

CAPÍTULO II
ELEMENTOS FINITOS EN ACÚSTICA:
PROBLEMAS EN UNA DIMENSIÓN

2. ELEMENTOS FINITOS EN ACÚSTICA: PROBLEMAS EN UNA DIMENSIÓN

2.1. INTRODUCCION

Las soluciones analíticas de las ecuaciones diferenciales que rigen en acústica pueden obtenerse siempre y cuando las condiciones de contorno que definen los límites físicos se pueden describir simples términos matemáticos (Nelson 1998). Esto rara vez sucede en problemas prácticos como es el caso en ingeniería y, por lo tanto, generalmente es necesario emplear métodos numéricos que entreguen soluciones aproximadas. Los dos más utilizados son el método de elementos finitos (FEM) y el método de elemento contorno (BEM).

Los métodos de elementos finitos se desarrollaron primero para analizar estructuras de ingeniería complejas. Una vez que el método recibió una firme base matemática, era natural que se usara para analizar otros problemas físicos que pueden representar mediante ecuaciones diferenciales parciales. El campo de la acústica no ha sido la excepción. Si bien el método de los elementos finitos fue primero desarrollado para predecir el comportamiento sonoro en espacios cerrados, posteriormente, se aplicó a problemas exteriores. Los problemas vibroacústicos se pueden analizar combinando las ecuaciones de movimiento de la estructura vibratoria con las ecuaciones de movimiento del medio acústico, esto es extremadamente útil tanto para predecir el ruido irradiado por máquinas como para el sonido producido por instrumentos musicales

En el método de los elementos finitos se representa un sistema continuo, que tiene un infinito número de grados de libertad, por un sistema discreto que tiene un número finito de grados de libertad. La precisión de la solución depende del número de grados de libertad utilizados. Cuanto mayor es la frecuencia de interés cuantos más grados de libertad se requieran. Por lo tanto, a altas frecuencias, tales métodos se vuelven ineficientes. En consecuencia, solo se usan en bajas frecuencias donde las longitudes de onda son de un orden de magnitud similar a la geometría definida, podemos decir como ejemplo que para una cavidad esférica los resultados no tienen sentido para $kR > 20$, donde k es el número de onda y R es el radio. Los problemas acústicos de alta frecuencia se analizan usando técnicas geométricas o de trazado de rayos (Pierce 1989), y los problemas vibroacústicos se manejan mediante análisis estadístico de energía (Lyon y DeJong 2014).

En este capítulo nos centraremos en obtener la formulación débil o integral de la ecuación de onda, usaremos el método de Galerkin (Marburg y Nolte, 2008) para poder discretizar las ecuaciones integrales resultantes, incorporaremos diversas fuentes y campos sonoros incidentes, finalmente determinaremos las matrices asociadas a los sistemas de ecuaciones diferenciales. Consideraremos en esta etapa solamente problemas interiores, es decir que en esta parte del proceso existirá de algún tipo de frontera que puede ser modelada por medio de condiciones de Dirichlet, Neumann, Robin o una combinación de todas ellas. Se considerará específicamente tubos donde la sección transversal puede variar; sin embargo, la longitud de onda debe ser mucho mayor que el diámetro del ducto para que las ondas sean planas. Al considerar un problema interior, la longitud del tubo será L , el cual inicialmente tendrá una terminación rígida, abierta o de material absorbente. Sin embargo, mediante el uso de condiciones de contorno adecuadas se puede simular el tubo abierto de una manera más simplificada y posteriormente de forma más realista al incluir la impedancia de radiación (Kinsler et. al., 2000 - Kuttruff, 2004). El objetivo es mostrar de manera detallada el proceso de formación de matrices tanto globales como elementales. Por otra parte, se plantean métodos simples de resolución y se reflexionará en relación con los resultados

La ecuación de onda plana en un tubo de longitud L , definido entre $-L/2$ y $L/2$ y sus condiciones iniciales son:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2.001)$$

$$p(x, 0) = p_o(x) \quad (2.002)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = \dot{p}_o(x) \quad (2.003)$$

Las condiciones de contorno más interesantes de analizar en este capítulo son:

- a. Fuente al inicio del tubo, lo que corresponde a una condición de Dirichlet no homogénea en $x = -L/2$

$$p(-L/2, t) = P_o(t) \quad (2.004)$$

- b. Tubo abierto ideal o liberación de presión en $x = L/2$, lo que corresponde a una condición de Dirichlet homogénea.

$$p(L/2, t) = 0 \quad (2.005)$$

- c. Tubo cerrado en uno y/o ambos extremos, es decir condición de contorno de Neumann homogénea en ambos extremos.

$$\frac{\partial p}{\partial x}(-L/2, t) = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial x}(L/2, t) = 0 \quad (2.006)$$

- d. Tubo con impedancia acústica específica característica Z en $x = L/2$, o bien un tubo abierto considerando la impedancia acústica específica de radiación Z_R en $x = L/2$ en ambos casos tenemos una condición de Robin.

$$\frac{p(L/2, t)}{u(L/2, t)} = Z \quad (2.007)$$

$$\frac{p(L/2, t)}{u(L/2, t)} = Z_R$$

Si bien existen soluciones analíticas para la ecuación (2.001) sujetas a las variadas condiciones iniciales y de contorno enunciadas en las ecuaciones (2.002) a (2.007), basta con que el tubo tenga un cambio arbitrario en la geometría de su sección transversal para que esto no sea posible. Por lo tanto, es necesario obtener una solución de carácter aproximado.

2.2 ECUACIÓN DE ONDA FORMULACIÓN INTEGRAL O DÉBIL

El proceso de obtener una solución aproximada parate por convertir la ecuación de onda desde una forma diferencial o fuerte a una forma integral, también llamada formulación débil. Para ello comenzamos con la ecuación de onda (2.008) la multiplicamos por la variación δp de la presión sonora (también llamada función de peso) e integramos en el dominio y obtenemos la expresión (2.009)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2.008)$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} \delta p \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) dx = 0 \quad (2.009)$$

Entenderemos la variación δp como un cambio infinitesimal e imaginario de la presión sonora que es compatible con las condiciones de contorno. Un ejemplo de esta puede ser expresado en la siguiente figura.

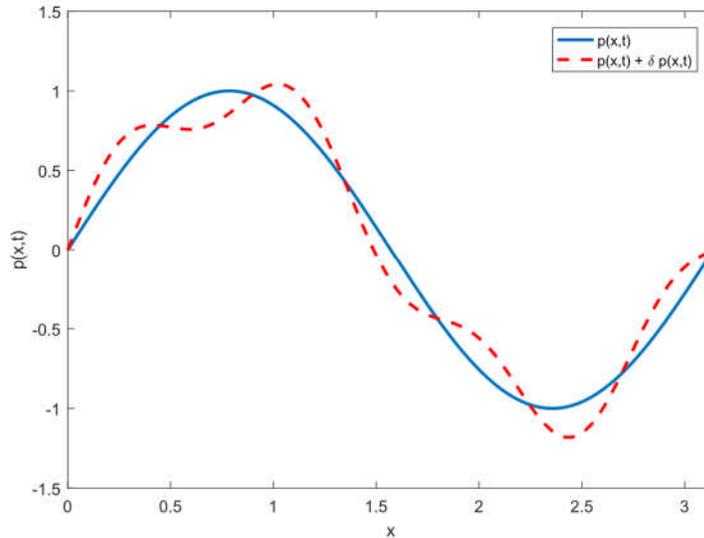


Figura 2.1. Presión sonora y variación de la presión sonora

Separamos las integrales e integramos la segunda por partes usando la clásica expresión

$$\int_{-L/2}^{L/2} vdw = vw \Big|_{-L/2}^{L/2} - \int_{-L/2}^{L/2} wdv \quad (2.010)$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} \delta p \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dx - \int_{-L/2}^{L/2} \delta p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} dx = 0 \quad (2.011)$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} \delta p \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dx + \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} dx - \delta p \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{-L/2}^{L/2} = 0 \quad (2.012)$$

Entonces tenemos

$$\int_{-L/2}^{L/2} \delta p \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dx + \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} dx - \delta p(L/2) \frac{\partial p}{\partial x}(L/2) + \delta p(-L/2) \frac{\partial p}{\partial x}(-L/2) = 0 \quad (2.013)$$

Los dos últimos términos de la ecuación (2.013) están relacionado con aquellas condiciones de frontera al inicio del tubo(2.014) y la (2.015) con aquellas del final del tubo, tanto para condiciones de contorno de Dirichlet, Neumann o Robin, es decir condiciones asociadas a presiones prescritas, velocidades de partícula prescritas o bien de impedancia.

$$\delta p(-L/2) \frac{\partial p}{\partial x}(-L/2) \quad (2.014)$$

$$\delta p(L/2) \frac{\partial p}{\partial x}(L/2) \quad (2.015)$$

Podemos incluir la variación de la sección transversal del tubo $A(x)$ y de la velocidad de propagación de ondas sonoras $c(x)$, como dependientes de la coordenada x , a fin de considerar medios no homogéneos y sección transversal del tubo variable. Parte de estos cambios se justificarán en el capítulo asociado la propagación sonora en medios tridimensionales.

$$\int_{-L/2}^{L/2} \delta p \frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} A(x) dx + \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} A(x) dx - \delta p(L/2) \frac{\partial p}{\partial x}(L/2) A(L/2) + \delta p(-L/2) \frac{\partial p}{\partial x}(-L/2) A(-L/2) = 0 \quad (2.016)$$

Si existieran fuerzas corporales $q(x, t)$ la ecuación sería dada por:

$$\int_{-L/2}^{L/2} \delta p \frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} A(x) dx + \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} A(x) dx - \delta p(L/2) \frac{\partial p}{\partial x}(L/2) A(L/2) + \delta p(-L/2) \frac{\partial p}{\partial x}(-L/2) A(-L/2) = \int_{-L/2}^{L/2} \delta p q(x, t) A(x) dx \quad (2.017)$$

Podemos incluir los efectos de impedancia en el extremo $x = L/2$, recordemos que la ecuación de fuerza en una dimensión:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} = \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad (2.018)$$

Considerando que el problema es en una dimensión solamente podemos arreglar la ecuación anterior de la siguiente forma:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad (2.019)$$

Usaremos la solución armónica

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}(x, t)}{\partial t} = j\omega \mathbf{u}(x) e^{j\omega t} = j\omega \mathbf{u}(x, t) = j\omega \mathbf{u} \quad (2.020)$$

$$\frac{\partial p(L/2, t)}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}(L/2, t)}{\partial t} = -j\rho_0 \omega \mathbf{u}(L/2) e^{j\omega t} = -j\rho_0 \omega \mathbf{u}(L/2, t) \quad (2.021)$$

Pero al incluir la impedancia acústica específica de terminación $p/\mathbf{u} = Z_L$, dicho de otra forma $p/Z = \mathbf{u}$, o bien $pY_L = \mathbf{u}$

$$\frac{\partial p(L/2, t)}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}(L/2, t)}{\partial t} = -j\rho_0 \omega \mathbf{u}(L/2) e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial p(L/2, t)}{\partial x} = -j\rho_0 \omega Y_L p(L/2, t) \quad (2.022)$$

Al mismo tiempo al considerar la solución armónica en la presión sonora

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = j\omega p(x) e^{j\omega t} = j\omega p(x, t) = j\omega p \quad (2.023)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(L/2, t)}{\partial x} &= -\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}(L/2, t)}{\partial t} = -j\rho_0 \omega \mathbf{u}(L/2) e^{j\omega t} = -j\rho_0 \omega \mathbf{u}(L/2, t) \\ \frac{\partial p(L/2, t)}{\partial x} &= -j\rho_0 \omega Y_L p(L/2, t) = -\rho_0 Y_L \frac{\partial p(L/2, t)}{\partial t}\end{aligned}\quad (2.024)$$

Al incluir este último término en la ecuación de onda en su formulación débil

$$\begin{aligned}\int_{-L/2}^{L/2} \delta p \frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} A(x) dx + \delta p(L/2) \rho_0 Y_L \frac{\partial p(L/2, t)}{\partial t} A(L/2) \\ + \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} A(x) dx \\ = -\delta p(-L/2) \frac{\partial p}{\partial x}(-L/2) A(-L/2) + \int_{-L/2}^{L/2} \delta p q(x, t) A(x) dx\end{aligned}\quad (2.025)$$

Utilizado la distribución delta de Dirac $\delta(x - L/2)$ e incluyendo la presencia de fuerza corporales $q(x, t)$ como posible fuente

$$\begin{aligned}\int_{-L/2}^{L/2} \delta p \frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} A(x) dx + \int_{-L/2}^{L/2} \delta p \rho_0 Y_L \frac{\partial p}{\partial t} A(x) \delta(x - L/2) dx \\ + \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} A(x) dx \\ = -\delta p(-L/2) \frac{\partial p}{\partial x}(-L/2) A(-L/2) + \int_{-L/2}^{L/2} \delta p q(x, t) A(x) dx\end{aligned}\quad (2.026)$$

Tenemos finalmente la ecuación de onda unidimensional en su formulación débil o formulación integral.

