \pi \int_S \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T r \, dS - \rho_0 \dot{u}_{nm}(t) \pi \int_{C_N} \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T r \, dC \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.109)$$

Como en los casos anteriores debemos separar las fuerzas corporales de la excitación en el contorno

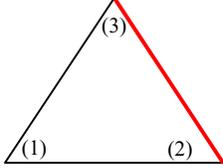
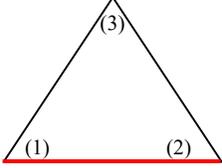
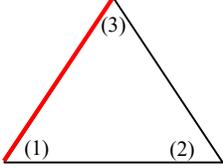
$$\mathbf{f}_m^{1e}(t) = q_m(t) \pi \int_S \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T r \, dS \quad (4.110)$$

$$\mathbf{f}_m^{2e}(t) = -\rho_0 \dot{u}_{nm}(t) \pi \int_{C_N} \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T r \, dC \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.111)$$

La primera integral es

$$f_{im}^{1e}(t) = q_m(t)\pi \int_S L_i(r_1L_1 + r_2L_2 + r_3L_3) dS \quad (4.112)$$

Tabla 4.2. Matrices de Amortiguamiento Elemental – Elemento Triangular Axisimétrico

Condición de Contorno de Impedancia	Matriz de Amortiguamiento Elemental
	$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y \pi}{24} l_{23} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6r_2 + 2r_3 & 2r_2 + 2r_3 \\ 0 & 2r_2 + 2r_3 & 2r_2 + 6r_3 \end{bmatrix}$
	$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y \pi}{24} l_{12} \begin{bmatrix} 6r_1 + 2r_2 & 2r_1 + 2r_2 & 0 \\ 2r_1 + 2r_2 & 2r_1 + 6r_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
	$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y \pi}{24} l_{13} \begin{bmatrix} 6r_1 + 2r_3 & 0 & 2r_1 + 2r_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2r_1 + 2r_3 & 0 & 2r_1 + 6r_3 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{f}_m^{1e}(t) = q_m(t) \frac{\pi A}{24} \begin{bmatrix} 4r_1 + 2r_2 + 2r_3 \\ 2r_1 + 4r_2 + 2r_3 \\ 2r_1 + 2r_2 + 4r_3 \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

Para la segunda debemos analizar tres casos. Nuevamente observemos el lado 23 del triángulo, esto implica $L_1 = 0$, por lo tanto

$$f_{im}^{2e}(t) = -\rho_0 \dot{u}_{nm}(t)\pi \int_{C_N} L_i(r_2L_2 + r_3L_3) dC \quad (4.114)$$

$$\mathbf{f}_m^{2e}(t) = -\frac{\rho_0 \dot{u}_{nm}(t)\pi}{6} l_{23} \begin{bmatrix} 0 \\ 2r_2 + r_3 \\ r_2 + 2r_3 \end{bmatrix} \quad m = 0,1,2,\dots \quad (4.115)$$

En los otros casos tenemos para el lado 21 del triángulo $L_3 = 0$,

$$f_{im}^{2e}(t) = -\rho_0 \dot{u}_{nm}(t)\pi \int_{C_N} L_i(r_1L_1 + r_2L_2) dC \quad (4.116)$$

$$\mathbf{f}_m^{2e}(t) = -\frac{\rho_0 \dot{u}_{nm}(t)\pi}{6} l_{12} \begin{bmatrix} 2r_1 + r_2 \\ r_1 + 2r_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad m = 0,1,2,\dots \quad (4.117)$$

para el lado 31 del triángulo $L_2 = 0$,

$$f_{im}^{2e}(t) = -\rho_0 \dot{u}_{nm}(t) \pi \int_{C_N} L_i(r_1 L_1 + r_3 L_3) dC \quad (4.118)$$

$$f_m^{2e}(t) = -\frac{\rho_0 \dot{u}_{nm}(t) \pi}{6} l_{13} \begin{bmatrix} 2r_1 + r_3 \\ 0 \\ r_1 + 2r_3 \end{bmatrix} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.119)$$

Se pueden encontrar expresiones similares para las componentes antisimétricas de la velocidad \bar{u}_{nm} .

4.4.2. ELEMENTO CUADRILATERAL ISOPARAMÉTICO

Por otra parte, podemos usar elementos cuadrilaterales isoparmétricos en términos de las coordenadas (r, z) mapeandolas en las coordenadas padrón (ξ, η) y usando las expresiones para matrices de masa rigidez y amortiguamiento que se desarrollaron anteriormente y los resultados del capítulo anterior.

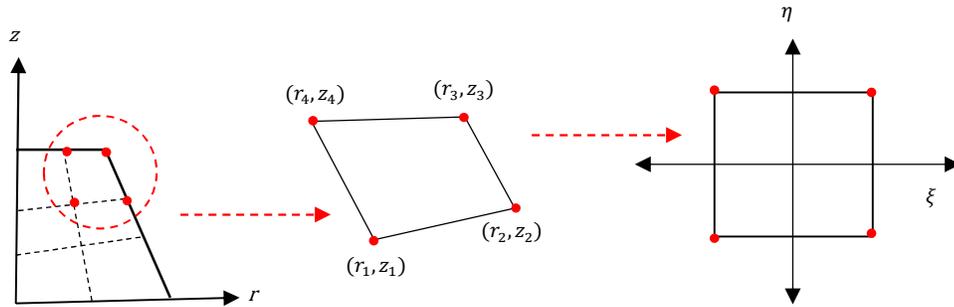


Figura 4.2. Sólido de revolución – Elementos cuadrilaterales isoparmétricos

$$\begin{aligned} \hat{N}_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ \hat{N}_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \end{aligned} \quad (3.120)$$

$$\hat{N}_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$\hat{N}_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

$$r = r(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \hat{N}_i(\xi, \eta) r_i \quad (4.121a)$$

$$z = z(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 \hat{N}_i(\xi, \eta) z_i \quad (4.121b)$$

La matriz de masa elemental es

$$\mathbf{M}^e = \left[\frac{\pi}{c^2} \int_S \hat{\mathbf{N}}^T(r, z) \hat{\mathbf{N}}(r, z) r \, dS \right] \quad (4.122)$$

$$m_{ij}^e = \frac{\pi}{c^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, \eta) \hat{N}_j(\xi, \eta) r(\xi, \eta) \det(\mathbf{J}) \, d\xi d\eta \quad (4.123)$$

Donde $\det(\mathbf{J})$ es el determinante de la matriz jacobiana de la transformación

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.124)$$

La matriz de rigidez elemental es

$$\mathbf{K}^e = \left[\pi \int_S (\nabla_{rz} \hat{\mathbf{N}}(r, z))^T \nabla_{rz} \hat{\mathbf{N}}(r, z) r \, dS + \pi \int_S \frac{m^2}{r} \hat{\mathbf{N}}^T(r, z) \hat{\mathbf{N}}(r, z) \, dS \right] \quad (4.125)$$

O bien de forma resumida

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}^{e1} + m^2 \mathbf{K}^{e2*} \quad (4.126)$$

$$\begin{aligned} k_{ij}^e &= \pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi\eta} \hat{N}_i(\xi, \eta))^T \mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi\eta} \hat{N}_j(\xi, \eta) r(\xi, \eta) \det(\mathbf{J}) \, d\xi d\eta \\ &+ m^2 \pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{r(\xi, \eta)} \hat{N}_i(\xi, \eta) \hat{N}_j(\xi, \eta) r(\xi, \eta) \det(\mathbf{J}) \, d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.127)$$

Tenemos la matriz de amortiguamiento elemental

$$\mathbf{C}^e = \left[\rho_0 Y \pi \int_{C_R} \hat{\mathbf{N}}^T(r, z) \hat{\mathbf{N}}(r, z) r \, dC \right] \quad (4.128)$$

La cual puede ser evaluada para $\xi = -1$

$$c_{ij}^e = \rho_0 Y \pi \int_{-1}^1 \hat{N}_i(-1, \eta) \hat{N}_j(-1, \eta) r(-1, \eta) \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}(-1, \eta) \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}(-1, \eta) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\eta \quad (4.129)$$

Para $\xi = 1$

$$c_{ij}^e = \rho_0 Y \pi \int_{-1}^1 \hat{N}_i(1, \eta) \hat{N}_j(1, \eta) r(1, \eta) \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}(1, \eta) \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}(1, \eta) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\eta \quad (4.130)$$

Para $\eta = -1$

$$c_{ij}^e = \rho_0 Y \pi \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, -1) \hat{N}_j(\xi, -1) r(\xi, -1) \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi, -1) \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi, -1) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\xi \quad (4.131)$$

Y finalmente, para $\eta = 1$

$$c_{ij}^e = \rho_0 Y \pi \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, 1) \hat{N}_j(\xi, 1) r(\xi, 1) \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi, -1) \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi, -1) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\xi \quad (4.132)$$

El vector de fuerzas es

$$\mathbf{f}_m^e(t) = q_m(t) \pi \int_S \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T r \, dS - \rho_0 \dot{u}_{nm}(t) \pi \int_{C_N} \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T r dC \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.133)$$

La primera integral nos depara la expresión

$$f_{im}^{1e}(t) = q_m(t) \pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, \eta) r(\xi, \eta) \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \quad (4.134)$$

Mientras que la segunda puede ser alguna de las siguientes cuatro variedades, Para $\xi = -1$. Si la aceleración es constante, tenemos la integral.

$$f_{im}^{2e}(t) = -\rho_0 \dot{u}_{nm}(t) \pi \int_{-1}^1 \hat{N}_i(-1, \eta) r(\xi, \eta) \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}(-1, \eta) \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}(-1, \eta) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\eta \quad (4.135)$$

La expresión asociada a $\xi = 1$ es

$$f_{im}^{2e}(t) = -\rho_0 \dot{u}_{nm}(t) \pi \int_{-1}^1 \hat{N}_i(1, \eta) r(\xi, \eta) \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}(1, \eta) \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}(1, \eta) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\eta \quad (4.135)$$

Luego tenemos $\eta = -1$

$$f_{im}^{2e}(t) = -\rho_0 \dot{u}_{nm}(t) \pi \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, -1) r(\xi, \eta) \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi, -1) \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi, -1) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\eta \quad (3.136)$$

Y también para $\eta = 1$

$$f_{im}^{2e}(t) = -\rho_0 \dot{u}_{nm}(t) \pi \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, 1) r(\xi, \eta) \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi, 1) \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi, 1) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\eta \quad (3.137)$$

En todo este contexto debemos revisar y reinterpretar la ecuación de movimiento, la cual escribiremos sin las condiciones iniciales a fin de establecer claridad, debemos recordar que la excitación externa puede ser descompuesta en serie de Fourier. Por lo tanto, en términos generales debemos resolver para cada valor de m , una vez realizado el proceso de montaje, el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{M} \ddot{\hat{\mathbf{p}}}_m(t) + \mathbf{C} \dot{\hat{\mathbf{p}}}_m(t) + \mathbf{K} \hat{\mathbf{p}}_m(t) = \mathbf{f}_m(t) \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.138)$$

En más detalle resolvemos

$$\mathbf{M}\ddot{\hat{\mathbf{p}}}_m(t) + \mathbf{C}\dot{\hat{\mathbf{p}}}_m(t) + [\mathbf{K}^1 + m^2\mathbf{K}^{2*}]\hat{\mathbf{p}}_m(t) = \mathbf{f}_m(t) \quad m = 0,1,2,\dots \quad (4.139)$$

Y la solución final aproximada es la sumatoria donde M es un número lo suficientemente grande

$$\hat{\mathbf{p}}(t) = \sum_{m=1}^M \hat{\mathbf{p}}_m(t) \quad (4.140)$$

En el caso de que las fuerzas externas sean axisimétricas podemos considerar $m = 0$ y resolvemos simplemente una única ecuación.

$$\mathbf{M}\ddot{\hat{\mathbf{p}}}_0(t) + \mathbf{C}\dot{\hat{\mathbf{p}}}_0(t) + \mathbf{K}^1\hat{\mathbf{p}}_0(t) = \mathbf{f}_0(t) \quad (4.141)$$

4.5. ELEMENTO HEXAHÉDRICO REGULAR

Los trabajos realizados en capítulos han establecido la base para poder desarrollar los aspectos asociados a la implementación de los distintos tipos de elementos en problemas acústicos que se desarrollan en el espacio. El primer punto de partida es considerar un elemento hexaédrico regular en el espacio físico (x, y, z) , estos serán mapeados en el espacio patrón (ξ, η, ζ) , en un elemento cúbico, a fin de derivar las matrices elementales de masa, rigidez y amortiguamiento, así como también los vectores de excitación, cuando corresponda.

Las funciones de interpolación pueden ser construidas a partir de las funciones explicitadas en el capítulo tres y poseen la propiedad de tener el valor unitario en el respectivo nodo y ser nulas en los otros siete. Específicamente en este caso se trata del conjunto de funciones trilineales dadas por:

$$\hat{N}_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \quad (4.142a)$$

$$\hat{N}_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \quad (4.142a)$$

$$\hat{N}_3(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \quad (4.142a)$$

$$\hat{N}_4(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \quad (4.142a)$$

$$\hat{N}_5(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \quad (4.142a)$$

$$\hat{N}_6(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \quad (4.142a)$$

$$\hat{N}_7(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \quad (4.142a)$$

$$\hat{N}_8(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \quad (4.142a)$$

En términos del elemento la presión es aproximada por:

$$p = p(x, y, t) \approx \sum_{i=1}^8 \hat{N}_i(x, y, z) \hat{p}_i(t) = \sum_{i=1}^8 \hat{N}_i(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \hat{p}_i(t) \quad (4.092)$$

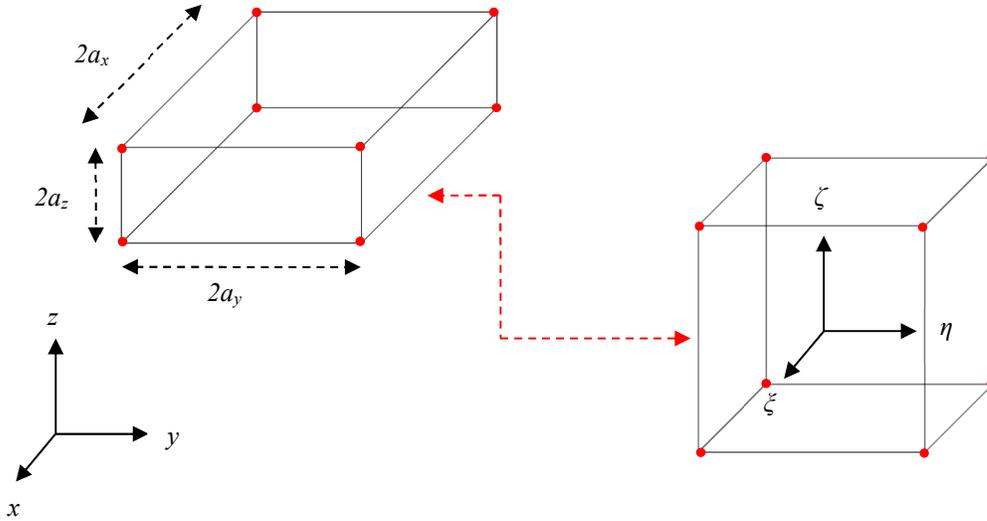


Figura 4.1. Elemento Acústico Hexahédrico- Mapeamiento a Elemento Finito Patrón

Donde las expresiones $x(\xi, \eta, \zeta)$, $y(\xi, \eta, \zeta)$ y $z(\xi, \eta, \zeta)$ representan el mapeamiento del elemento rectangular al elemento patrón. En nuestro caso es obvio que esta relación está dada por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta, \zeta) &= a_x \xi & \xi &= \frac{x}{a_x} & dx &= a_x d\xi & \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{1}{a_x} \\ y(\xi, \eta, \zeta) &= a_y \eta & \eta &= \frac{y}{a_y} & dy &= a_y d\eta & \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{1}{a_y} \\ z(\xi, \eta, \zeta) &= a_z \zeta & \zeta &= \frac{z}{a_z} & dz &= a_z d\zeta & \frac{\partial \zeta}{\partial z} &= \frac{1}{a_z} \end{aligned} \quad (4.143)$$

A modo de ejemplo podemos obtener algunas de las matrices elementales, partiendo en este caso por la matriz de masa

$$\mathbf{M}^e = \left[\int_V \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \hat{\mathbf{N}}^T(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) dV \right] \quad (4.144)$$

$$m_{ij}^e = \int_V \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \hat{N}_i(\mathbf{x}) \hat{N}_j(\mathbf{x}) dV \quad i = 1, \dots, 8 \quad j = 1, \dots, 8 \quad (4.145)$$

$$m_{ij}^e = \int_V \frac{1}{c^2(x, y, z)} \hat{N}_i(x, y, z) \hat{N}_j(x, y, z) dx dy dz \quad (4.146)$$

$$m_{ij}^e = \int_V \frac{1}{c(\xi, \eta, \zeta)^2} \hat{N}_i(\xi, \eta, \zeta) \hat{N}_j(\xi, \eta, \zeta) a_x d\xi a_y d\eta a_z d\zeta \quad (4.147)$$

En esta situación asumiremos que el medio fuera homogéneo

$$m_{ij}^e = \frac{a_x a_y a_z}{c^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, \eta, \zeta) \hat{N}_j(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (4.148)$$

Entonces al evaluar la integral se obtiene la matriz de masa elemental

$$\mathbf{M}^e = \frac{a_x a_y a_z}{27c^2} \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 & 4 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 4 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 8 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 8 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 4 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 2 & 4 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 4 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \quad (4.149)$$

Trabajamos de una manera similar en la matriz de rigidez

$$\mathbf{K}^e = \left[\int_V (\nabla \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}))^T \nabla \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) dV \right] \quad (4.150)$$

$$k_{ij}^e = \int_V (\nabla \hat{N}_i(\mathbf{x}))^T \nabla \hat{N}_j(\mathbf{x}) dV \quad i = 1, \dots, 8 \quad j = 1, \dots, 8 \quad (4.151)$$

$$k_{ij}^e = \int_V (\nabla \hat{N}_i(x, y, z))^T \nabla \hat{N}_j(x, y, z) dx dy dz \quad (4.152)$$

Recordemos que el gradiente puede expresarse en el sistema de coordenadas (x, y, z) y en el sistema de coordenadas (ξ, η, ζ) utilizando las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \nabla = \nabla_{xyz} &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right]^T = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right]^T = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{a_x} \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{a_y} \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{a_z} \right]^T = \nabla_{\xi\eta\zeta} = \nabla \end{aligned} \quad (4.153)$$

O de manera resumida

$$\nabla = \nabla_{xyz} = \mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi\eta\zeta} \quad (4.154)$$

Donde la matriz jacobiana de la transformación es:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a_x & 0 & 0 \\ 0 & a_y & 0 \\ 0 & 0 & a_z \end{bmatrix} \quad (4.155)$$

Por lo tanto, la matriz de rigidez se puede calcular como:

$$k_{ij}^e = \int_V (\nabla_{xyz} \hat{N}_i(x, y, z))^T \nabla_{xyz} \hat{N}_j(x, y, z) dx dy dz \quad (4.156)$$

$$k_{ij}^e = \int_V \left(\mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi\eta\zeta} \widehat{\mathbf{N}}_i(\xi, \eta, \zeta) \right)^T \mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi\eta} \widehat{\mathbf{N}}_j(\xi, \eta, \zeta) a_x d\xi a_y d\eta a_z d\zeta \quad (4.157)$$

$$k_{ij}^e = a_x a_y a_z \int_V \left(\mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi\eta\zeta} \widehat{\mathbf{N}}_i(\xi, \eta, \zeta) \right)^T \mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi\eta} \widehat{\mathbf{N}}_j(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (4.158)$$

$$k_{ij}^e = a_x a_y a_z \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi\eta\zeta} \widehat{\mathbf{N}}_i(\xi, \eta, \zeta) \right)^T \mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi\eta} \widehat{\mathbf{N}}_j(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (4.159)$$

Entonces al evaluar esta última integral se obtiene la matriz de rigidez elemental.