2.3. DISCRETIZACIÓN

Partamos de la base que podemos utilizar una solución aproximada basada en el método Rayleigh-Ritz, usando una expansión finita de la forma:

$$p = p(x, t) \approx p^N(x, t) = \sum_{i=1}^N \hat{N}_i(x) \hat{p}_i(t) \quad (2.027)$$

Que en forma matricial se expresa

$$p = p(x, t) \approx [\hat{N}_1(x) \quad \hat{N}_2(x) \quad \hat{N}_3(x) \quad \dots \quad \hat{N}_N(x)] \begin{bmatrix} \hat{p}_1(t) \\ \hat{p}_2(t) \\ \hat{p}_3(t) \\ \vdots \\ \hat{p}_N(t) \end{bmatrix} \quad (2.028)$$

En forma compacta podemos decir:

$$p = p(x, t) \approx \hat{\mathbf{N}}(x) \hat{\mathbf{p}}(t) \quad (2.029)$$

Por otra parte, la variación de la presión sonora (función de peso) se puede aproximar como:

$$\delta p = \delta p(x, t) \approx \sum_{i=1}^N \hat{N}_i(x) \delta \hat{p}_i(t) \quad (2.030)$$

$$\delta p = \delta p(x, t) \approx [\hat{N}_1(x) \quad \hat{N}_2(x) \quad \hat{N}_3(x) \quad \cdots \quad \hat{N}_N(x)] \begin{bmatrix} \delta \hat{p}_1(t) \\ \delta \hat{p}_2(t) \\ \delta \hat{p}_3(t) \\ \vdots \\ \delta \hat{p}_N(t) \end{bmatrix} \quad (2.031)$$

En forma compacta podemos denotar

$$\delta p = \delta p(x, t) \approx \hat{\mathbf{N}}(x) \delta \hat{\mathbf{p}}(t) \quad (2.032)$$

2.3.1. MATRIZ DE MASA

Comenzaremos reemplazando las aproximaciones a la presión y a la variación de la presión, conforme se ha descrito en la sección anterior. En la primera integral de la ecuación (2.026) tenemos:

$$\begin{aligned} & \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{c(x)^2} \delta p(x, t) \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} A(x) dV \approx \\ & \approx \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{c^2(x)} [\hat{\mathbf{N}}(x) \delta \hat{\mathbf{p}}(t)] \left[\hat{\mathbf{N}}(x) \frac{d^2}{dt^2} \hat{\mathbf{p}}(t) \right] A(x) dx \end{aligned} \quad (2.033)$$

Transponemos el uno de los términos de la integral sin modificar el resultado

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{c^2(x)} [\hat{\mathbf{N}}(x) \delta \hat{\mathbf{p}}(t)]^T \left[\hat{\mathbf{N}}(x) \frac{d^2}{dt^2} \hat{\mathbf{p}}(t) \right] A(x) dx \quad (2.034)$$

Reescribimos

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{c^2(x)} \delta \hat{\mathbf{p}}^T(t) \hat{\mathbf{N}}^T(x) \hat{\mathbf{N}}(x) \frac{d^2}{dt^2} \hat{\mathbf{p}}(t) A(x) dx \quad (2.035)$$

Extrayendo los términos que solamente dependen del tiempo fuera de la integral tenemos

$$\delta \hat{\mathbf{p}}^T(t) \int_{-L/2}^{L/2} \left[\frac{1}{c^2(x)} \hat{\mathbf{N}}^T(x) \hat{\mathbf{N}}(x) A(x) \right] dx \frac{d^2}{dt^2} \hat{\mathbf{p}}(t) \quad (2.036)$$

Donde la segunda derivada puede expresarse como

$$\frac{d^2}{dt^2} \hat{\mathbf{p}}(t) = \ddot{\hat{\mathbf{p}}}(t) \quad (2.037)$$

Entonces

$$\delta \hat{\mathbf{p}}^T(t) \left[\int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{c^2(x)} \hat{\mathbf{N}}^T(x) \hat{\mathbf{N}}(x) A(x) dx \right] \ddot{\hat{\mathbf{p}}}(t) \quad (2.038)$$

O bien

$$\delta \hat{\mathbf{p}}^T(t) \mathbf{M} \ddot{\hat{\mathbf{p}}}(t) \quad (2.039)$$

Donde \mathbf{M} es la matriz de masa

$$\mathbf{M} = \int_{-L/2}^{L/2} \left[\frac{1}{c^2(x)} \hat{\mathbf{N}}^T(x) \hat{\mathbf{N}}(x) A(x) \right] dx \quad (2.040)$$

En detalle, cada elemento de dicha matriz es:

$$m_{ij} = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{c^2(x)} \hat{N}_i(x) \hat{N}_j(x) A(x) dx \quad (2.041)$$

Podemos observar se trata de una matriz simétrica

2.3.2. MATRIZ DE RIGIDEZ

Al igual que en la sección anterior, donde se derivó la matriz de masa, empezaremos reemplazando las aproximaciones a la presión y a la variación de la presión. En la tercera integral que forma parte de la ecuación (2.026) tenemos

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} A(x) dx \approx \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial}{\partial x} [\hat{\mathbf{N}}(x) \delta \hat{\mathbf{p}}(t)] \frac{\partial}{\partial x} [\hat{\mathbf{N}}(x) \hat{\mathbf{p}}(t)] A(x) dx \quad (2.042)$$

Transponemos uno de los términos

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial}{\partial x} [\hat{\mathbf{N}}(x) \delta \hat{\mathbf{p}}(t)]^T \frac{\partial}{\partial x} [\hat{\mathbf{N}}(x) \hat{\mathbf{p}}(t)] A(x) dx \quad (2.043)$$

Derivamos

$$\int_{-L/2}^{L/2} \delta \hat{\mathbf{p}}(t)^T \frac{d}{dx} \hat{\mathbf{N}}(x)^T \frac{d}{dx} \hat{\mathbf{N}}(x) \hat{\mathbf{p}}(t) A(x) dx \quad (2.044)$$

Y sacando los términos que dependen del tiempo fuera de la integral

$$\delta \hat{\mathbf{p}}(t)^T \left[\int_{-L/2}^{L/2} \frac{d}{dx} \hat{\mathbf{N}}(x)^T \frac{d}{dx} \hat{\mathbf{N}}(x) A(x) dx \right] \hat{\mathbf{p}}(t) \quad (2.045)$$

Podemos expresar la derivada como:

$$\frac{d}{dx} \hat{\mathbf{N}}(x) = \hat{\mathbf{N}}'(x) \quad (2.046)$$

$$\delta \hat{\mathbf{p}}(t)^T \left[\int_{-L/2}^{L/2} \hat{\mathbf{N}}'(x)^T \hat{\mathbf{N}}'(x) A(x) dx \right] \hat{\mathbf{p}}(t) \quad (2.047)$$

O bien

$$\delta \hat{\mathbf{p}}^T(t) \mathbf{K} \hat{\mathbf{p}}(t) \quad (2.048)$$

Donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez

$$\mathbf{K} = \left[\int_{-L/2}^{L/2} \hat{\mathbf{N}}'(x)^T \hat{\mathbf{N}}'(x) A(x) dx \right] \quad (2.049)$$

En detalle, los elementos de dicha matriz son:

$$k_{ij} = \left[\int_{-L/2}^{L/2} \hat{N}'_i(x)^T \hat{N}'_j(x) A(x) dx \right] \quad (2.050)$$

2.3.3. MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO

Reemplazando la discretización en la segunda integral de la ecuación (2.026) podemos obtener la matriz de amortiguamiento

$$\begin{aligned} & \int_{-L/2}^{L/2} \delta p \rho_0 Y_L \frac{\partial p}{\partial t} A(x) \delta(x - L/2) dx \approx \\ & \approx \int_{-L/2}^{L/2} \rho_0 Y_L [\hat{\mathbf{N}}(x) \delta \hat{\mathbf{p}}(t)] \left[\hat{\mathbf{N}}(x) \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{p}}(t) \right] A(x) \delta(x - L/2) dx \end{aligned} \quad (2.051)$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} \rho_0 Y_L [\hat{\mathbf{N}}(x) \delta \hat{\mathbf{p}}(t)]^T \left[\hat{\mathbf{N}}(x) \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{p}}(t) \right] A(x) \delta(x - L/2) dx \quad (2.052)$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} \rho_0 Y_L \delta \hat{\mathbf{p}}(t)^T \hat{\mathbf{N}}(x)^T \left[\hat{\mathbf{N}}(x) \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{p}}(t) \right] A(x) \delta(x - L/2) dx \quad (2.053)$$

Sacando los términos dependientes del tiempo fuera de la integral

$$\delta \hat{\mathbf{p}}^T(t) \left[\int_{-L/2}^{L/2} \rho_0 Y_L \hat{\mathbf{N}}(x)^T \hat{\mathbf{N}}(x) A(x) \delta(x - L/2) dx \right] \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{p}}(t) \quad (2.054)$$

$$\delta \hat{\mathbf{p}}^T(t) \left[\int_{-L/2}^{L/2} \rho_0 Y_L \hat{\mathbf{N}}(x)^T \hat{\mathbf{N}}(x) A(x) \delta(x - L/2) dx \right] \dot{\hat{\mathbf{p}}}(t) \quad (2.055)$$

Usamos la notación para la derivada de la presión con respecto al tiempo y tenemos

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{p}}(t) = \dot{\hat{\mathbf{p}}}(t) \quad (2.056)$$

e define de manera compacta la matriz de amortiguamiento \mathbf{C} como

$$\delta \hat{\mathbf{p}}^T(t) \mathbf{C} \dot{\hat{\mathbf{p}}}(t) \quad (2.057)$$

$$\mathbf{C} = \left[\int_{-L/2}^{L/2} \rho_0 Y_L \hat{\mathbf{N}}(x)^T \hat{\mathbf{N}}(x) A(x) \delta(x - L/2) dx \right] \quad (2.058)$$

Específicamente los elementos que forman esta matriz son

$$c_{ij} = \int_{-L/2}^{L/2} \rho_0 Y_L \hat{N}_i(x)^T \hat{N}_j(x) A(x) \delta(x - L/2) dx \quad (2.059)$$

2.3.4. VECTOR DE FUERZA

Reemplazando en la integral que corresponde a las fuerzas corporales en el fluido tenemos

$$\int_{-L/2}^{L/2} \delta p q(x, t) A(x) dx \approx \int_{-L/2}^{L/2} [\delta \hat{\mathbf{p}}(t) \hat{\mathbf{N}}(x)] q(x, t) A(x) dx \quad (2.060)$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} [\delta \hat{\mathbf{p}}(t) \hat{\mathbf{N}}(x)]^T q(x, t) A(x) dx \quad (2.061)$$

Podemos sacar términos fuera de la integral

$$\delta \hat{\mathbf{p}}^T(t) \int_{-L/2}^{L/2} \hat{\mathbf{N}}(x)^T q(x, t) A(x) dx \quad (2.062)$$

$$\delta \hat{\mathbf{p}}(t)^T \mathbf{f} \quad (2.063)$$

$$\mathbf{f}(t) = \int_{-L/2}^{L/2} \hat{\mathbf{N}}(x)^T q(x, t) A(x) dx \quad (2.064)$$

Cada elemento del vector de fuerza es de la forma

$$f_i(t) = \int_{-L/2}^{L/2} \hat{N}_i(x)^T q(x, t) A(x) dx \quad (2.065)$$

Es importante preguntarse qué sucede con el término

$$-\delta p(-L/2) \frac{\partial p}{\partial x}(-L/2) A(-L/2) \quad (2.066)$$

Si es que el extremo en $x = -L/2$ está cerrado esa expresión es nula. En el caso de que el tubo esté abierto o posea una fuente de presión prescrita (condiciones de Dirichlet) se utilizarán técnicas adecuadas para incorporar esos datos en el proceso de construcción de los vectores y matrices. Esto se verá con detalle en las próximas secciones de este capítulo.

2.4. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

A partir de la formulación débil de la ecuación de onda y del proceso de discretización llegamos a

$$\delta \hat{\mathbf{p}}^T(t) [\mathbf{M} \ddot{\hat{\mathbf{p}}}(t) + \mathbf{C} \dot{\hat{\mathbf{p}}}(t) + \mathbf{K} \hat{\mathbf{p}}(t) - \mathbf{f}(t)] = \mathbf{0} \quad (2.067)$$

Entonces para que la igualdad producto del proceso de discretización se cumpla lo interior al paréntesis debe ser nulo. Finalmente, la ecuación de movimiento y las condiciones iniciales son entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\hat{\mathbf{p}}}(t) + \mathbf{C}\dot{\hat{\mathbf{p}}}(t) + \mathbf{K}\hat{\mathbf{p}}(t) &= \mathbf{f}(t) \\ \hat{\mathbf{p}}(0) &= \hat{\mathbf{p}}_0 \\ \dot{\hat{\mathbf{p}}}(0) &= \dot{\hat{\mathbf{p}}}_0 \end{aligned} \quad (2.068)$$

2.5. UNA INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS: MÉTODO DE COLOCACIÓN

El objetivo de esta sección es concretizar los conceptos anteriormente vertidos estableciendo de manera mucho más clara los procesos de construcción de las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento y como las ecuaciones pueden resolverse de manera simple en el caso de que la excitación es de carácter armónico. En *Advanced Applications in Acoustics, Noise and Vibration* (Fahy, Walker eds., 2004) Petyt ha escrito un capítulo tratando este tema, además se puede recomendar su libro (Petyt 2010), si bien su principal objetivo es modelar la vibración en sólidos, existen elementos comunes que pueden ser incorporados.

Las funciones de interpolación $\hat{N}_i(x)$ deben ser construidas bajo el siguiente procedimiento recomendado

- Selecciones puntos nodales en la estructura
- A cada nodo asociarle grados de libertad, en nuestro caso presión sonora.
- Por cada grado de libertad en cada nodo, construir una función que tenga un valor unitario en dicho grado de libertad y cero para el resto

A fin de que la solución al problema sea convergente las funciones $\hat{N}_n(x)$ (en nuestro caso unidimensional corresponden a $\hat{N}_n(x)$) deben cumplir con un conjunto de condiciones

- Ser linealmente independientes
- Ser continuas y poseer derivadas continuas de orden $(p - 1)$. Específicamente en este caso se considerará $p = 1$ y 2
- Satisfacer las condiciones de contorno, estas incluyen derivadas de orden $(p-1)$
- Formar una serie completa

Una serie de funciones se dice completa si cumple el error cuadrático promedio es cero en el límite conforme la lo expresado en la ecuación (2.069)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{L/2} \left[p(x, t) - \left(\sum_{n=1}^N \hat{N}_n(x) \hat{p}_n(t) \right) \right]^2 dx = 0 \quad (2.069)$$

Para las funciones $\hat{N}_i(x)$ se pueden usar polinomios simples, funciones trigonométricas, polinomios de Legendre, Tchebycheff, entre otros. Una solución que satisface la ecuación (2.069) se dice que converge en la media.

La convergencia de este método esta basada en la demostración de que cualquier función puede ser expandida por una serie infinita de funciones linealmente independientes. Si se usan polinomios, podemos echar mano al teorema de aproximación de el cual establece que cualquier función continua en un intervalo $[a, b]$ puede ser aproximada de manera uniforme por polinomios en dicho intervalo. Este teorema asegura no solamente una convergencia uniforme de la función, si no que también sus derivadas de orden $(p-1)$ convergerán uniformemente.

A fin de comenzar por un caso simple consideraremos un tubo de longitud L , cerrado en ambos extremos, esto quiere decir que:

$$\delta p(-L/2) \frac{\partial p}{\partial x}(-L/2) A(-L/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x}(-L/2) = 0 \quad (2.070)$$

$$\delta p(L/2) \frac{\partial p}{\partial x}(L/2) A(L/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x}(L/2) = 0 \quad (2.071)$$

De igual forma asumiremos que la velocidad del sonido y que el área de la sección transversal del tubo permanece constante. Así mismo no se incorporarán fuerzas corporales en el problema. Entonces la ecuación de movimiento es:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{K}\hat{\mathbf{p}}(t) = 0 \quad (2.072)$$

Considerando la solución es armónica y estacionaria(2.073), tenemos el problema de valores propios asociado (2.074).

$$\hat{\mathbf{p}}(t) = \phi \exp(j\omega t) \quad (2.073)$$

$$[-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}]\phi = 0 \quad (2.074)$$

Además, podemos suponer que el tubo está dividido en cuatro partes y con 5 funciones de interpolación asociadas. Estas se pueden expresar de forma matemática

$$\hat{N}_1(x) = \begin{cases} -\frac{4}{L}x - 1 & -\frac{L}{2} \leq x < -\frac{L}{4} \\ 0 & \text{lo demás} \end{cases} \quad (2.075)$$

$$\hat{N}_2(x) = \begin{cases} \frac{4}{L}x + 2 & -\frac{L}{2} \leq x < -\frac{L}{4} \\ -\frac{4}{L}x & -\frac{L}{4} \leq x < 0 \\ 0 & \text{lo demás} \end{cases} \quad (2.076)$$

$$\hat{N}_3(x) = \begin{cases} \frac{4}{L}x + 1 & -\frac{L}{4} \leq x < 0 \\ -\frac{4}{L}x + 1 & 0 \leq x < \frac{L}{4} \\ 0 & \text{lo demás} \end{cases} \quad (2.077)$$

$$\hat{N}_4(x) = \begin{cases} \frac{4}{L}x & 0 \leq x < \frac{L}{4} \\ -\frac{4}{L}x + 2 & \frac{L}{4} \leq x < \frac{L}{2} \\ 0 & \text{lo demás} \end{cases} \quad (2.078)$$

$$\hat{N}_5(x) = \begin{cases} \frac{4}{L}x - 1 & \frac{L}{4} \leq x < -\frac{L}{2} \\ 0 & \text{lo demás} \end{cases} \quad (2.079)$$

Matriz de Masa

Podemos calcular cada miembro de la matriz de masa, recordando que esta es simétrica

$$m_{11} = \frac{A}{c^2} \int_{-L/2}^{-L/4} \left(-\frac{4}{L}x - 1\right)^2 dx = \frac{A}{c^2} \cdot \frac{L}{12} = \frac{A}{3c^2} \cdot \frac{L}{4} \quad (2.080)$$

$$m_{12} = \frac{A}{c^2} \int_{-L/2}^{-L/4} \left(-\frac{4}{L}x - 1\right)\left(\frac{4}{L}x + 2\right) dx = \frac{A}{c^2} \cdot \frac{L}{24} = \frac{A}{3c^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{4} \quad (2.081)$$

$$m_{13} = 0 \quad (2.082)$$

$$m_{14} = 0 \quad (2.083)$$

$$m_{15} = 0 \quad (2.084)$$

$$m_{21} = m_{12} \quad (2.085)$$

$$m_{22} = \frac{A}{c^2} \int_{-L/2}^{-L/4} \left(\frac{4}{L}x + 2\right)^2 dx + \frac{A}{c^2} \int_{-L/4}^0 \left(-\frac{4}{L}x\right)^2 dx = \frac{A}{c^2} \cdot \frac{L}{6} = \frac{A}{3c^2} \cdot 2 \cdot \frac{L}{4} \quad (2.086)$$

$$m_{23} = \frac{A}{c^2} \int_{-L/4}^0 \left(-\frac{4}{L}x\right)\left(\frac{4}{L}x + 1\right) dx = \frac{A}{c^2} \cdot \frac{L}{24} = \frac{A}{3c^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{4} \quad (2.087)$$

$$m_{24} = 0 \quad (2.088)$$

$$m_{25} = 0 \quad (2.089)$$

$$m_{31} = 0 \quad (2.090)$$

$$m_{32} = m_{23} \quad (2.091)$$

$$m_{33} = \frac{A}{c^2} \int_{-L/4}^0 \left(\frac{4}{L}x + 1\right)^2 dx + \frac{A}{c^2} \int_0^{L/4} \left(-\frac{4}{L}x + 1\right)^2 dx = \frac{A}{c^2} \cdot \frac{L}{6} = \frac{A}{3c^2} \cdot 2 \cdot \frac{L}{4} \quad (2.092)$$

$$m_{34} = \frac{A}{c^2} \int_0^{L/4} \left(-\frac{4}{L}x + 1\right)\left(\frac{4}{L}x\right) dx = \frac{A}{c^2} \cdot \frac{L}{24} = \frac{A}{3c^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{4} \quad (2.093)$$

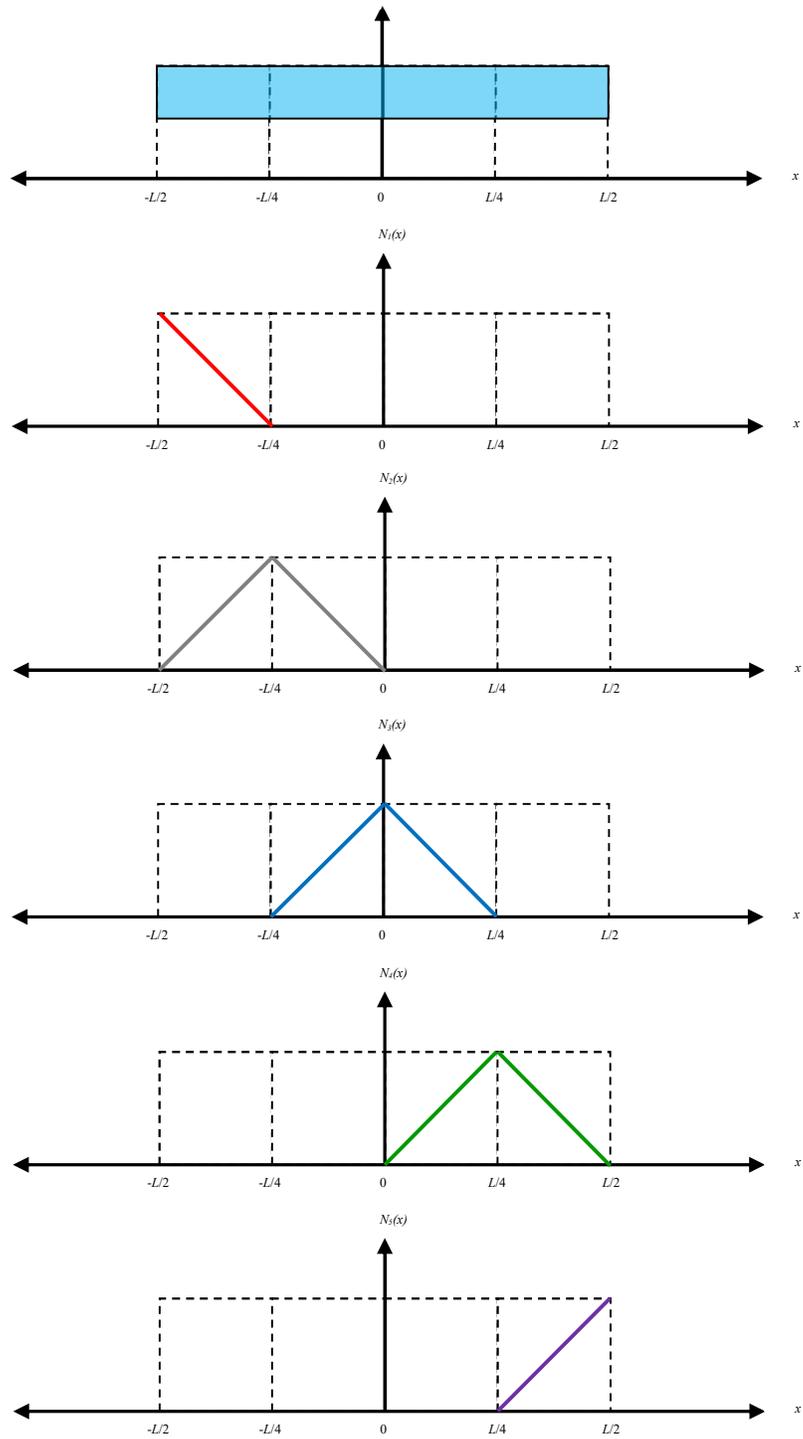


Figura 2.2. Elementos y funciones de interpolación

$$m_{35} = 0 \quad (2.094)$$

$$m_{41} = 0 \quad (2.095)$$

$$m_{42} = 0 \quad (2.096)$$

$$m_{43} = m_{34} \quad (2.097)$$

$$m_{44} = \frac{A}{c^2} \int_0^{-L/4} \left(\frac{4}{L}x\right)^2 dx + \frac{A}{c^2} \int_{L/4}^{L/2} \left(-\frac{4}{L}x + 2\right)^2 dx = \frac{A}{c^2} \cdot \frac{L}{6} = \frac{A}{3c^2} \cdot 2 \cdot \frac{L}{4} \quad (2.098)$$

$$m_{45} = \frac{A}{c^2} \int_{L/4}^{L/2} \left(-\frac{4}{L}x + 2\right) \left(\frac{4}{L}x - 1\right) dx = \frac{A}{c^2} \cdot \frac{L}{24} = \frac{A}{3c^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{4} \quad (2.099)$$

$$m_{51} = 0 \quad (2.100)$$

$$m_{52} = 0 \quad (2.101)$$

$$m_{53} = 0 \quad (2.102)$$

$$m_{54} = m_{45} \quad (2.103)$$

$$m_{55} = \frac{A}{c^2} \int_{L/4}^{L/2} \left(\frac{4}{L}x - 1\right)^2 dx = \frac{A}{c^2} \cdot \frac{L}{12} = \frac{A}{3c^2} \cdot \frac{L}{4} \quad (2.104)$$

Resumiendo

$$\mathbf{M} = \frac{A}{3c^2} \cdot \frac{L}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

$$\mathbf{M} = \frac{A}{3c^2} \cdot \frac{L/4}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

$$\mathbf{M} = \frac{A}{3c^2} \cdot \frac{L}{8} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

$$\mathbf{M} = \frac{A}{3c^2} \cdot a_x \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