$$\mathbf{K}^e = a_x a_y a_z \begin{bmatrix} k1 & k2 & k3 & k4 & k5 & k6 & k7 & k8 \\ k2 & k1 & k4 & k3 & k6 & k5 & k8 & k7 \\ k3 & k4 & k1 & k2 & k7 & k8 & k5 & k6 \\ k4 & k3 & k2 & k1 & k8 & k7 & k6 & k5 \\ k5 & k6 & k7 & k8 & k1 & k2 & k3 & k4 \\ k6 & k5 & k8 & k7 & k2 & k1 & k4 & k3 \\ k7 & k8 & k5 & k6 & k3 & k4 & k1 & k2 \\ k8 & k7 & k6 & k5 & k4 & k3 & k2 & k1 \end{bmatrix} \quad (4.160)$$

$$\begin{aligned} k1 &= \left(\frac{2}{9a_x^2} + \frac{2}{9a_y^2} + \frac{2}{9a_z^2} \right) & k2 &= \left(\frac{-2}{9a_x^2} + \frac{1}{9a_y^2} + \frac{1}{9a_z^2} \right) \\ k3 &= \left(\frac{-1}{9a_x^2} + \frac{-1}{9a_y^2} + \frac{1}{18a_z^2} \right) & k4 &= \left(\frac{1}{9a_x^2} + \frac{-2}{9a_y^2} + \frac{1}{9a_z^2} \right) \\ k5 &= \left(\frac{1}{9a_x^2} + \frac{1}{9a_y^2} + \frac{-2}{9a_z^2} \right) & k6 &= \left(\frac{-1}{9a_x^2} + \frac{1}{18a_y^2} + \frac{-1}{9a_z^2} \right) \\ k7 &= \left(\frac{-1}{18a_x^2} + \frac{-1}{18a_y^2} + \frac{-1}{18a_z^2} \right) & k8 &= \left(\frac{1}{18a_x^2} + \frac{-1}{9a_y^2} + \frac{-1}{9a_z^2} \right) \end{aligned} \quad (4.161)$$

La matriz de amortiguamiento elemental tomará la forma de

$$\mathbf{C}^e = \int_{S_R} \rho_0(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) \widehat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T \widehat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) dS \quad (4.162)$$

$$c_{ij}^e = \int_{S_R} \rho_0(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) \widehat{\mathbf{N}}_i(\mathbf{x}) \widehat{\mathbf{N}}_j(\mathbf{x}) dS \quad (4.163)$$

Podemos considerar y analizar, a modo de ejemplo, el caso donde la admitancia está ubicada en el plano $x = -a_x$ o bien $\xi = -1$, y las propiedades del material y de su contorno son constantes en el elemento.

$$c_{ij}^e = \rho_0 Y \int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_z}^{a_z} \widehat{\mathbf{N}}_i(-a_x, y, z) \widehat{\mathbf{N}}_j(-a_x, y, z) dy dz \quad (4.164)$$

$$c_{ij}^e = \rho_0 Y \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \widehat{\mathbf{N}}_i(-1, \eta, \zeta) \widehat{\mathbf{N}}_j(-1, \eta, \zeta) a_y d\eta a_z d\zeta \quad (4.165)$$

En este caso la matriz elemental de amortiguamiento toma la forma

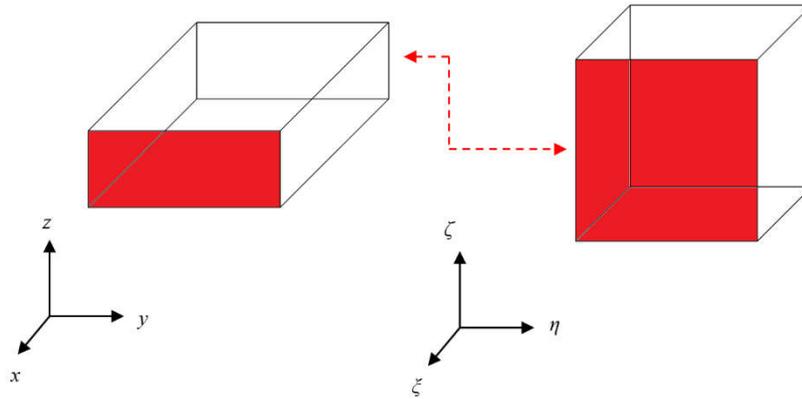


Figura 4.3. Admitancia en el plano $x = a_x / \zeta = 1$

En el plano $y = -a_y - \eta = -1$ la integral y la matriz son:

$$c_{ij}^e = \rho_0 Y \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_z}^{a_z} \hat{N}_i(x, -a_y, z) \hat{N}_j(x, -a_y, z) dx dz \quad (4.170)$$

$$c_{ij}^e = \rho_0 Y \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, -1, \zeta) \hat{N}_j(\xi, -1, \zeta) a_x d\xi a_z d\zeta \quad (4.171)$$

$$C^e = \frac{\rho_0 Y a_x a_z}{9} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.172)$$

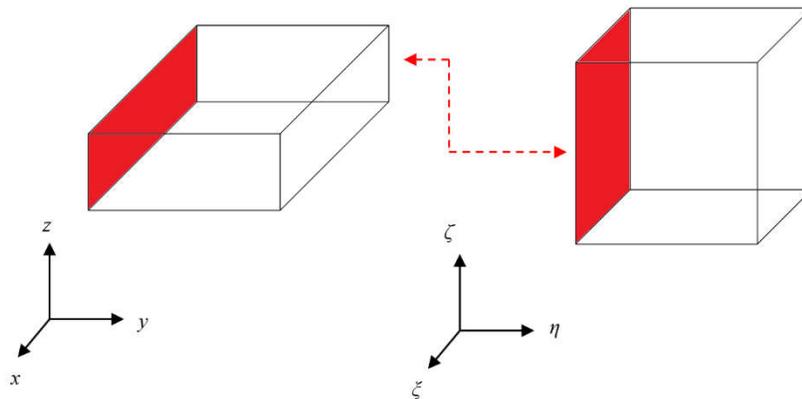


Figura 4.4. Admitancia en el plano $x = -a_y / \eta = -1$

Además, para el plano $y = a_y - \eta = 1$ la integral es:

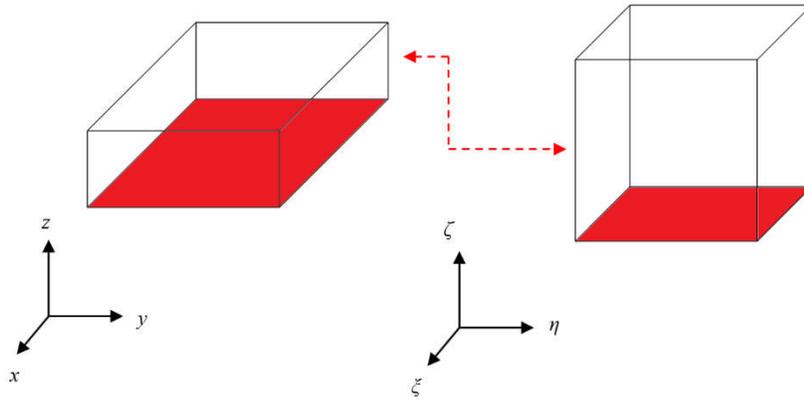


Figura 4.6. Admitancia en el plano $x = -a_x / \xi = -1$

Finalmente, para $z = a_z - \zeta = 1$ los resultados son:

$$c_{ij}^e = \rho_0 Y \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_z}^{a_z} \hat{N}_i(x, y, a_z) \hat{N}_j(x, y, a_z) dx dy \quad (4.179)$$

$$c_{ij}^e = \rho_0 Y \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, \eta, 1) \hat{N}_j(\xi, \eta, 1) a_x d\xi a_y d\eta \quad (4.180)$$

$$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y a_x a_y}{9} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.181)$$

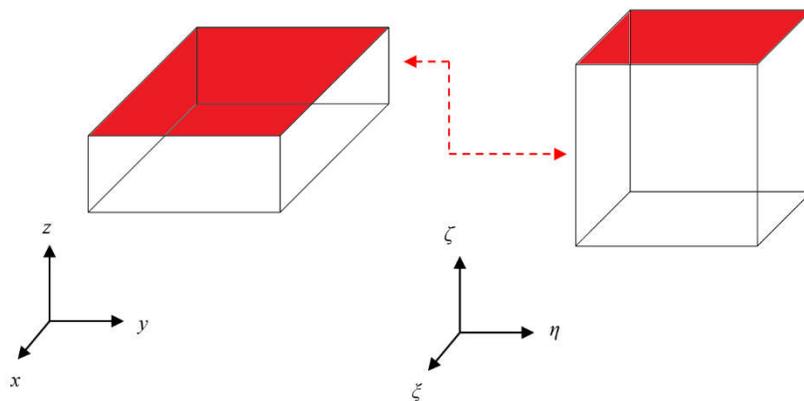


Figura 4.7. Admitancia en el plano $x = a_x / \xi = 1$

En cuanto al vector de fuerzas tenemos la expresión general

$$\mathbf{f}(t) = - \int_{S_N} \rho_0(\mathbf{x}) \widehat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) dS + \int_V \widehat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T q(\mathbf{x}, t) dV \quad (4.182)$$

Donde cada elemento se escribe:

$$f_i^e(t) = \int_V \widehat{N}_i(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}, t) dV - \int_{S_N} \rho_0(\mathbf{x}) \widehat{N}_i(\mathbf{x}) \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) dS \quad (4.183)$$

La primera integral la cual obviamente considera fuerzas corporales se puede expresar como:

$$f_{i1}^e(t) = \int_S \widehat{N}_i(x, y, z) q(x, y, z, t) dV \quad (4.184)$$

$$f_{i1}^e(t) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \widehat{N}_i(\xi, \eta, \zeta) q(\xi, \eta, \zeta, t) a_x d\xi a_y d\eta a_z d\zeta \quad (4.185)$$

Recordemos en este caso que

$$\nabla_{xyz} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right]^T = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{a_x} \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{a_y} \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{a_z} \right]^T = \nabla_{\xi\eta\zeta} \quad (4.186)$$

Si las fuerzas son constantes en el elemento tendremos

$$f_{i1}^e(t) = q(t) a_x a_y a_z \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \widehat{N}_i(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (4.187)$$