Donde

$$a_x = \frac{L}{8} = \frac{L/4}{2} \quad (2.109)$$

Matriz de Rigidez

Podemos calcular cada miembro de la matriz de rigidez, recordando que esta es simétrica

$$k_{11} = A \int_{-L/2}^{-L/4} \left(-\frac{4}{L}\right)^2 dx = A \frac{4}{L} \quad (2.110)$$

$$k_{12} = A \int_{-L/2}^{-L/4} \left(-\frac{4}{L}\right)\left(\frac{4}{L}\right) dx = -A \frac{4}{L} \quad (2.111)$$

$$k_{13} = 0 \quad (2.112)$$

$$k_{14} = 0 \quad (2.113)$$

$$k_{15} = 0 \quad (2.114)$$

$$k_{21} = k_{12} \quad (2.115)$$

$$k_{22} = A \int_{-L/2}^{-L/4} \left(\frac{4}{L}\right)^2 dx + \frac{A}{c^2} \int_{-L/4}^0 \left(-\frac{4}{L}\right)^2 dx = A \frac{8}{L} \quad (2.116)$$

$$k_{23} = A \int_{-L/4}^0 \left(-\frac{4}{L}\right)\left(\frac{4}{L}\right) dx = -A \frac{4}{L} \quad (2.117)$$

$$k_{24} = 0 \quad (2.118)$$

$$k_{25} = 0 \quad (2.119)$$

$$k_{31} = 0 \quad (2.120)$$

$$k_{32} = k_{23} \quad (2.121)$$

$$k_{33} = A \int_{-L/4}^0 \left(\frac{4}{L}\right)^2 dx + \frac{A}{c^2} \int_0^{L/4} \left(-\frac{4}{L}\right)^2 dx = A \frac{8}{L} \quad (2.122)$$

$$k_{34} = A \int_0^{L/4} \left(-\frac{4}{L}\right)\left(\frac{4}{L}\right) dx = -A \frac{4}{L} \quad (2.123)$$

$$k_{35} = 0 \quad (2.124)$$

$$k_{41} = 0 \quad (2.125)$$

$$k_{42} = 0 \quad (2.126)$$

$$k_{43} = k_{34} \quad (2.127)$$

$$k_{44} = A \int_0^{-L/4} \left(\frac{4}{L}\right)^2 dx + \frac{A}{c^2} \int_{L/4}^{L/2} \left(-\frac{4}{L}\right)^2 dx = A \frac{8}{L} \quad (2.128)$$

$$k_{45} = A \int_{L/4}^{L/2} \left(-\frac{4}{L}\right)\left(\frac{4}{L}\right) dx = -A \cdot \frac{4}{L} \quad (2.129)$$

$$k_{51} = 0 \quad (2.130)$$

$$k_{52} = 0 \quad (2.131)$$

$$k_{53} = 0 \quad (2.132)$$

$$k_{54} = k_{45} \quad (2.133)$$

$$k_{55} = A \int_{L/4}^{L/2} \left(\frac{4}{L}\right)^2 dx = A \cdot \frac{4}{L} \quad (2.134)$$

Resumiendo

$$K = A \frac{4}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.135)$$

$$K = \frac{A 8}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.136)$$

$$K = \frac{A}{2a_x} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.137)$$

Donde

$$a_x = \frac{L}{8} = \frac{L/4}{2} \quad (2.138)$$

Obviamente uno puede extender este método en la obtención de las matrices de masa, rigidez y otros componentes del sistema de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, la construcción de las funciones, para cada segmento, la variabilidad de la sección transversal y/o la velocidad del sonido se hacen demasiado complejas para ser realizado de manera práctica. Una posible solución será presentada en el siguiente punto.

2.6. MATRICES ELEMENTALES

Es difícil construir las matrices de masa y rigidez usando el método anteriormente descrito, sin embargo, tomemos algunos aspectos que pueden ser importantes. Dicho de otra forma, podemos generar un sistema mucho más genérico y flexible a partir de la formulación anterior

Mapearemos cualquiera de los elementos que definen el comportamiento del tubo a un espacio cuyos resultados nos dará un método común y flexible. A modo de simplificación los efectos de translación no serán incluidos en el mapeo.

Podemos observar que el cambio de variable necesario es:

$$\xi = \frac{x}{a_x} \quad (2.139)$$

Entonces

$$\begin{aligned} d\xi &= \frac{dx}{a_x} \\ a_x d\xi &= dx \end{aligned} \quad (2.140)$$

Las funciones para utilizar son:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ N_2(\xi) &= \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{aligned} \quad (2.141)$$

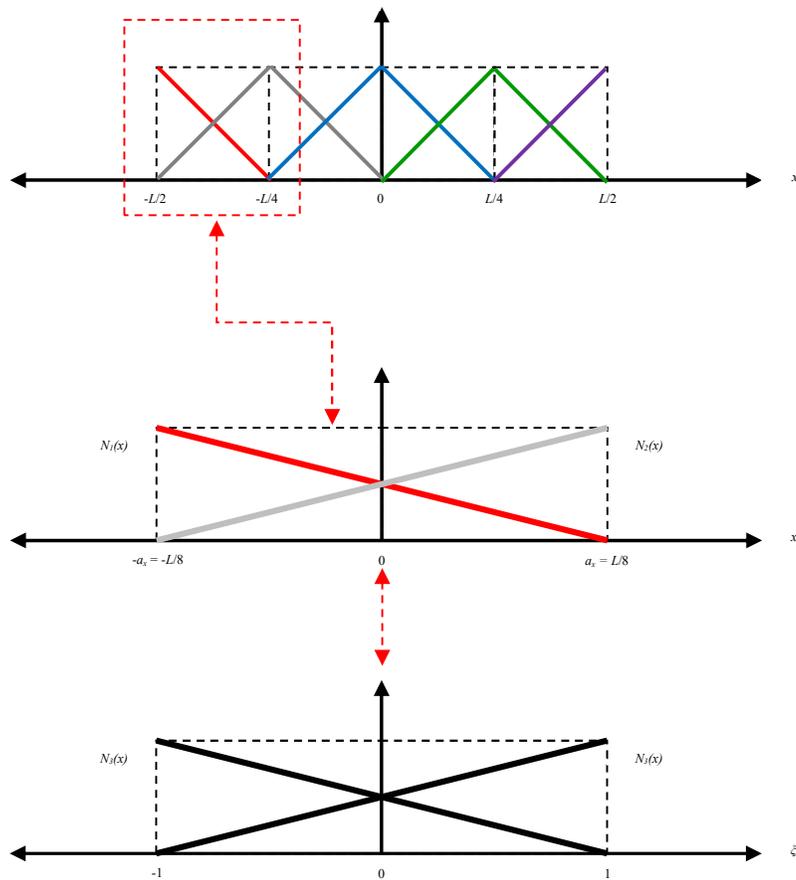


Figura 2.3. Mapeamiento

Esto nos lleva a definir las matrices elementales de masa y rigidez. Genéricamente la **Matriz de Masa Elemental** para el caso que hemos descrito es dada por

$$m_{ij}^e = \int_{-a_x}^{a_x} \frac{1}{c^2} \hat{N}_i(x) \hat{N}_j(x) A \, dx \quad (2.142)$$

$$m_{ij}^e = \int_{-1}^1 \frac{1}{c^2} \hat{N}_i(\xi) \hat{N}_j(\xi) A a_x d\xi \quad (2.143)$$

Entonces

$$m_{11}^e = \int_{-1}^1 \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{2} (1 - \xi) \right]^2 A a_x d\xi = 2 \frac{A a_x}{3c^2} \quad (2.144)$$

$$m_{12}^e = \int_{-1}^1 \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{2} (1 - \xi) \right] \left[\frac{1}{2} (1 + \xi) \right] A a_x d\xi = \frac{A a_x}{3c^2} \quad (2.145)$$

$$m_{12}^e = m_{21}^e \quad (2.146)$$

$$m_{22}^e = \int_{-1}^1 \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{2} (1 + \xi) \right]^2 A a_x d\xi = 2 \frac{A a_x}{3c^2} \quad (2.147)$$

En forma resumida la matriz de masa elemental es

$$\mathbf{M}^e = \frac{A a_x}{3c^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.148)$$

De igual forma construimos la **Matriz de Rigidez Elemental**

$$k_{ij}^e = \int_{-a_x}^{a_x} \hat{N}_i'(x) \hat{N}_j'(x) A dx = \int_{-a_x}^{a_x} \frac{\hat{N}_i'(x)}{dx} \frac{\hat{N}_j'(x)}{dx} A dx \quad (2.149)$$

Pero al usar la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\hat{N}_i'(x)}{dx} = \frac{\hat{N}_i'(x) d\xi}{d\xi dx} = \frac{\hat{N}_i'(x)}{d\xi} \frac{1}{a_x} \quad (2.150)$$

$$k_{ij}^e = \int_{-1}^1 \frac{1}{a_x} \frac{\hat{N}_i'(\xi)}{d\xi} \frac{1}{a_x} \frac{\hat{N}_j'(\xi)}{d\xi} A a_x d\xi \quad (2.151)$$

Entonces

$$k_{11}^e = \int_{-1}^1 \frac{1}{a_x^2} \left[-\frac{1}{2} \right]^2 A a_x d\xi = \frac{A}{2a_x} \quad (2.152)$$

$$k_{12}^e = \int_{-1}^1 \frac{1}{a_x^2} \left[-\frac{1}{2} \right] \left[\frac{1}{2} \right] A a_x d\xi = -\frac{A}{2a_x} \quad (2.153)$$

$$k_{12}^e = k_{21}^e \quad (2.154)$$

$$k_{22}^e = \int_{-1}^1 \frac{1}{a_x^2} \left[\frac{1}{2} \right]^2 A a_x d\xi = \frac{A}{2a_x} \quad (2.155)$$

En forma resumida la matriz de masa elemental es

$$\mathbf{K}^e = \frac{A}{2a_x} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.156)$$

La gran ventaja de trabajar esto es que se puede considerar para cualquier longitud de elemento/segmento de tubo. Si volvemos al punto anteriormente descrito, un tubo de longitud L dividido en 4 elementos de longitud $L/4$ ($a_x = L/8$) y 5 nodos y reconsideramos nuestras matrices elementales de la forma

$$\mathbf{M}^e = \frac{Aa_x}{3c^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.157)$$

$$\mathbf{M}^e = \begin{bmatrix} m_{11}^e & m_{12}^e \\ m_{21}^e & m_{22}^e \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^e = \frac{A}{2a_x} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.158)$$

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e \end{bmatrix}$$

Donde $e = 1, 2, 3, 4$. Entonces al ensamblar las matrices elementales tenemos la matriz global

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11}^1 & m_{12}^1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21}^1 & m_{22}^1 + m_{11}^2 & m_{12}^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_{21}^2 & m_{22}^2 + m_{11}^3 & m_{12}^3 & 0 \\ 0 & 0 & m_{21}^3 & m_{22}^3 + m_{11}^4 & m_{12}^4 \\ 0 & 0 & 0 & m_{21}^4 & m_{22}^4 \end{bmatrix} \quad (2.159)$$

Entonces tenemos nuevamente las matrices globales de masa y rigidez que fueron determinadas en la sección anterior

$$\mathbf{M} = \frac{Aa_x}{3c^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.160)$$

$$\mathbf{K} = \frac{A}{2a_x} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.161)$$

Donde

$$a_x = \frac{L}{8} = \frac{L/4}{2} \quad (2.162)$$

Luego podríamos considerar un tubo de longitud L , de sección transversal A constante dividido en N elementos de igual tamaño. Las matrices globales sean el resultado del ensamble de las matrices elementales. Es por supuesto esperable que si N es grande el proceso de discretización sea más exitoso y la exactitud de los resultados sea mayor. En términos esquemáticos generales la matriz de masa y la matriz de rigidez para un tubo cuyas propiedades permanecen constantes serían:

$$\mathbf{M} = \frac{Aa_x}{3c^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 4 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 4 & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ & & & & & 4 & 1 & 0 \\ & & & & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & & & & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.163)$$

$$\mathbf{K} = \frac{A}{2a_x} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & & \\ 0 & 0 & -1 & 2 & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ & & & & & 2 & -1 & 0 \\ & & & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & & & & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.164)$$

Lo interesante de este método es que puede ser extendido a situaciones donde la sección transversal y las propiedades del fluido no sean constantes, en este caso las matrices globales son:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11}^1 & m_{12}^1 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ m_{21}^1 & m_{22}^1 + m_{11}^2 & m_{12}^2 & 0 & & & \vdots \\ 0 & m_{21}^2 & m_{22}^2 + m_{11}^3 & m_{12}^3 & & & \\ 0 & 0 & m_{21}^3 & m_{22}^3 + m_{11}^4 & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ & & & & & m_{22}^{N-2} + m_{11}^{N-1} & m_{12}^{N-1} & 0 \\ & & & & & m_{21}^{N-1} & m_{22}^{N-1} + m_{11}^N & m_{12}^N \\ 0 & \dots & & & & 0 & m_{21}^N & m_{22}^N \end{bmatrix} \quad (2.165)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & 0 & & & \vdots \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 + k_{11}^3 & k_{12}^3 & & & \\ 0 & 0 & k_{21}^3 & k_{22}^3 + k_{11}^4 & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ & & & & & k_{22}^{N-2} + k_{11}^{N-1} & k_{12}^{N-1} & 0 \\ & & & & & k_{21}^{N-1} & k_{22}^{N-1} + k_{11}^N & k_{12}^N \\ 0 & \dots & & & & 0 & k_{21}^N & k_{22}^N \end{bmatrix} \quad (2.166)$$

Donde las matrices de masa y de rigidez elemental son en su forma más generalizada:

$$m_{ij}^e = \int_{-1}^1 \frac{1}{c_e^2(x(\xi))} \hat{N}_i(\xi) \hat{N}_j(\xi) A^e(x(\xi)) a_x^e(x(\xi)) d\xi \quad (2.167)$$

$$k_{ij}^e = \int_{-1}^1 \frac{1}{a_x^e(x(\xi))} \frac{\hat{N}_i(\xi)}{d\xi} \frac{1}{a_x^e(x(\xi))} \frac{\hat{N}_j(\xi)}{d\xi} A^e(x(\xi)) a_x^e(x(\xi)) d\xi \quad (2.168)$$

Con los subíndices $i, j = 1, 2$ para cada elemento de las matrices elementales y el superíndice $e = 1, 2, 3, \dots, N-1, N$, para los elementos que conforman el modelo.