Entonces

$$f_{i1}^e(t) = q(t) a_x a_y a_z [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T \quad (4.188)$$

Mientras que la segunda integral que considera la excitación como parte de las condiciones de contorno se puede tratar de manera más simple, siempre y cuando la aceleración y la densidad sean constantes en el elemento. Partimos del caso más genérico y tenemos

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{S_N} \widehat{N}_i(x, y, z) dS \quad (4.189)$$

Como en el caso de la matriz de amortiguamiento podemos decir que en una de las posibles situaciones es que dicha excitación este en el plano $x = -a_x$ o $\zeta = -1$

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_z}^{a_z} \widehat{N}_i(-a_x, y, z) dy dz \quad (4.190)$$

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \widehat{N}_i(-1, \eta, \zeta) a_y d\eta a_z d\zeta \quad (4.191)$$

El vector es

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) a_y a_z [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \quad (4.192)$$

En el plano $x = a_x$ o $\zeta = 1$

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{-a_y}^{a_y} \int_{-a_z}^{a_z} \hat{N}_i(a_x, y, z) dy dz \quad (4.193)$$

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(1, \eta, \zeta) a_y d\eta \quad a_z d\zeta \quad (4.194)$$

El vector es

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) a_y a_z [0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0]^T \quad (4.195)$$

En el plano $y = -a_y$ o $\eta = -1$

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_z}^{a_z} \hat{N}_i(x, -a_y, z) dy dz \quad (4.196)$$

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, -1, \zeta) a_x d\xi \quad a_z d\zeta \quad (4.197)$$

El vector es

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) a_x a_z [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T \quad (4.198)$$

En el plano $y = a_y$ o $\eta = 1$

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_z}^{a_z} \hat{N}_i(x, a_y, z) dy dz \quad (4.199)$$

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, 1, \zeta) a_x d\xi \quad a_z d\zeta \quad (4.200)$$

El vector es

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) a_x a_z [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T \quad (4.201)$$

En el plano $z = -a_z$ o $\zeta = -1$

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} \hat{N}_i(x, y, -a_z) dx dy \quad (4.202)$$

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, \eta, -1) a_x d\xi \quad a_y d\eta \quad (4.203)$$

El vector es

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) a_x a_z [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (4.204)$$

En el plano $z = a_z$ o $\zeta = 1$

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{-a_x}^{a_x} \int_{-a_y}^{a_y} \hat{N}_i(x, y, a_z) dx dy \quad (4.205)$$

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, \eta, 1) a_x d\xi a_y d\eta \quad (4.206)$$

El vector es

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) a_x a_z [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T \quad (4.207)$$

4.6. HEXAHÉDRICO ISOPARAMÉTRICO

La utilidad del elemento hexahédrico puede ser aumentada al convertirlo en un elemento isoparamétrico, mapeando cualquier punto (x, y, z) en el elemento al elemento patrón, un cubo definido en (ξ, η, ζ) , como es mostrado en la figura

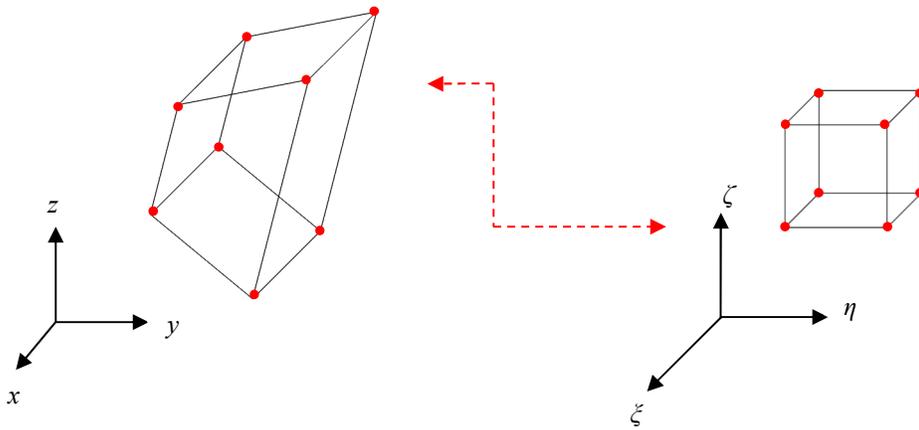


Figura 4.8. Elemento Acústico Hexaédrico Isoparamétrico - Mapeamiento a Elemento Finito Patrón

Es perfectamente posible mapear la totalidad del elemento cuadrilateral del espacio físico al espacio patrón y viceversa, considerando que el elemento patrón es un cubo con vértices ± 1 , todo esto usando las mismas funciones de interpolación definidas por medio de las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 \hat{N}_i(\xi, \eta, \zeta) x_i \\ y &= y(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 \hat{N}_i(\xi, \eta, \zeta) y_i \\ z &= z(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 \hat{N}_i(\xi, \eta, \zeta) z_i \end{aligned} \quad (4.208)$$

Donde la presión es dada en el elemento por la expresión

$$p = p(x, y, t) \approx \sum_{i=1}^8 \hat{N}_i(x, y, z) \hat{p}_i(t) = \sum_{i=1}^8 \hat{N}_i(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \hat{p}_i(t) \quad (4.209)$$

La matriz de masa es dada por

$$\mathbf{M}^e = \left[\int_V \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \hat{\mathbf{N}}^T(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) dV \right] \quad (4.210)$$

$$m_{ij}^e = \int_V \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \hat{N}_i(\mathbf{x}) \hat{N}_j(\mathbf{x}) dV \quad i = 1, \dots, 8 \quad j = 1, \dots, 8 \quad (4.211)$$

El elemento de volumen está dado por el producto vectorial triple $dV = d\xi (d\boldsymbol{\eta} \times d\boldsymbol{\zeta})$

$$\begin{aligned} d\xi &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix}^T d\xi \\ d\boldsymbol{\eta} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T d\boldsymbol{\eta} \\ d\boldsymbol{\zeta} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}^T d\boldsymbol{\zeta} \end{aligned} \quad (4.212)$$

O bien en términos de la matriz Jacobiana \mathbf{J}

$$dV = \det(\mathbf{J}) d\xi d\boldsymbol{\eta} d\boldsymbol{\zeta} \quad (4.213)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (4.214)$$

La cual puede ser expresada como

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial \hat{N}_8}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial \hat{N}_8}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial \zeta} & \dots & \frac{\partial \hat{N}_8}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{bmatrix} \quad (4.215)$$

Entonces la matriz elemental es de masa si es que el medio fuera homogéneo

$$m_{ij}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{c^2(\xi, \eta, \zeta)} \hat{N}_i(\xi, \eta, \zeta) \hat{N}_j(\xi, \eta, \zeta) \det(\mathbf{J}) d\xi d\boldsymbol{\eta} d\boldsymbol{\zeta} \quad (4.217)$$

Entonces la matriz elemental es de masa si es que el medio fuera homogéneo

$$m_{ij}^e = \frac{1}{c^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, \eta, \zeta) \hat{N}_j(\xi, \eta, \zeta) \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta d\zeta \quad (4.218)$$

En el caso de la matriz de rigidez tenemos que

$$\mathbf{K}^e = \left[\int_V (\nabla \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}))^T \nabla \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) dV \right] \quad (4.219)$$

$$k_{ij}^e = \int_V (\nabla_{xyz} \hat{N}_i(x, y, z))^T \nabla_{xyz} \hat{N}_j(x, y, z) dx dy dz \quad (4.220)$$

Recordemos que el gradiente puede expresarse en el sistema de coordenadas (x, y, z) y en el sistema de coordenadas (ξ, η, ζ) utilizando la expresión

$$\nabla = \nabla_{xyz} = \mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi\eta\zeta} \quad (4.221)$$

Por lo tanto, la matriz de rigidez elemental es

$$k_{ij}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi\eta\zeta} \hat{N}_i(\xi, \eta, \zeta)]^T [\mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi\eta\zeta} \hat{N}_j(\xi, \eta, \zeta)] \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta d\zeta \quad (4.222)$$

Para la matriz de amortiguamiento elemental debemos recordar que esta parte de la integral de superficie expresada en las siguientes fórmulas

$$\mathbf{C}^e = \int_{S_R} \rho_0 Y(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T dS \quad (4.223)$$

$$c_{ij}^e = \int_{S_R} \rho_0 Y(\mathbf{x}) \hat{N}_i(\mathbf{x}) \hat{N}_j(\mathbf{x}) dS \quad (4.224)$$

Por lo tanto, debemos analizar conforme a la superficie que corresponda dentro del contexto del elemento. En primer lugar, tendremos $\xi = -1$ y $\xi = 1$, los elementos de superficie en este caso son:

$$\begin{aligned} dS_{R1} &= |d\boldsymbol{\eta} \wedge d\boldsymbol{\zeta}|_{\xi=-1} = G_1(-1, \eta, \zeta) d\eta d\zeta \\ dS_{R2} &= |d\boldsymbol{\eta} \wedge d\boldsymbol{\zeta}|_{\xi=1} = G_2(1, \eta, \zeta) d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (4.225)$$

Luego, si las propiedades son constantes, las respectivas matrices de amortiguamiento son

$$c_{ij}^e = \rho_0 Y \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(-1, \eta, \zeta) \hat{N}_j(-1, \eta, \zeta) G_1(-1, \eta, \zeta) d\eta d\zeta \quad (4.226)$$

$$c_{ij}^e = \rho_0 Y \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(1, \eta, \zeta) \hat{N}_j(1, \eta, \zeta) G_2(1, \eta, \zeta) d\eta d\zeta \quad (4.227)$$

En segundo lugar tendremos $\eta = -1$ y $\eta = 1$, los elementos de superficie en este caso son

$$dS_{R3} = |d\xi \wedge d\zeta|_{\eta=-1} = G_3(\xi, -1, \zeta) d\xi d\zeta \quad (4.228)$$

$$dS_{R4} = |d\xi \wedge d\zeta|_{\eta=1} = G_4(\xi, 1, \zeta) d\xi d\zeta$$

Luego, si las propiedades son constantes, las respectivas matrices de amortiguamiento son

$$c_{ij}^e = \rho_0 Y \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, -1, \zeta) \hat{N}_j(\xi, -1, \zeta) G_3(\xi, -1, \zeta) d\xi d\zeta \quad (4.229)$$

$$c_{ij}^e = \rho_0 Y \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, -1, \zeta) \hat{N}_j(\xi, -1, \zeta) G_4(\xi, -1, \zeta) d\xi d\zeta \quad (4.230)$$

Finalmente, lugar tendremos $\zeta = -1$ y $\zeta = 1$, los elementos de superficie en este caso son

$$\begin{aligned} dS_{R5} &= |d\boldsymbol{\xi} \wedge d\boldsymbol{\eta}|_{\zeta=-1} = G_5(\xi, \eta, -1) d\xi d\eta \\ dS_{R6} &= |d\boldsymbol{\xi} \wedge d\boldsymbol{\eta}|_{\zeta=1} = G_6(\xi, \eta, 1) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.231)$$

Si las propiedades son constantes, las respectivas matrices de amortiguamiento son

$$c_{ij}^e = \rho_0 Y \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, \eta, -1) \hat{N}_j(\xi, \eta, -1) G_5(\xi, \eta, -1) d\xi d\eta \quad (4.232)$$

$$c_{ij}^e = \rho_0 Y \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, \eta, 1) \hat{N}_j(\xi, \eta, 1) G_6(\xi, \eta, 1) d\xi d\eta \quad (4.233)$$

Para fuerzas tenemos

$$\mathbf{f}(t) = - \int_{S_N} \rho_0(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) dS_N + \int_V \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T q(\mathbf{x}, t) dV \quad (4.234)$$

Donde cada elemento se escribe:

$$f_i^e(t) = \int_V \hat{N}_i(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}, t) dV - \int_{S_N} \rho_0(\mathbf{x}) \hat{N}_i(\mathbf{x}) \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) dS \quad (4.235)$$

La primera integral la cual obviamente considera fuerzas corporales se puede expresar como:

$$f_{i1}^e(t) = \int_S \hat{N}_i(x, y, z) q(x, y, z, t) dV \quad (4.236)$$

$$f_{i1}^e(t) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, \eta, \zeta) q(\xi, \eta, \zeta, t) \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta d\zeta \quad (4.237)$$

Mientras que la segunda integral que considera la excitación como parte de las condiciones de contorno se puede tratar de manera más simple, siempre y cuando la aceleración y la densidad sean constantes en el elemento. Partimos del caso más genérico y tenemos

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{S_N} \hat{N}_i(x, y, z) dS \quad (4.238)$$

Luego, si las propiedades son constantes, los respectivos vectores de fuerza asociados a las superficies $\zeta = -1$ y $\zeta = 1$, son

$$f_{i2}^e(t) = \rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(-1, \eta, \zeta) G_1(-1, \eta, \zeta) d\eta d\zeta \quad (4.239)$$

$$f_{i2}^e(t) = \rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(1, \eta, \zeta) G_2(1, \eta, \zeta) d\eta d\zeta \quad (4.240)$$

Para $\eta = -1$ y $\eta = 1$ tenemos

$$f_{i2}^e(t) = \rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, -1, \zeta) G_3(\xi, -1, \zeta) d\xi d\zeta \quad (4.241)$$

$$f_{i2}^e(t) = \rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, -1, \zeta) G_4(\xi, -1, \zeta) d\xi d\zeta \quad (4.242)$$

Finalmente, $\zeta = -1$ y $\zeta = 1$, los elementos de superficie en este caso son

$$f_{i2}^e(t) = \rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, \eta, -1) G_5(\xi, \eta, -1) d\xi d\eta \quad (4.243)$$

$$f_{i2}^e(t) = \rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{N}_i(\xi, \eta, 1) G_6(\xi, \eta, 1) d\xi d\eta \quad (4.244)$$

Para realizar la integración numérica de la matriz de masa se recomienda un arreglo de (3 X 3 X 3) puntos de integración, para la matriz de rigidez es adecuado usar un esquema de (2 X 2 X 2) puntos (Petyt, 2010). La matriz de amortiguamiento puede ser integrada siguiendo recomendaciones del capítulo anterior, junto con la fuerza asociada a la aceleración del contorno

4.7. PENTAHEDRO RECTO

En algunos casos es necesario complementar el elemento hexahedrico con un pentaedro que posea una forma similar a una cuña, para ello convinaremos coordenadas cartesianas para la dirección z y coordenadas de área de triangulo como fueron vistas en el capítulo anterior, en la sección 3.7

$$p = p(x, y, t) \approx \sum_{i=1}^6 \hat{N}_i(x, y, z) \hat{p}_i(t) \quad (4.245)$$

$$\hat{N}_i = \frac{1}{2} L_i (1 + \zeta_i \zeta) \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.246)$$

Donde $\zeta_i = \pm 1$ y L_i son las funciones de interpolación de coordenadas de triángulo

$$L_i = \frac{1}{2A} (A_i^0 + a_i x + b_i y) \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.247)$$

$$L_i = L_{i-3} \quad i = 4, 5, 6$$

La matriz de masa es dada por

$$\mathbf{M}^e = \left[\int_V \frac{1}{c(\mathbf{x})^2} \hat{\mathbf{N}}^T(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) dV \right] \quad (4.248)$$

En forma mas clara tenemos

$$m_{ij}^e = \int_V \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \hat{N}_i(\mathbf{x}) \hat{N}_j(\mathbf{x}) dV \quad i = 1, \dots, 6 \quad j = 1, \dots, 6 \quad (4.249)$$

Si la velocidad del sonido es considerada constante en el elemento

$$m_{ij}^e = \frac{1}{c^2} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (1 + \zeta_i \zeta) \frac{1}{2} (1 + \zeta_j \zeta) a_z d\zeta \int_A L_i L_j dA \quad (4.250)$$

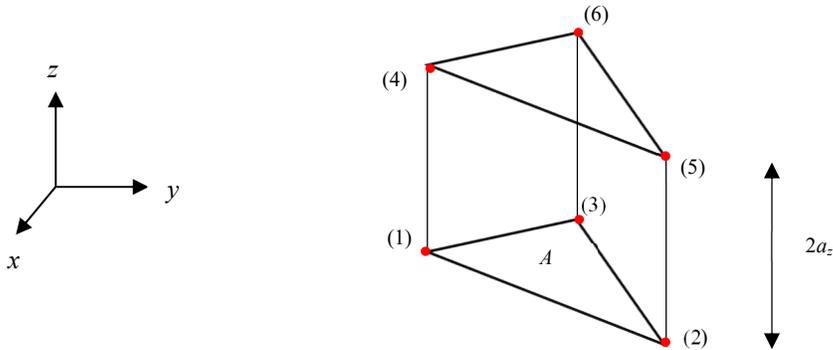


Figura 4.9. Elemento Acústico Pentahedro.

Podemos separar las integrales y usar la formulación de los capítulos anteriores

$$\frac{1}{c^2} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (1 + \zeta_i \zeta) \frac{1}{2} (1 + \zeta_j \zeta) a_z d\zeta = \begin{cases} \frac{2a_z}{3c^2} & i = j \\ \frac{a_z}{3c^2} & i \neq j \end{cases} \quad (4.251)$$

$$\int_A L_i L_j dA = \begin{cases} \frac{2A}{12} & i = j \\ \frac{A}{12} & i \neq j \end{cases} \quad (4.252)$$

Entonces la matriz de masa elemental es

$$\mathbf{M}^e = \frac{A a_z}{36 c^2} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Recordemos que la matriz de rigidez es

$$\mathbf{K}^e = \left[\int_V (\nabla \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}))^T \nabla \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) dV \right] \quad (4.253)$$

$$k_{ij}^e = \int_V (\nabla_{xyz} \hat{N}_i(x, y, z))^T \nabla_{xyz} \hat{N}_j(x, y, z) dx dy dz \quad (4.254)$$

$$k_{ij}^e = \int_V \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial x} + \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial y} + \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial z} \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial z} dV \quad (4.255)$$

A fin de clarificar con mayor detalle recordaremos que en este caso que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial x} &= \frac{a_i}{4A} (1 + \zeta_i \zeta) \\ \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial y} &= \frac{b_i}{4A} (1 + \zeta_i \zeta) \\ \frac{\partial \hat{N}_i}{\partial z} &= \frac{\zeta_i}{2a_z} L_i \end{aligned} \quad (4.256)$$

Donde

$$a_i = a_{i-3} \quad b_i = b_{i-3} \quad i = 4, 5, 6 \quad (4.257)$$

La matriz de rigidez elemental es

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} k_{12} & k_6 & k_4 & k_9 & k_5 & k_3 \\ k_6 & k_{11} & k_2 & k_5 & k_8 & k_1 \\ k_4 & k_2 & k_{10} & k_3 & k_1 & k_7 \\ k_9 & k_5 & k_3 & k_{12} & k_6 & k_4 \\ k_5 & k_8 & k_1 & k_6 & k_{11} & k_2 \\ k_3 & k_1 & k_7 & k_4 & k_2 & k_{10} \end{bmatrix} \quad (4.258)$$

Donde

$$\begin{aligned} k_1 &= (a_2 a_3 a_z)/(12A) - A/(24a_z) + (a_2 b_2 b_3)/(12A) \\ k_2 &= A/(24a_z) + (a_2 a_3 a_z)/(12A) + (a_2 b_2 b_3)/(12A) \\ k_3 &= (a_1 a_3 a_z)/(12A) - A/(24a_z) + (a_z b_1 b_3)/(12A) \\ k_4 &= A/(24a_z) + (a_1 a_3 a_z)/(12A) + (a_z b_1 b_3)/(12A) \\ k_5 &= (a_1 a_2 a_z)/(12A) - A/(24a_z) + (a_z b_1 b_2)/(12A) \\ k_6 &= A/(24a_z) + (a_1 a_2 a_z)/(12A) + (a_z b_1 b_2)/(12A) \\ k_7 &= (a_z a_3^2)/(12A) + (a_z b_3^2)/(12A) - A/(24a_z) \\ k_8 &= (a_z a_2^2)/(12A) + (a_z b_2^2)/(12A) - A/(24a_z) \\ k_9 &= (a_z a_1^2)/(12A) + (a_z b_1^2)/(12A) - A/(24a_z) \\ k_{10} &= (a_z a_3^2)/(6A) + (a_z b_3^2)/(6A) + A/(12a_z) \\ k_{11} &= (a_z a_2^2)/(6A) + (a_z b_2^2)/(6A) + A/(12a_z) \\ k_{12} &= (a_z a_1^2)/(6A) + (a_z b_1^2)/(6A) + A/(12a_z) \end{aligned} \quad (4.259)$$