$a_x^e(x(\xi))$: Es la longitud variable de cada elemento

$c_e(x(\xi))$: Es la velocidad del sonido variable en cada elemento

$A^e(x(\xi))$: Es el área de la sección transversal de cada elemento

Y el vector de fuerza

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ \vdots \\ f_2^{N-1} + f_1^N \\ f_2^N \end{bmatrix} \quad (2.169)$$

$$f_i^e = \int_{-1}^1 q(x(\xi)) \hat{N}_i(\xi) A^e(x(\xi)) a_x^e(x(\xi)) d\xi \quad (2.170)$$

Inclusive si la longitud de los elementos es lo suficientemente pequeña, podemos suponer que las propiedades como la velocidad del sonido y la sección transversal son constantes en el elemento.

$a_x^e(x(\xi)) \approx a_x^e$: Es la longitud variable de cada elemento

$c_e(x(\xi)) \approx c_e$: Es la velocidad del sonido variable en cada elemento

$A^e(x(\xi)) \approx A^e$: Es el área de la sección transversal de cada elemento

Como en el ejemplo que se muestra la figura

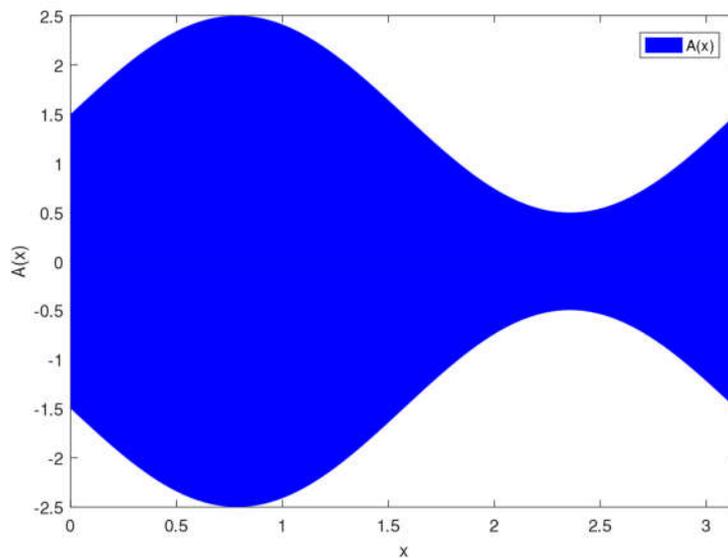


Figura 2.4. Tubo de sección y propiedades variables

Luego

$$m_{ij}^e = \int_{-1}^1 \frac{1}{c^2} \hat{N}_i(\xi) \hat{N}_j(\xi) A^e a_x^e d\xi \quad (2.171)$$

$$k_{ij}^e = \int_{-1}^1 \frac{1}{a_x^e} \frac{\widehat{N}_i(\xi)}{d\xi} \frac{1}{a_x^e} \frac{\widehat{N}_j(\xi)}{d\xi} A^e a_x^e d\xi \quad (2.172)$$

$$f_i^e = \int_{-1}^1 q(x(\xi)) \widehat{N}_i(\xi) A^e a_x^e d\xi \quad (2.173)$$

Gráficamente podemos representar esto como

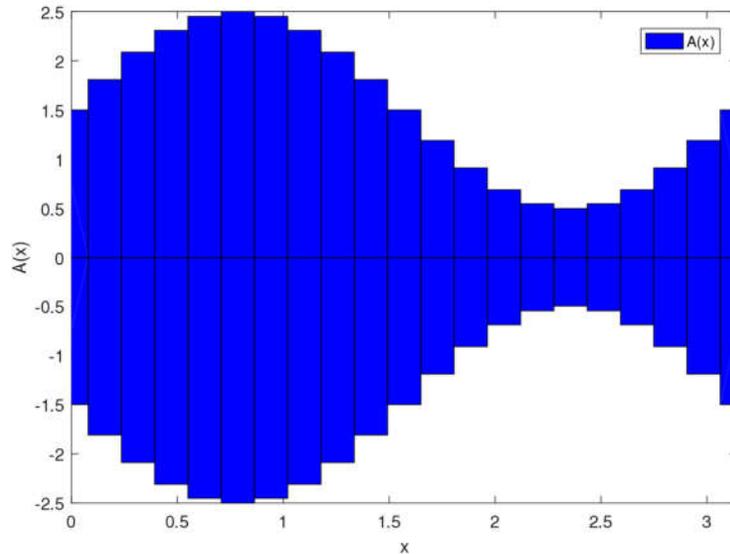


Figura 2.5. Tubo de sección y propiedades variables discretizado

2.7. MONTAJE

No siempre existen situaciones donde la geometría permite un montaje tan intuitivo del problema. Si consideramos situaciones en 2D o 3D, donde las mallas y el proceso de discretización y las restricciones hacen el problema mucho más complejo. Por esta razón tenemos que generar algoritmos de montaje que sean capaces de organizar la información.

Volvamos a nuestro ejemplo, donde la longitud $L = 1\text{m}$. Desde este punto materializaremos los procedimientos

En primer lugar, se debe generar una **Matriz de Coordenadas**

Nodo	Cx (m)	Cy (m)	Cz (m)
1			
2			
...			
NTotNodos -1			

NTotNodos

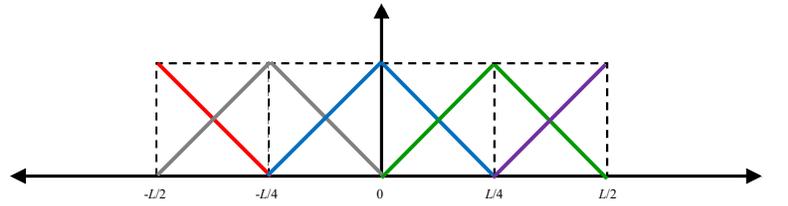


Figura 2.5. Nodos, elementos, funciones y coordenadas

En nuestro caso $NTotNodos = 4$, que corresponde al número total de nodos

Nodo	Cx (m)	Cy (m)	Cz (m)
1	-0.5	0	0
2	-0.25	0	0
3	0	0	0
4	0.25	0	0
5	0.5	0	0

Luego es necesario generar una **Matriz de Conectividad** la cual explicita la información entre los nodos observados a nivel global, es decir, toda la estructura y los nodos observados a nivel local, es decir desde el elemento

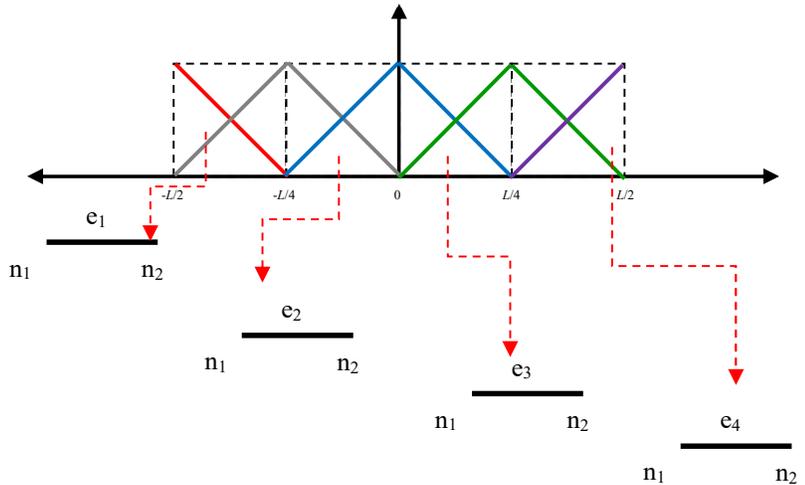


Figura 2.6. Coordenadas locales y globales

Elemento	Nodo Local 1	Nodo Local N
1			
2			
...			
NTotEI			

En nuestro caso

Elemento	Nodo Local 1	Nodo Local 2
1	1	2
2	2	3

3	3	4
4	4	5

En cuanto a la incorporación de condiciones de contorno del tipo Dirichlet podemos usar el siguiente algoritmo

```

cont = 1
for n1 = 1:NTotNodos
    for n2 = 1:NDOFNodo
        if (nodo(n1) & DOF(n2) tienen condición Dirichlet
            ID(n1,n2) = 0;
        else
            ID(n1,n2) = cont;
            Cont = cont + 1;
        end;
    end;
end;
end;

```

Se genera una matriz como se muestra a continuación

Nodo	DOF1	...	DOFM
1			
2			
...			
NTotNodos -1			
NTotNodos			

Si el extreme en $x = L/2$ el tubo estuviera abierto, entonces $p(L/2) = 0$, entonces

Nodo	DOF1
1	1
2	2
3	3
4	4
5	0

Específicamente el proceso de **Montaje** es expresado en pseudo código

```

for nel = 1:NTotalElementos
    for noi = 1:NNodosCadaElemento
        for ngi = 1:NDOFPorCadaElemento
            for noj = 1:NNodosCadaElemento
                for ngj = 1:NDOFPorCadaElemento

                    NN = ID(IEN(nel,noi),ngj)
                    MM = ID(IEN(nel,noi),ngj)

                    CALL ELM(nel,coord.,N() )    (matriz masa elemental)
                    CALL ELK(nel,coord.,N() )    (matriz rigidez elemental)

                    If( NN no= 0) && (MM no= 0)

                        K(NN,MM) = K(NN,MM) +
                            ELK( NDOFPorCadaElemento* (NNodosEl-1) *(noi-1) + ngi,
                                NDOFPorCadaElemento*(NNodosEL-1)*(noj-1) + ngj )

                        M(NN,MM) = M(NN,MM) +
                            ELM( NDOFPorCadaElemento* (NNodosEl-1) *(noi-1) + ngi,

```

```

                                NDOFPorCadaElemento*(NNodosEL-1)*(noj-1) + ngj )
                                end;
                                end;
                                end;
                                end;
                                end;

```

2.8. APLICACIÓN AL PROBLEMA DE VALORES PROPIOS: INTRODUCCIÓN AL REFINAMIENTO h (FEM- h)

Al modelar un problema utilizando un programa de elementos finitos, es muy importante verificar si la solución ha convergido. La palabra convergencia se usa porque el resultado de un programa de elementos finitos está convergiendo en una única solución correcta. Para verificar la convergencia, se requiere más de una solución para el mismo problema. Si la solución es dramáticamente diferente de la solución original, entonces la solución del problema no es convergente. Sin embargo, si la solución no cambia mucho (menos de una pequeña diferencia porcentual), entonces la solución del problema se considera convergente.

El refinamiento h (FEM_ h) mejora los resultados al aumentar el número de elementos mediante la disminución de la longitud característica de estos (h) y sin cambiar las características de las funciones de interpolación usadas

A fin de ilustrar este método, se considerará una situación unidimensional simple al igual que en la sección 2.5. , es decir un tubo de longitud de longitud L de 1m, cerrado en ambos extremos, esto quiere decir que las condiciones de contorno descritas en las ecuaciones (2.174) y (2.175). Comenzaremos con cuatro elementos, luego subiremos a diez y finalmente a cien, compararemos resultados de frecuencias naturales y formas modales mediante tablas y gráficos.

$$\delta p(-L/2) \frac{\partial p}{\partial x}(-L/2) A(-L/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x}(-L/2) = 0 \quad (2.174)$$

$$\delta p(L/2) \frac{\partial p}{\partial x}(L/2) A(L/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x}(L/2) = 0 \quad (2.175)$$

Supondremos que la velocidad del sonido y que el área de la sección transversal del tubo permanece constante. Así mismo no se incorporarán fuerzas corporales en el problema. Entonces:

$$\begin{aligned} A(x) &= A = 1 \text{ cm}^2 \\ c(x) &= c = 340 \text{ m/s} \\ q(x, t) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces la ecuación de movimiento es

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{K}\hat{\mathbf{p}}(t) = 0 \quad (2.176)$$

Si la solución es armónica y estacionaria de la forma $\hat{\mathbf{p}}(t) = \varphi \exp(j\omega t)$. El problema de valores propios asociado es

$$[-\omega\mathbf{M} + \mathbf{K}]\varphi = 0 \quad (2.177)$$

Donde las matrices de masa y rigidez son de manera genérica

$$\mathbf{M} = \frac{Aa_x}{3c^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & & & & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & 1 & 4 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 4 & & & & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 4 & 1 & 0 & \\ & & & & & & 1 & 4 & 1 & \\ 0 & \dots & & & & & 0 & 1 & 2 & \end{bmatrix} \quad (2.178)$$

$$\mathbf{K} = \frac{A}{2a_x} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & & & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & & & & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & & & & & \\ 0 & 0 & -1 & 2 & & & & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 2 & -1 & 0 & \\ & & & & & & -1 & 2 & -1 & \\ 0 & \dots & & & & & 0 & -1 & 1 & \end{bmatrix} \quad (2.179)$$

Podemos cuantificar, para 4, 10 y 100 elementos, los errores en las frecuencias calculadas mediante FEM versus las frecuencias teóricas dadas por.