La matriz de amortiguamiento es

$$\mathbf{C} = \left[\int_{S_R} \rho_0(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) dS \right] \quad (4.260)$$

$$c_{ij} = \int_{S_R} \rho_0(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) \hat{N}_i(\mathbf{x}) \hat{N}_j(\mathbf{x}) dS \quad (4.261)$$

En el caso de que la densidad y la admitancia sean constantes en el elemento tenemos

$$c_{ij} = \rho_0 Y \int_{S_R} \hat{N}_i(\mathbf{x}) \hat{N}_j(\mathbf{x}) dS \quad (4.262)$$

Esta integral al ser evaluada en $\zeta = -1$, es decir el área de los nodos 1, 2 y 3 se reduce a

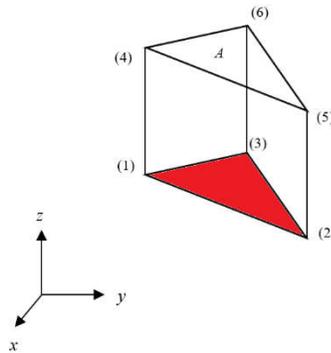


Figura 4.10 – Condición de contorno de impedancia en $\zeta = -1$,

$$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.263)$$

En el caso de en $\zeta = 1$, es decir en los nodos 4, 5 y 6 la matriz de amortiguamiento será:

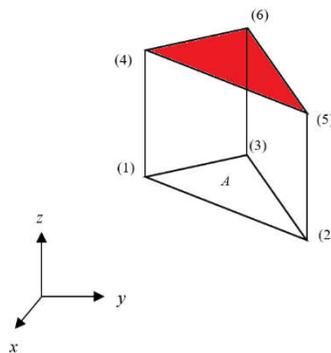


Figura 4.11 – Condición de contorno de impedancia en $\zeta = 1$

$$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y A}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.264)$$

Ahora bien, para la superficie dada por $L_1 = 0$, es decir el área de los nodos 2, 3, 5 y 6 la matriz de amortiguamiento es:

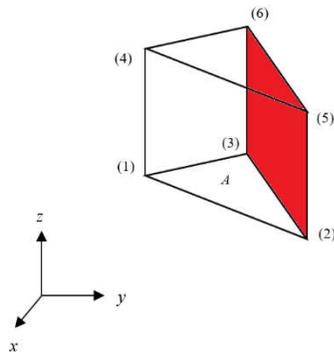


Figura 4.12 – Condición de contorno de impedancia en $L_1 = 0$,

$$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y a_z l_{23}}{9} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.265)$$

Para la superficie $L_2 = 0$, es decir el área formada por los nodos 1, 2, 4 y 5 la matriz de amortiguamiento será:

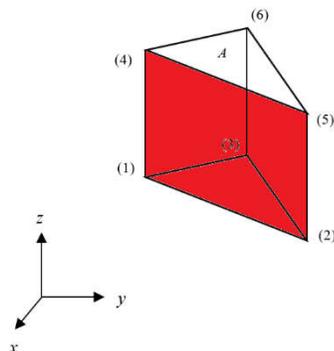


Figura 4.12 – Condición de contorno de impedancia en $L_2 = 0$,

$$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y a_z l_{12}}{9} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.266)$$

Finalmente, para $L_3 = 0$, es decir el área formada por los nodos 1, 3, 4 y 6, la matriz de amortiguamiento será:

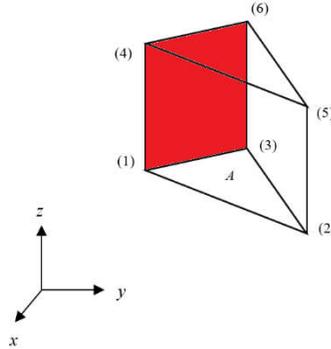


Figura 4.13 – Condición de contorno de impedancia en $L_3 = 0$,

$$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y a_z l_{13}}{9} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.267)$$

Para fuerzas tenemos

$$\mathbf{f}(t) = - \int_{S_N} \rho_0(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) \, dS + \int_V \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T q(\mathbf{x}, t) \, dV \quad (4.268)$$

Donde cada elemento se escribe:

$$f_i^e(t) = \int_V \hat{N}_i(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}, t) \, dV - \int_{S_N} \rho_0(\mathbf{x}) \hat{N}_i(\mathbf{x}) \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) \, dS \quad (4.269)$$

La primera integral, la cual obviamente considera fuerzas corporales se puede expresar como:

$$f_{i1}^e(t) = \int_V \hat{N}_i(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}, t) \, dV \quad (4.270)$$

Si las fuerzas corporales son constantes en el elemento

$$f_{i1}^e(t) = q(t) \int_V \hat{N}_i(\mathbf{x}) \, dV \quad (4.271)$$

$$f_{i1}^e(t) = q(t) A a_z [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T \quad (4.272)$$

En la segunda integral debemos ir detallando cada superficie

$$f_{i2}^e(t) = - \int_{S_N} \rho_0(\mathbf{x}) \hat{N}_i(\mathbf{x}) \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) dS \quad (4.273)$$

Considerando las propiedades constantes en el elemento

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) \int_{S_N} \hat{N}_i(\mathbf{x}) dS \quad (4.274)$$

El vector de fuerza en $\zeta = -1$, es decir el área de los nodos 1, 2 y 3 se reduce a

$$f_{i1}^e(t) = -\frac{\rho_0 \dot{u}_n(t) A}{3} [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (4.275)$$

El vector de fuerza en $\zeta = 1$, es decir el área de los nodos 4, 5 y 6 se reduce a

$$f_{i1}^e(t) = -\frac{\rho_0 \dot{u}_n(t) A}{3} [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]^T \quad (4.276)$$

Para el resto de las superficies tenemos

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) l_{23} a_z [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1]^T \quad (4.277)$$

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) l_{12} a_z [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]^T \quad (4.278)$$

$$f_{i2}^e(t) = -\rho_0 \dot{u}_n(t) l_{31} a_z [1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]^T \quad (4.279)$$

4.8. TETRAHEDRO LINEAL

Partamos desde el sistema de coordenadas globales (x, y, z) el cual será convertido de forma análoga a la sección 4.6 a un sistema volumétrico de coordenadas definido para cada tetrahedro. Esto divide al tetrahedro en 4 sub tetrahedros. Para propósitos de simplicidad no consideraremos el tiempo en este momento, ya que el objetivo es la construcción de las funciones de interpolación

Las coordenadas de área para un punto P dentro del triángulo están dadas por las relaciones de volumen

$$L_1 = \frac{V_1}{V} \quad L_2 = \frac{V_2}{V} \quad L_3 = \frac{V_3}{V} \quad L_4 = \frac{V_4}{V} \quad (4.280)$$

Como

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = V \quad (4.281)$$

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1 \quad (4.282)$$

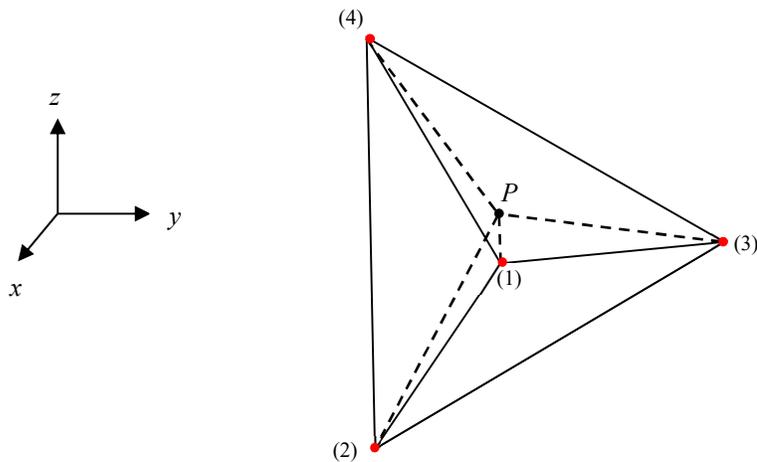


Figura 6.9. Elemento Acústico Tetrahedro – Coordenadas de Volumen.

Las coordenadas cartesianas y de volumen están relacionadas por:

$$\begin{aligned} x &= x_1L_1 + x_2L_2 + x_3L_3 + x_4L_4 \\ y &= y_1L_1 + y_2L_2 + y_3L_3 + y_4L_4 \\ z &= z_1L_1 + z_2L_2 + z_3L_3 + z_4L_4 \end{aligned} \quad (4.283)$$

Donde los vectores de cada punto del tetrahedro están dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= [x_1 \quad y_1 \quad z_1]^T \\ \mathbf{x}_2 &= [x_2 \quad y_2 \quad z_2]^T \\ \mathbf{x}_3 &= [x_3 \quad y_3 \quad z_3]^T \\ \mathbf{x}_4 &= [x_4 \quad y_4 \quad z_4]^T \end{aligned} \quad (4.284)$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} \quad (4.285)$$

Invirtiendo la matriz tenemos las relaciones

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (4.286)$$

El volumen del tetrahedro es dado por

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (4.287)$$

La presión sonora para el elemento tetraédrico es

$$p = p(x, y, z, t) \approx \sum_{i=1}^4 \hat{N}_i(x, y, z) \hat{p}_i(t) = \sum_{i=1}^4 L_i(x, y, z) \hat{p}_i(t) \quad (4.288)$$

Por lo tanto, la matriz elemental de masa es

$$\mathbf{M}^e = \left[\int_V \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \hat{\mathbf{N}}^T(\mathbf{x}) \quad \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \quad dV \right] \quad (4.289)$$

$$m_{ij}^e = \int_V \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \hat{N}_i(\mathbf{x}) \hat{N}_j(\mathbf{x}) \quad dV \quad i = 1, \dots, 4 \quad j = 1, \dots, 4 \quad (4.290)$$