$$f_n = \frac{nc}{2L} \quad n = 0,1,2,3, \dots \quad (2.180)$$

Estos resultados se presentan a partir de las siguientes figuras y tablas

Tabla 2.1 Frecuencias Teóricas y FEM – 4 Elementos

Frec Teórica [Hz]	Frec FEM [Hz]	Error [%]
0	0	0
170	174,3960444	2,585908488
340	374,9036489	10,26577908
510	609,2333657	19,45752268
680	749,8072978	10,26577908

Tabla 2.2. Frecuencias Teóricas y FEM – 10 Elementos

Frec Teórica [Hz]	Frec FEM [Hz]	Error [%]
0	2,23E-05	0
170	170,6999326	0,411725061
340	345,6168061	1,652001786
510	529,0202785	3,729466373
680	725,0948029	6,63158866

Tabla 2.3. Frecuencias Teóricas y FEM – 100 Elementos

Frec Teórica [Hz]	Frec FEM [Hz]	Error [%]
0	0,00E+00	0
170	170,0069911	0,004112386

340	340,0559305	0,016450151
510	510,1887771	0,037015115
680	680,4475099	0,065810287

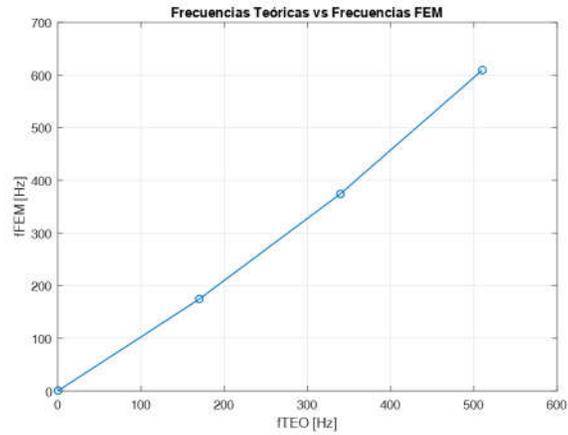


Figura 2.7. Frecuencias Teóricas vs. Frecuencias FEM – 4 Elementos

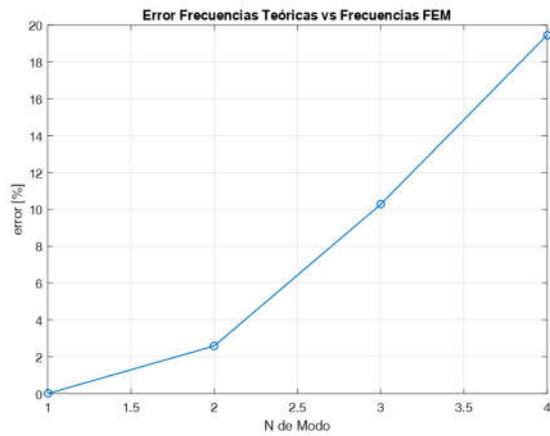


Figura 2.8. Error Frecuencias Teóricas vs. Frecuencias FEM – 4 Elementos

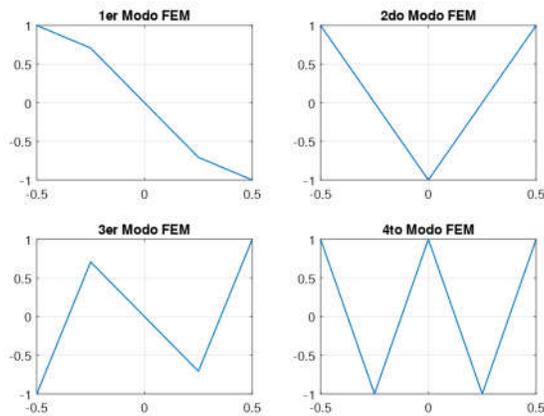


Figura 2.9. Modos FEM – 4 Elementos

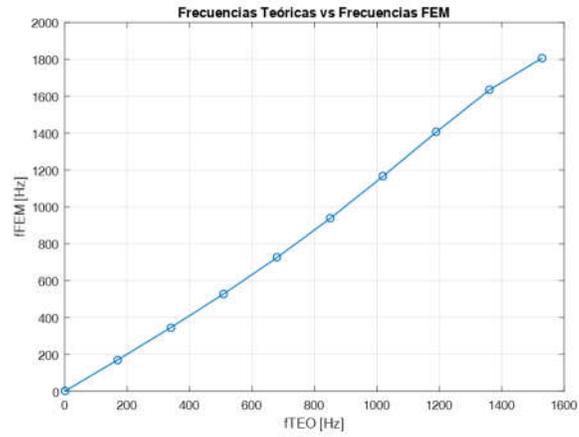


Figura 2.10. Frecuencias Teóricas vs. Frecuencias FEM – 10 Elementos

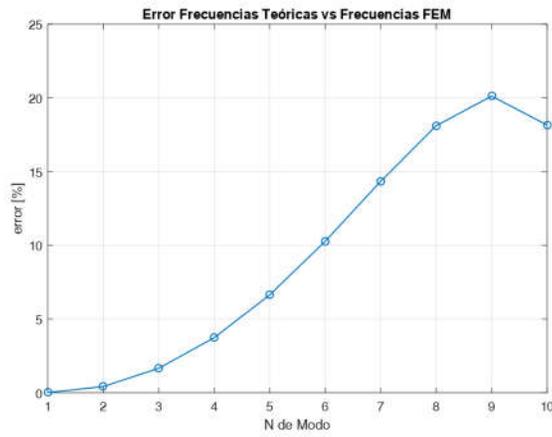


Figura 2.11. Error Frecuencias Teóricas vs. Frecuencias FEM – 10 Elementos

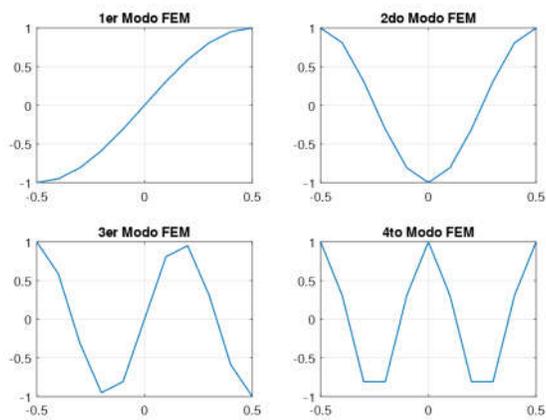


Figura 2.12. Modos FEM – 10 Elementos

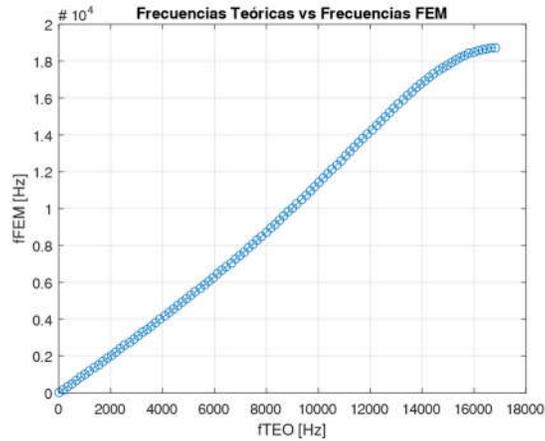


Figura 2.13. Frecuencias Teóricas vs. Frecuencias FEM – 100 Elementos

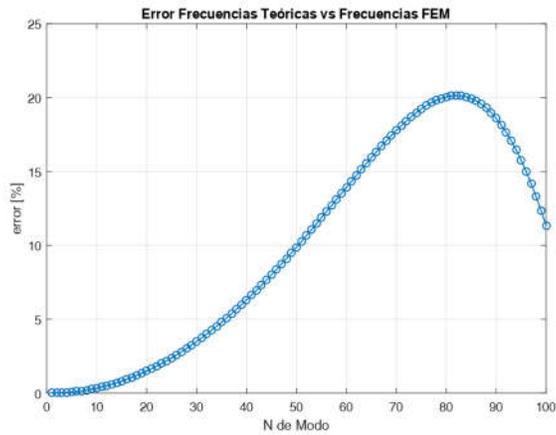


Figura 2.14. Error Frecuencias Teóricas vs. Frecuencias FEM – 100 Elementos

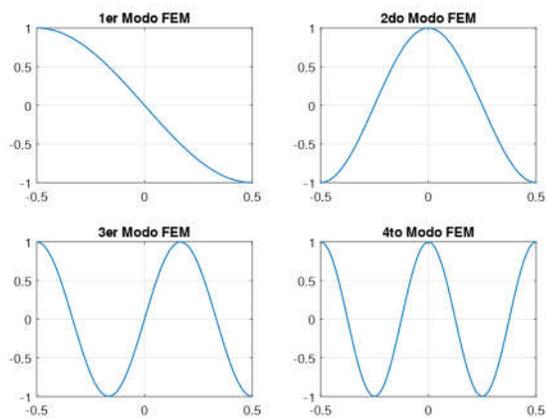


Figura 2.15. Modos FEM – 100 Elementos

Podemos tranquilamente concluir en este aspecto que al incrementar el número de elementos la exactitud de nuestros cálculos mejora, sin embargo como se verá de manera posterior no es el único método de incrementar la exactitud en la solución aproximada.

2.9. TUBO CON FUENTE EN UN EXTREMO Y CERRADO EN EL OTRO

Volvamos al caso anterior un tubo de longitud L de longitud 1m, con un pistón actuando como fuente senoidal, de frecuencia ω , ubicada en un extremo y cerrado en el otro. Las condiciones de contorno se expresan como

$$p(-L/2, t) = P_L e^{j\omega t} = P_L \exp(j\omega t) \quad (2.181)$$

$$\delta p(L/2) \frac{\partial p}{\partial x}(L/2) A(L/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x}(L/2) = 0 \quad (2.182)$$

Al igual que en el caso anterior varios parámetros son constantes y no hay fuerzas corporales entonces

$$\begin{aligned} A(x) &= A = 1 \text{ cm}^2 \\ c(x) &= c = 340 \text{ m/s} \\ q(x, t) &= 0 \\ P_L &= 1 \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$

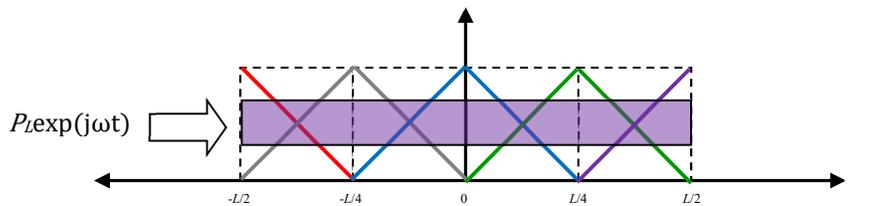


Figura 2.16. Tubo dividido en 4 elementos

Entonces la ecuación de movimiento es

$$\mathbf{M}\ddot{\hat{\mathbf{p}}}(t) + \mathbf{K}\hat{\mathbf{p}}(t) = 0 \quad (2.183)$$

Sin embargo, se debe tener cuidado en el proceso de incorporar la fuente en el extremo del tubo ya que es una condición de contorno y no una fuerza distribuida como lo es $q(x, t)$. Consideremos inicialmente cuatro elementos y cinco nodos como un caso inicial de análisis

$$\frac{Aa_x}{3c^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\hat{p}}_1 \\ \ddot{\hat{p}}_2 \\ \ddot{\hat{p}}_3 \\ \ddot{\hat{p}}_4 \\ \ddot{\hat{p}}_5 \end{bmatrix} + \frac{A}{2a_x} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \\ \hat{p}_4 \\ \hat{p}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.184)$$

La presión en el primer nodo es ya conocida

$$p(-L/2, t) = p_1 = P_L e^{j\omega t} = P_L \exp(j\omega t) \quad (2.185)$$

Entonces, al remplazar en la ecuación respectiva tenemos

$$\frac{Aa_x}{3c^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega^2 P_L e^{j\omega t} \\ \ddot{\hat{p}}_2 \\ \ddot{\hat{p}}_3 \\ \ddot{\hat{p}}_4 \\ \ddot{\hat{p}}_5 \end{bmatrix} + \frac{A}{2a_x} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_L e^{j\omega t} \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \\ \hat{p}_4 \\ \hat{p}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.186)$$

Si observamos la ecuación desde una perspectiva más genérica

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\hat{p}}_1 \\ \ddot{\hat{p}}_2 \\ \ddot{\hat{p}}_3 \\ \ddot{\hat{p}}_4 \\ \ddot{\hat{p}}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & m_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \\ \hat{p}_4 \\ \hat{p}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.187)$$

Podemos ver que la primera ecuación de este sistema es redundante, ya que p_1 es conocido y eso significa que nuestro sistema se reduce a:

$$\begin{bmatrix} m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\hat{p}}_2 \\ \ddot{\hat{p}}_3 \\ \ddot{\hat{p}}_4 \\ \ddot{\hat{p}}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ m_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \\ \hat{p}_4 \\ \hat{p}_5 \end{bmatrix} = \omega^2 P_L e^{j\omega t} \begin{bmatrix} m_{21} \\ m_{31} \\ m_{41} \\ m_{51} \end{bmatrix} - P_L e^{j\omega t} \begin{bmatrix} k_{21} \\ k_{31} \\ k_{41} \\ k_{51} \end{bmatrix} \quad (2.188)$$

La nueva ecuación de movimiento es

$$\mathbf{M}_* \ddot{\hat{\mathbf{p}}}_*(t) + \mathbf{K}_* \hat{\mathbf{p}}_*(t) = \mathbf{f}_*(t) \quad (2.189)$$

En otras palabras, una condición de contorno de Dirichlet no nula genera un vector de fuerzas asociado a la reacción de dicha condición. Como en el caso estudiando anteriormente sus resultados pueden extenderse a muchos más elementos. En el siguiente ejemplo se analizan estos resultados para 100 elementos. En la siguiente tabla tenemos la comparación entre resultados teóricos y los resultados numéricos para las seis primeras frecuencias de resonancia. Las soluciones analíticas se presentan en las ecuaciones (2.190) y (2.191).

Tabla 2.4. Frecuencias Teóricas y FEM – 100 Elementos

f FEM (Hz)	f TEO (Hz)
85,0008739	85
255,023595	255
425,109242	425
595,299783	595
765,63721	765
936,163553	935

$$f_n = \frac{(2n-1)c}{4L} \quad (2.190)$$

$$p(x, t) = P_L \frac{\cos[k(L - x)]}{\cos(kL)} e^{j\omega t} \quad (2.191)$$

De igual manera podemos comparar la solución en términos del valor absoluto de la presión sonora para la frecuencia de 500 Hz a lo largo del tubo y vemos que corresponden dentro de los aceptables márgenes de error.

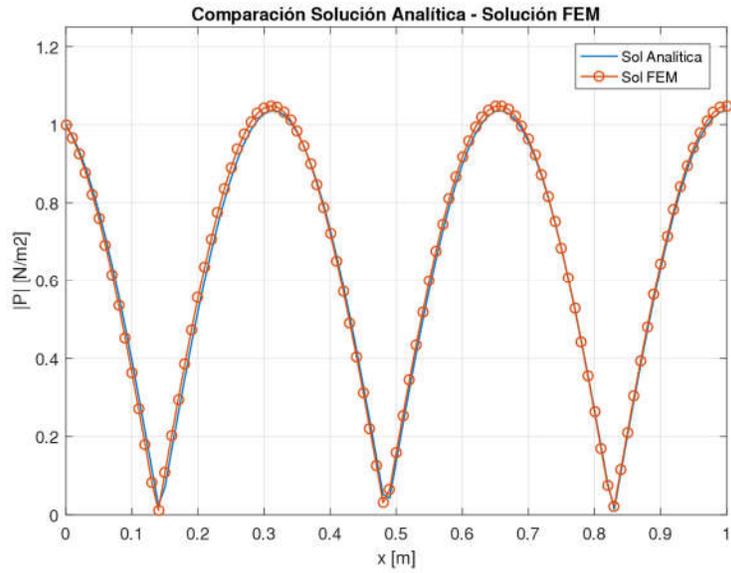


Figura 2.17. Comparación de la Solución Analítica y FEM del valor absoluto de la Presión Sonora para la frecuencia de 500 Hz – 100 elementos

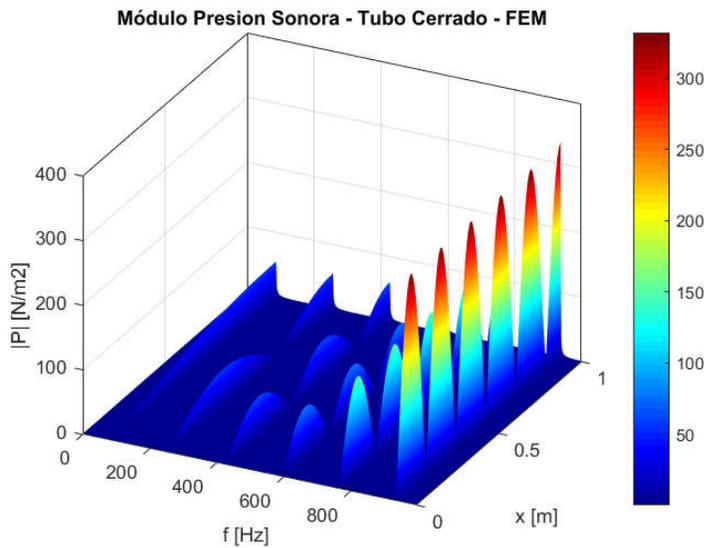


Figura 2.18. Módulo de la Presión Sonora - Tubo Cerrado – Funcion de la frecuencia y la posición – 100 elementos

La solución mediante el método de los elementos finitos para todo el tubo entre las frecuencias de 0 Hz y 1000 Hz es presentada en el gráfico 2.18. En ella no solamente podemos ver la distribución de la presión sonora a lo largo del tubo para diferentes frecuencias, sino que también podemos observar de manera cualitativa la respuesta del sistema en las frecuencias de resonancia. En esta figura también se puede observar que en algunos casos los valores de la presión sonora son extremadamente elevados, esto se debe a que se ha tratado con una condición de contorno ideal, una superficie perfectamente reflectante e infinitamente rígida es algo que no existe en la naturaleza.

2.10. TUBO CON FUENTE EN UN EXTREMO Y ABIERTO EN EL OTRO

Nuevamente tenemos un tubo de longitud L de longitud 1m, con un pistón actuando como fuente senoidal, de frecuencia ω , ubicada en un extremo y abierto en el otro. En términos ideales las condiciones de contorno se expresan como

$$p(-L/2, t) = P_L e^{j\omega t} = P_L \exp(j\omega t) \quad (2.192)$$

$$p(L/2, t) = 0 \quad (2.193)$$

Se mantienen las condiciones anteriores

$$\begin{aligned} A(x) &= A = 1 \text{ cm}^2 \\ c(x) &= c = 340 \text{ m/s} \\ q(x, t) &= 0 \\ P_L &= 1 \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$

Entonces la ecuación de movimiento es

$$\mathbf{M}\ddot{\hat{\mathbf{p}}}(t) + \mathbf{K}\hat{\mathbf{p}}(t) = 0 \quad (2.194)$$

Consideremos 4 elementos y cinco nodos como caso anterior ya que facilita el análisis del problema

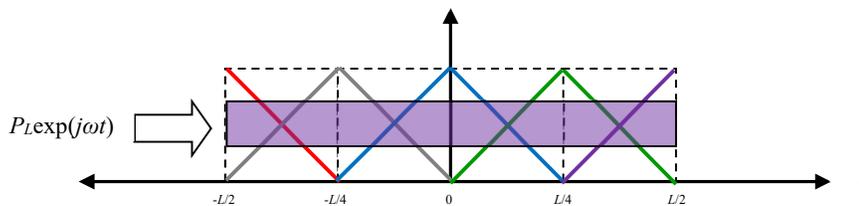


Figura 2.19. Tubo dividido en 4 elementos

$$\frac{Aa_x}{3c^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \\ \ddot{p}_3 \\ \ddot{p}_4 \\ \ddot{p}_5 \end{bmatrix} + \frac{A}{2a_x} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.195)$$

Sin embargo por las condiciones de contorno, la presión en el primer nodo es ya conocida

$$p(-L/2, t) = p_1 = P_L e^{j\omega t} = P_L \exp(j\omega t) \quad (2.196)$$

Además, la presión sonora en el último nodo es nula. Entonces, al remplazar en la ecuación respectiva tenemos

$$\frac{Aa_x}{3c^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega^2 P_L e^{j\omega t} \\ \ddot{p}_2 \\ \ddot{p}_3 \\ \ddot{p}_4 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{A}{2a_x} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_L e^{j\omega t} \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.197)$$

Si observamos la ecuación desde una perspectiva más genérica

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \\ \ddot{p}_3 \\ \ddot{p}_4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & m_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \\ \hat{p}_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.198)$$

Podemos ver que la primera y la última ecuación de este sistema son redundantes, ya que p_1 y p_5 son conocidas y eso significa que nuestro sistema se reduce a:

$$\begin{bmatrix} m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p}_2 \\ \ddot{p}_3 \\ \ddot{p}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \omega^2 P_L e^{j\omega t} \begin{bmatrix} m_{21} \\ m_{31} \\ m_{41} \end{bmatrix} - P_L e^{j\omega t} \begin{bmatrix} k_{21} \\ k_{31} \\ k_{41} \end{bmatrix} \quad (2.199)$$

La nueva ecuación de movimiento es

$$\mathbf{M}_{**} \ddot{\hat{\mathbf{p}}}_{**}(t) + \mathbf{K}_{**} \hat{\mathbf{p}}_{**}(t) = \mathbf{f}_{**}(t) \quad (2.200)$$

En esta situación cuando una condición de contorno de Dirichlet es nula, eliminamos completamente una ecuación dentro del sistema. Igual que en los puntos anteriores sus resultados pueden extenderse a muchos más elementos.

Como en el caso anterior analizaremos la situación para 100 elementos y sus resultados teóricos serán comparados adecuadamente con los resultados teóricos como en el caso anterior y presentaremos la solución analítica para las frecuencias de resonancia y la distribución de la presión sonora en el tubo.

Tabla 2.5. Frecuencias Teóricas y FEM – 100 Elementos

F FEM (Hz)	f TEO (Hz)
170,006853	170
340,054828	340
510,185057	510
680,438691	680
850,85691	850
1021,48093	1020

$$f_n = \frac{nc}{2L} \quad (2.201)$$

$$p(x, t) = P_L \frac{\sin[k(L-x)]}{\sin(kL)} e^{j\omega t} \quad (2.202)$$

Podemos ver que las frecuencias de resonancia se ajustan razonablemente entre la solución analítica y la numérica, de igual forma en el caso de la distribución de la presión sonora para los 500

Hz, sin embargo, en la figura podemos observar un elevadísimo valor para la distribución de presión en la primera frecuencia de resonancia. Uno de los motivos para esto se debe a que la condición de liberación de presión en el extremo del tubo es ideal y esto no ocurre en la realidad. Un modelo más correcto considera la radiación sonora del tubo, la cual se puede representar como una impedancia, este punto será tratado en la próxima sección.

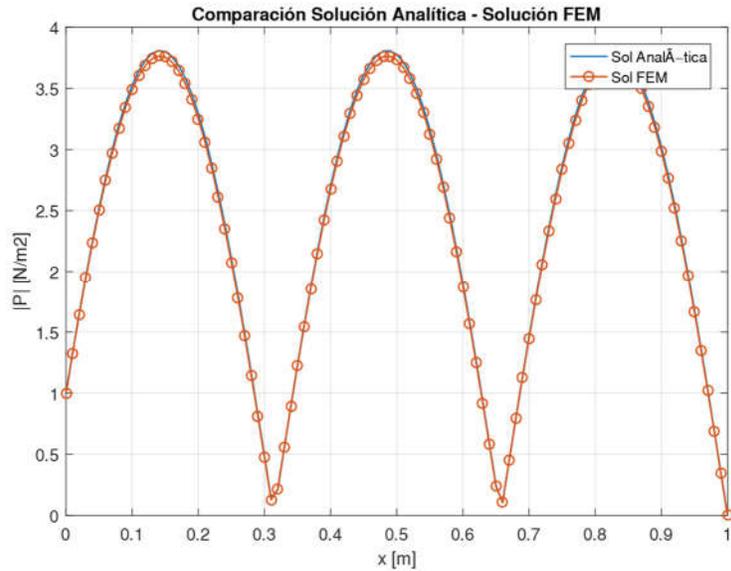


Figura 2.20. Comparación de la Solución Analítica y FEM del valor absoluto de la Presión Sonora para la frecuencia de 500 Hz - 100 elementos

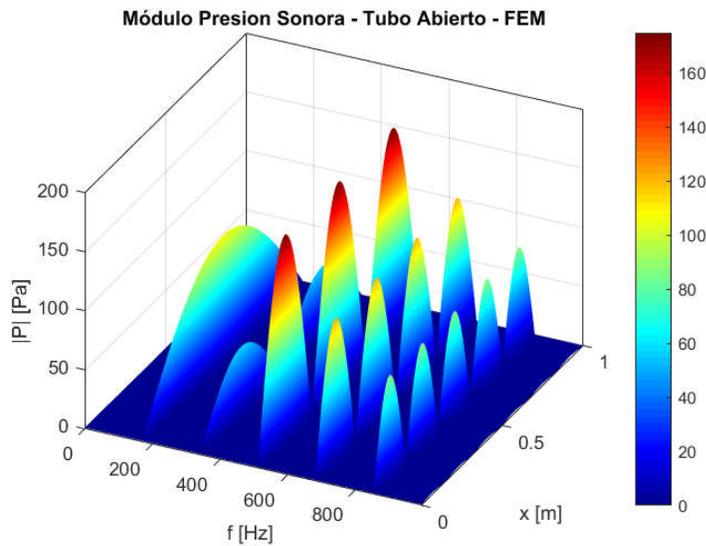


Figura 2.21. Módulo de la Presión Sonora - Tubo Abierto – Funcion de la frecuencia y la posición – 100 elementos

2.11. TUBO CON FUENTE EN UN EXTREMO Y TERMINACIÓN DE IMPEDANCIA

Volvamos al caso anterior un tubo de longitud L de longitud 1m, con un pistón actuando como fuente senoidal, de frecuencia ω , ubicada en un extremo y con un material absorbente en el otro. Este tipo de condición de contorno es caracterizado por una impedancia (admitancia) acústica específica Z_L (Y_L), la cual puede inclusive ser usada para caracterizar el material absorbente al final del tubo o bien, el comportamiento acústico de un tubo abierto, a partir de la impedancia de radiación. Las condiciones de contorno se expresan como:

$$p(-L/2, t) = P_L e^{j\omega t} = P_L \exp(j\omega t) \quad (2.203)$$

$$\frac{p(-L/2, t)}{u(-L/2, t)} = Z_L = \frac{1}{Y_L} \quad (2.204)$$

Esta situación es mucho más realista, puesto que si el tubo está cerrado con una superficie muy reflectante y rígida nunca tendrá una impedancia infinita, lo que causaría que la velocidad de partículas sea nula en el extremo. Por otra parte, si el tubo está abierto se debe considerar el proceso de la radiación sonora, la cual se puede representar como una impedancia de radiación. Adicionalmente podemos incorporar absorción del medio al considerar la velocidad como una cantidad compleja. En este caso consideraremos una terminación de impedancia arbitraria, la cual es lo suficientemente alta para ser considerada como terminación rígida.

$$\begin{aligned} A(x) &= A = 1 \text{ cm}^2 \\ c(x) &= 340.0 \text{ m/s} \\ q(x, t) &= 0 \\ P_L &= 1 \text{ N/m}^2 \\ Z_L &= 5000 + j2000 \text{ Rayls} \end{aligned}$$

En el caso de considerar la impedancia acústica específica de radiación esta es dada por la expresión

$$Z_L = \rho_0 c \left[\frac{2J_1(2ka)}{(2ka)} + H_1(2ka) \right]$$

Donde $J_1(2ka)$ es la función de Bessel de primera especie de primer orden, por otra parte $H_1(2ka)$ es la función de Struve de primer orden, además k es el número de onda y a es el radio del tubo.