Si las propiedades del fluido son constantes

$$m_{ij}^e = \frac{1}{c^2} \int_V \hat{N}_i(\mathbf{x}) \hat{N}_j(\mathbf{x}) \quad dV = \frac{1}{c^2} \int_V L_i(\mathbf{x}) L_j(\mathbf{x}) \quad dV \quad (4.291)$$

Usando la fórmula (Eisenberg, Malvern, 1973)

$$\int_V L_1^m L_2^n L_3^p L_4^q \quad dV = \frac{m! n! p! q!}{(m + n + p + q + 3)!} 6V \quad (4.292)$$

$$\int_V L_i L_j \quad dV = \frac{1! 1! 0! 0!}{(1 + 0 + 0 + 0 + 3)!} 6V = \frac{1}{5!} 6V = \frac{1}{20} V \quad (4.293)$$

$$\int_V L_i^2 \quad dV = \frac{2! 0! 0! 0!}{(2 + 0 + 0 + 0 + 3)!} 6V = \frac{2!}{5!} 6V = \frac{1}{10} V \quad (4.294)$$

Podemos resumir

$$\int_V L_i L_j \quad dV = \begin{cases} V/10 & i = j \\ V/20 & i \neq j \end{cases} \quad (4.295)$$

La matriz de masa elemental es:

$$\mathbf{M}^e = \frac{V}{20c^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.296)$$

La matriz de rigidez es dada por

$$\mathbf{K}^e = \left[\int_V (\nabla \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}))^T \quad \nabla \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \quad dV \right] \quad (4.297)$$

$$k_{ij}^e = \int_V (\nabla_{xyz} \hat{N}_i(\mathbf{x}))^T \quad \nabla_{xyz} \hat{N}_j(\mathbf{x}) \quad dV \quad (4.298)$$

$$\nabla_{xy} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right]^T \quad (4.299)$$

Siguiendo el razonamiento utilizado en el capítulo anterior, sección 4.6, tenemos

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{b_i}{6V} \quad (4.300)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial L_i}{\partial y} = \frac{c_i}{6V} \quad (4.301)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial z} = \frac{\partial L_i}{\partial z} = \frac{d_i}{6V} \quad (4.302)$$

Donde los valores de b_i , c_i y d_i , corresponde a la inversa de la matriz \mathbf{A} , dada por la ecuación (4.aaa). Por lo tanto, al incorporar esto en la matriz de rigidez tenemos:

$$\mathbf{K}^e = \left[\int_V \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} dV \right] \quad (4.303)$$

Como son elementos constantes salen de la integral

$$\mathbf{K}^e = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \left[\int_V dV \right] \quad (4.304)$$

$$\mathbf{K}^e = \frac{1}{36V} \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \quad (4.305)$$

A continuación, trabajaremos la matriz de amortiguamiento para cada uno de las caras del tetrahedro. La matriz de amortiguamiento elemental tomará la forma básica de

$$\mathbf{C}^e = \int_{S_R} \rho_0(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T \hat{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) dS \quad (4.306)$$

$$c_{ij}^e = \int_{S_R} \rho_0(\mathbf{x}) Y(\mathbf{x}) \hat{N}_i(\mathbf{x}) \hat{N}_j(\mathbf{x}) dS \quad (4.307)$$

Pensemos que las propiedades del fluido y la admitancia de la superficie son constantes. Además usando las funciones definidas anteriormente tenemos:

$$c_{ij}^e = \rho_0 Y \int_{S_R} \hat{N}_i(\mathbf{x}) \hat{N}_j(\mathbf{x}) dS = \rho Y \int_{S_R} L_i(\mathbf{x}) L_j(\mathbf{x}) dS \quad (4.308)$$

Usando los resultados de la sección 4.6 tenemos que

$$\int_S L_1^m(\mathbf{x}) L_2^n(\mathbf{x}) L_3^p(\mathbf{x}) dS = \frac{m! n! p!}{(m+n+p+2)!} 2A \quad (4.309)$$

Entonces

$$\int_S L_i(\mathbf{x}) L_j(\mathbf{x}) dS = \frac{1! 1! 0!}{(1+1+0+2)!} 2A = \frac{1}{4!} 2A = \frac{1}{12} A \quad (4.310)$$

$$\int_S L_i^2(\mathbf{x}) dS = \frac{2!0!0!}{(1+1+0+2)!} 2A = \frac{2}{4!} 2A = \frac{1}{6} A \quad (4.311)$$

Para la cara 123 tenemos

$$\begin{aligned} c_{ij}^e &= \rho_0 Y \int_{S_R} \hat{N}_i(\mathbf{x}, L_4 = 0) \hat{N}_j(\mathbf{x}, L_4 = 0) dS = \\ c_{ij}^e &= \rho Y \int_{S_R} L_i(\mathbf{x}, L_4 = 0) L_j(\mathbf{x}, L_4 = 0) dS \end{aligned} \quad (4.312)$$

$$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y A_{123}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.313)$$

Donde la superficie A_{123} es dada por la expresión:

$$A_{123} = |(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3)| \quad (4.314)$$

Para la cara 234

$$\begin{aligned} c_{ij}^e &= \rho_0 Y \int_{S_R} \hat{N}_i(\mathbf{x}, L_1 = 0) \hat{N}_j(\mathbf{x}, L_1 = 0) dS = \\ c_{ij}^e &= \rho Y \int_{S_R} L_i(\mathbf{x}, L_1 = 0) L_j(\mathbf{x}, L_1 = 0) dS \end{aligned} \quad (4.315)$$

$$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y A_{234}}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.316)$$

Donde la superficie A_{234} es dada por la expresión:

$$A_{234} = |(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4)| \quad (4.317)$$

Para la cara 134

$$\begin{aligned} c_{ij}^e &= \rho_0 Y \int_{S_R} \hat{N}_i(\mathbf{x}, L_2 = 0) \hat{N}_j(\mathbf{x}, L_2 = 0) dS_R = \\ c_{ij}^e &= \rho Y \int_{S_R} L_i(\mathbf{x}, L_2 = 0) L_j(\mathbf{x}, L_2 = 0) dS_R \end{aligned} \quad (4.318)$$

$$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y A_{134}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.319)$$

Donde la superficie A_{134} es dada por la expresión:

$$A_{134} = |(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4)| \quad (4.320)$$

Para la cara 124

$$\begin{aligned}
c_{ij}^e &= \rho_0 Y \int_{S_R} \widehat{N}_i(\mathbf{x}, L_3 = 0) \widehat{N}_j(\mathbf{x}, L_3 = 0) dS = \\
c_{ij}^e &= \rho Y \int_{S_R} L_i(\mathbf{x}, L_3 = 0) L_j(\mathbf{x}, L_3 = 0) dS
\end{aligned} \tag{4.321}$$

$$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y A_{124}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{4.322}$$

Donde la superficie A_{124} es dada por la expresión:

$$A_{124} = |(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4)| \tag{4.323}$$

Podemos resumir los resultados de las diversas posibilidades de matrices de amortiguamiento elemental en la tabla 4.1.

Para fuerzas tenemos

$$\mathbf{f}(t) = - \int_{S_N} \rho_0(\mathbf{x}) \widehat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) dS + \int_V \widehat{\mathbf{N}}(\mathbf{x})^T q(\mathbf{x}, t) dV \tag{4.324}$$

Donde cada elemento se escribe:

$$f_i^e(t) = \int_V \widehat{N}_i(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}, t) dV - \int_{S_N} \rho_0(\mathbf{x}) \widehat{N}_i(\mathbf{x}) \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) dS \tag{4.325}$$

O bien

$$f_i^e(t) = \int_V L_i(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}, t) dV - \int_{S_N} \rho_0(\mathbf{x}) L_i(\mathbf{x}) \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) dS \tag{4.326}$$

La primera integral, la cual obviamente considera fuerzas corporales se puede expresar como:

$$f_{i1}^e(t) = \int_V L_i(\mathbf{x}) q(t) dV \tag{4.327}$$

Si las fuerzas corporales son constantes en el elemento

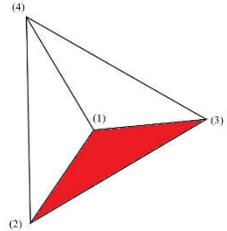
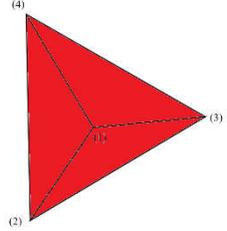
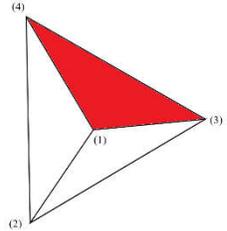
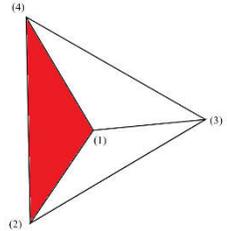
$$f_{i1}^e(t) = q(t) \int_V L_i(\mathbf{x}) dV \tag{4.328}$$

Entonces, usando la formula anterior

$$\int_V L_1^m L_2^n L_3^p L_4^q dV = \frac{m! n! p! q!}{(m + n + p + q + 3)!} 6V \tag{4.329}$$

Tabla 4.1. Matrices de Amortiguamiento Elemental – Elemento Triangular

Condición de Contorno de Impedancia	Matriz de Amortiguamiento Elemental
-------------------------------------	-------------------------------------

	$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y A_{123}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
	$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y A_{234}}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
	$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y A_{134}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
	$\mathbf{C}^e = \frac{\rho_0 Y A_{124}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\int_V L_i \, dV = \frac{1! 0! 0! 0!}{(1 + 0 + 0 + 0 + 3)!} 6V = \frac{1}{4!} 6V = \frac{1}{4} V \quad (4.330)$$

$$f_{i1}^e(t) = q(t) \frac{V}{4} [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T \quad (4.331)$$

Para los efectos de aceleración en el contorno

$$f_{2i}^e(t) = - \int_{S_N} \rho_0(\mathbf{x}) L_i(\mathbf{x}) \dot{u}_n(\mathbf{x}, t) \, dS \quad (4.332)$$

Si estas variables son constantes en el contorno

$$f_{2i}^e(t) = -\dot{u}_n(t) \rho_0 \int_{S_N} L_i(\mathbf{x}) \, dS \quad (4.333)$$

Entonces al aplicar la fórmula

$$\int_S L_1^m(\mathbf{x})L_2^n(\mathbf{x})L_3^p(\mathbf{x}) dS = \frac{m! n! p!}{(m + n + p + 2)!} 2A \quad (4.334)$$

$$\int_S L_i(\mathbf{x}) dS = \frac{1! 0! 0!}{(1 + 0 + 0 + 2)!} 2A = \frac{1}{3!} 2A = \frac{1}{3} A \quad (4.335)$$

Por lo tanto, para la cara 123

$$f_{2i}^e(t) = -\dot{u}_n(t)\rho_0 \int_{S_N} L_i(\mathbf{x}, L_4 = 0) dS_N \quad (4.336)$$

$$f_{i1}^e(t) = \frac{-\dot{u}_n(t)\rho_0 A_{123}}{3} [1 \ 1 \ 1 \ 0]^T \quad (4.337)$$

Por lo tanto, para la cara 234

$$f_{2i}^e(t) = -\dot{u}_n(t)\rho_0 \int_{S_N} L_i(\mathbf{x}, L_1 = 0) dS_N \quad (4.338)$$

$$f_{i1}^e(t) = \frac{-\dot{u}_n(t)\rho_0 A_{234}}{3} [0 \ 1 \ 1 \ 1]^T \quad (4.339)$$

Por lo tanto, para la cara 134

$$f_{2i}^e(t) = -\dot{u}_n(t)\rho_0 \int_{S_N} L_i(\mathbf{x}, L_2 = 0) dS_N \quad (4.340)$$

$$f_{i1}^e(t) = \frac{-\dot{u}_n(t)\rho_0 A_{134}}{3} [1 \ 0 \ 1 \ 1]^T \quad (4.341)$$

Por lo tanto, para la cara 124

$$f_{2i}^e(t) = -\dot{u}_n(t)\rho_0 \int_{S_N} L_i(\mathbf{x}, L_3 = 0) dS_N \quad (4.342)$$

$$f_{i1}^e(t) = \frac{-\dot{u}_n(t)\rho_0 A_{123}}{3} [1 \ 1 \ 0 \ 1]^T \quad (4.343)$$

4.9. AUMENTANDO LA EXACTITUD EN LOS ELEMENTOS

Para hexaedros una de las formas más simples de incrementar el orden de las funciones de interpolación es usar elementos lagrangianos cuadráticos, lo que implica un elemento de veinte y siete nodos. Las funciones son expresadas en las ecuaciones siguientes y se puede observar los elementos y su mapeamiento en la figura 4.10

$$p = p(x, y, z, t) \approx \sum_{i=1}^{27} \hat{N}_i(x, y, z) \hat{p}_i(t) = \sum_{i=1}^{27} \hat{N}_i(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \hat{p}_i(t) \quad (4.344)$$

$$\hat{N}_n(\xi, \eta, \zeta) = N_i^\xi(\xi) N_j^\eta(\eta) N_k^\zeta(\zeta)$$

$$i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3 \quad k = 1,2,3$$

$$n = 1, \dots, 27$$

$$\begin{aligned} L_1^\xi(\xi) &= -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) & L_2^\xi(\xi) &= (1-\xi^2) & L_3^\xi(\xi) &= \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \\ L_1^\eta(\eta) &= -\frac{1}{2}\eta(1-\eta) & L_2^\eta(\eta) &= (1-\eta^2) & L_3^\eta(\eta) &= \frac{1}{2}\eta(1+\eta) \\ L_1^\zeta(\zeta) &= -\frac{1}{2}\zeta(1-\zeta) & L_2^\zeta(\zeta) &= (1-\zeta^2) & L_3^\zeta(\zeta) &= \frac{1}{2}\zeta(1+\zeta) \end{aligned} \quad (4.345)$$

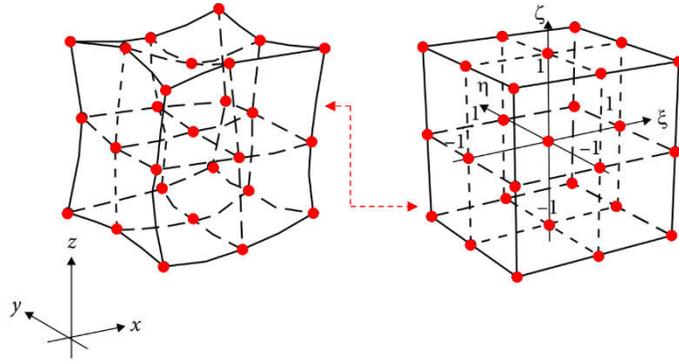


Figura 4.10. Elemento Acústico Hexahédrico – Mapeamiento.

Este hexahedro puede ser transformado en uno con superficies curvas usando el mapeamiento

$$x = \sum_{i=1}^{27} \hat{N}_i x_i \quad y = \sum_{i=1}^{27} \hat{N}_i y_i \quad z = \sum_{i=1}^{27} \hat{N}_i(\xi, \eta, \zeta) z_i \quad (4.346)$$

El cálculo de las matrices elementales se realiza usando las fórmulas de la sección 4.6, usando en un esquema de integración numérica inicialmente usado es de (5 X 5 X 5), sin embargo si la discretización es alta se puede usar un esquema de (3 X 3 X 3)

De igual forma podemos realizar un procedimiento similar para el pentahedro mostrado en la figura 6.11, donde las funciones de inperpolación son:

$$p = p(x, y, z, t) \approx \sum_{i=1}^{15} \hat{N}_i(x, y, z) \hat{p}_i(t) \quad (4.347)$$

$$\hat{N}_j = \frac{1}{2} L_j (2L_j - 1) (1 + \zeta_j \zeta) - \frac{1}{2} L_j (1 - \zeta^2)$$

Para los nodos $j = 1 - 6$ con $L_j = L_{j-3}$ para los nodos $j = 4,5,6$. Por otro lado para los nodos asociados a los subíndices $j = 7 - 12$ las funciones son:

$$\hat{N}_7 = 2L_1 L_2 (1 - \zeta) \quad \hat{N}_{10} = 2L_1 L_2 (1 + \zeta) \quad (4.348)$$

$$\hat{N}_8 = 2L_2L_3(1 - \zeta)$$

$$\hat{N}_{11} = 2L_2L_3(1 + \zeta)$$

$$\hat{N}_9 = 2L_3L_1(1 - \zeta)$$

$$\hat{N}_{12} = 2L_3L_1(1 + \zeta)$$

Finalmente para los nodos $j = 13, 14, 15$

$$\hat{N}_j = \frac{1}{2}L_{j-12}(1 - \zeta^2) \quad (4.349)$$

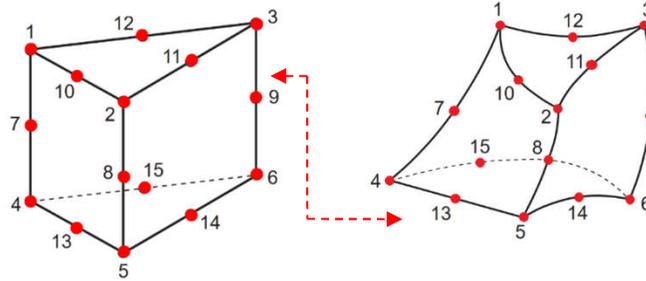


Figura 6.11. Elemento Acústico Pentahédrico.

El elemento pentahédrico puede poseer superficies curvas al usar el mapeamento

$$x = \sum_{i=1}^{15} \hat{N}_i x_i \quad y = \sum_{i=1}^{15} \hat{N}_i y_i \quad z = \sum_{i=1}^{15} \hat{N}_i(\xi, \eta, \zeta) z_i \quad (4.350)$$

Como se vió anteriormente, el cálculo de las matrices elementales se realiza usando las fórmulas de la sección 4.7, se sugiere usar para integrar en forma exacta con un esquema (6 X 3).

Se puede realizar el mismo proceso para el tetrahedro como es mostrado en la figura 6.12. Las funciones de interpolación son expresadas en las ecuaciones (4.351). Las matrices elementales se pueden evaluar usando cuatro puntos de integración, estos son $(\alpha, \beta, \beta, \beta)$, $(\beta, \alpha, \beta, \beta)$, $(\beta, \beta, \alpha, \beta)$ y $(\beta, \beta, \beta, \alpha)$ donde $\alpha = 0.58541020$ y $\beta = 0.13819660$ donde la ponderación para todos los puntos es $1/4$.

$$p = p(x, y, z, t) \approx \sum_{i=1}^{10} \hat{N}_i(x, y, z) \hat{p}_i(t)$$

$$\hat{N}_j = L_j(2L_j - 1) \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (4.351)$$

$$\hat{N}_5 = 4L_1L_2$$

$$\hat{N}_6 = 4L_2L_3$$

$$\hat{N}_7 = 4L_3L_1$$

$$\hat{N}_8 = 4L_1L_4$$

$$\hat{N}_9 = 4L_2L_4$$

$$\hat{N}_{10} = 4L_3L_4$$

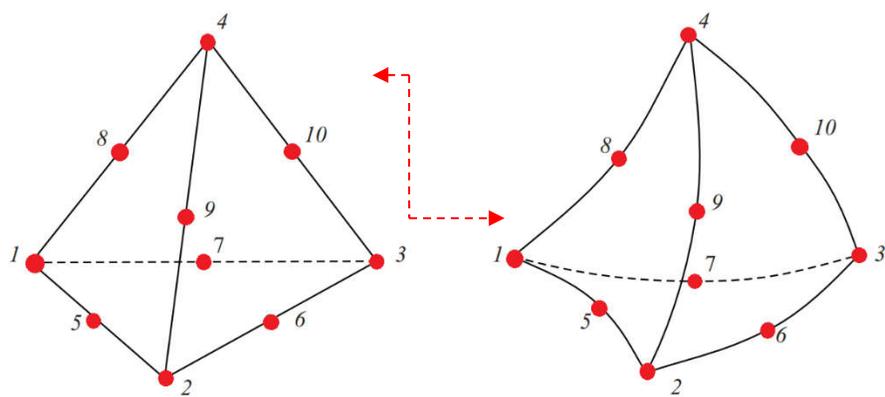


Figura 4.12. Elemento Acústico Tetrahédrico.