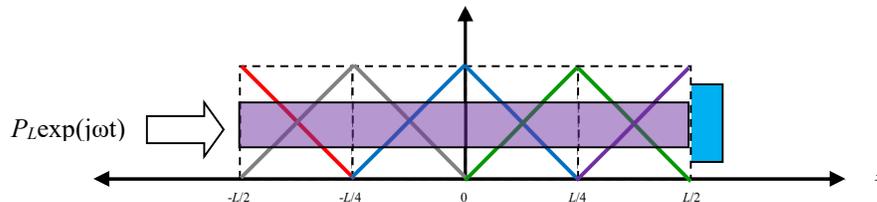


Figura 2.22. Tubo dividido en 4 elementos con terminación de impedancia

En este caso la condición de impedancia se ve reflejada en la inclusión de la matriz de amortiguamiento

$$\mathbf{M}\ddot{\hat{\mathbf{p}}}(t) + \mathbf{C}\dot{\hat{\mathbf{p}}}(t) + \mathbf{K}\hat{\mathbf{p}}(t) = 0 \quad (2.205)$$

Entonces la ecuación de movimiento es después de integrar las condiciones de contorno

$$\mathbf{M}_* \ddot{\hat{\mathbf{p}}}_*(t) + \mathbf{C}_* \dot{\hat{\mathbf{p}}}_*(t) + \mathbf{K}_* \hat{\mathbf{p}}_*(t) = \mathbf{f}_*(t) \quad (2.206)$$

La matriz de amortiguamiento en general es dada por la ecuación (2.207) y en términos específicos en la ecuación (2.208)

$$c_{ij} = \int_{-L/2}^{L/2} \rho_0 Y_L \hat{N}_i(x)^T \hat{N}_j(x) A(x) \delta(x - L/2) dx \quad (2.207)$$

$$\mathbf{C}_* = \rho_0 Y_L A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.208)$$

Entonces el sistema de ecuaciones diferenciales en forma matricial es dado por la ecuación (2.209) donde ya se ha incorporado la fuente de presión en $x = -L/2$ siguiendo los procedimientos descritos en la sección 2.9

$$\begin{bmatrix} m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p}_2 \\ \ddot{p}_3 \\ \ddot{p}_4 \\ \ddot{p}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{2c} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_2 \\ \dot{p}_3 \\ \dot{p}_4 \\ \dot{p}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ m_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} = \omega^2 P_L e^{j\omega t} \begin{bmatrix} m_{21} \\ m_{31} \\ m_{41} \\ m_{51} \end{bmatrix} - j\omega P_L e^{j\omega t} \begin{bmatrix} c_{21} \\ c_{31} \\ c_{41} \\ c_{51} \end{bmatrix} - P_L e^{j\omega t} \begin{bmatrix} k_{21} \\ k_{31} \\ k_{41} \\ k_{51} \end{bmatrix} \quad (2.209)$$

La figura 2.23 muestra la distribución del valor absoluto de la presión sonora tanto en frecuencia como en espacio y podemos ver que, si bien la presión es elevada en las frecuencias de resonancia, en ningún caso se elevan a valores que no tienen sentido. De igual forma podemos observar que los valores de dichas frecuencias de resonancia corresponden a los resultados teóricos esperados.

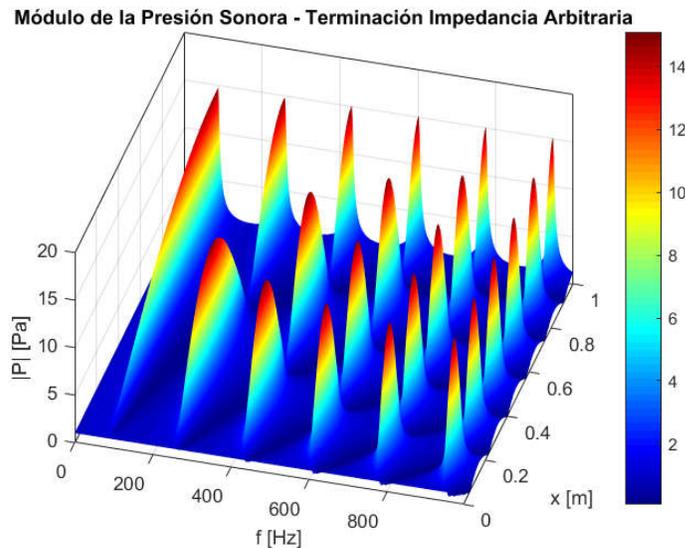


Figura 2.23. Módulo de la Presión Sonora - Tubo con terminación de impedancia acústica específica arbitraria – 100 elementos

La figura 2.24 muestra la respuesta del tubo con impedancia específica de terminación de radiación, las frecuencias naturales coinciden con los resultados esperados y la distribución de presión sonora se mantiene en los márgenes aceptables. Podemos entonces concluir que un modelo que considere de una u otra forma el comportamiento tipo impedancia en la terminación del tubo proporciona mayor exactitud en los resultados.

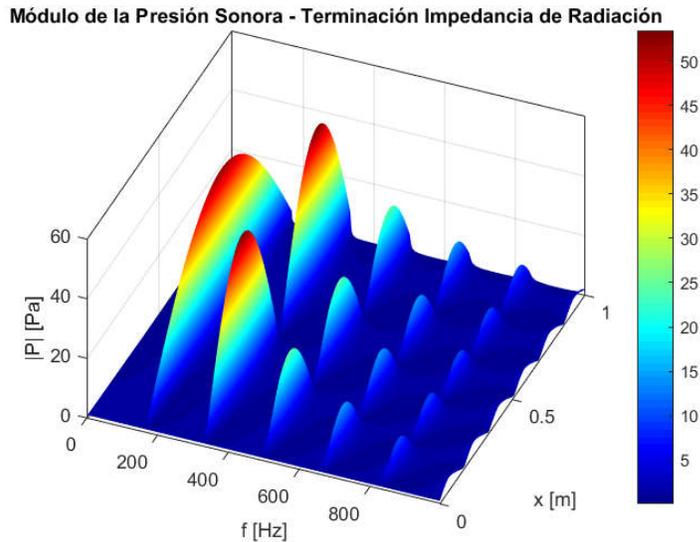


Figura 2.24. Módulo de la Presión Sonora - Tubo con terminación de impedancia acústica específica de radiación – 100 elementos

2.12. OTROS EJEMPLOS: INCLUSIÓN DE MATERIAL ABSORTOR POROSO Y VARIACIÓN DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL

El siguiente ejemplo considera la presencia de un material absorbente poroso de un espesor de 0.03 (m) y de una resistividad específica de flujo de 2700 (Rayls/m), en la práctica esto significa que el medio de propagación no es homogéneo como en los casos anteriores. El comportamiento del material será formulado usando el modelo Delany - Bazley - Miki (Delany, Bazley, 1970), (Miki, 1990) el cual es de características empíricas. Por otra parte, incluiremos un modelo de cámara de expansión simple y compararemos el desempeño teórico (NR Teo) (Kinsler, 2000) con el modelo de elementos finitos. Los datos se indican a continuación. Radio de la sección inicial y final $R1 = 0.01$ (m), longitud de la sección inicial y final $L1 = 0.25$ (m), radio de la expansión 0.10 (m), longitud de la expansión $L2 = 0.50$ (m).

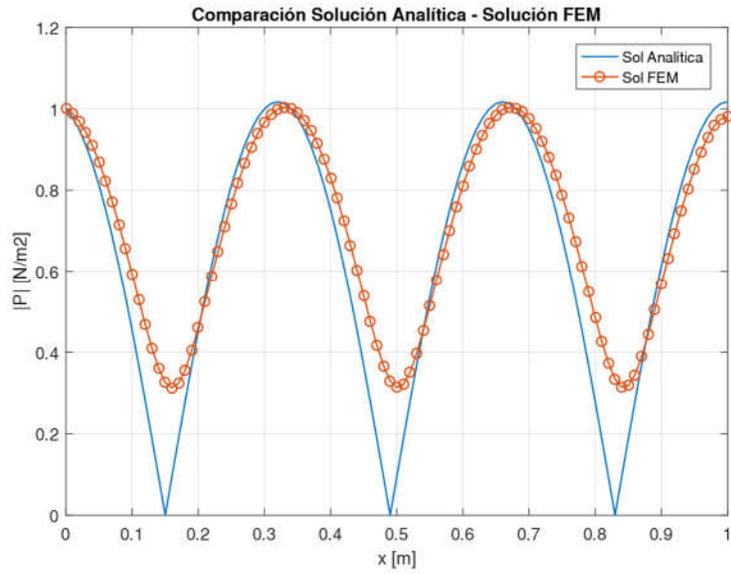


Figura 2.25. Comparación de la Solución Analítica y FEM del valor absoluto de la Presión Sonora para la frecuencia de 500 Hz tubo con material absorbente – 100 elementos

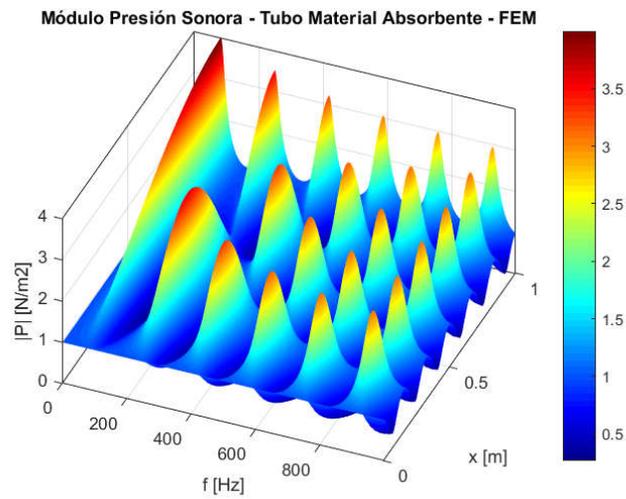


Figura 2.26. Módulo de la Presión Sonora - Tubo con material absorbente – 100 elementos

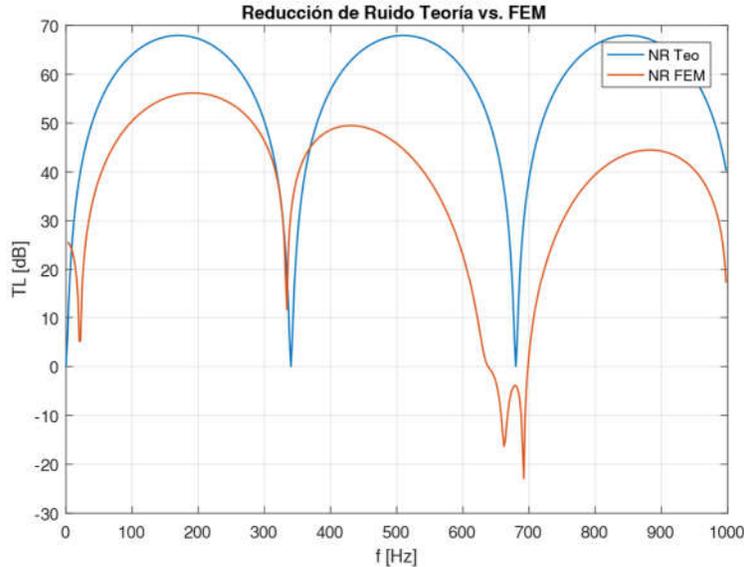


Figura 2.27. Reducción de ruido resultados teóricos y FEM – 100 elementos

2.13. INCREMENTANDO LA EXACTITUD DE LOS ELEMENTOS: INTRODUCCIÓN AL REFINAMIENTO p (FEM- p)

La exactitud de la solución a un problema puede ser incrementada ya sea incrementando el número de elementos (FEM - h) como ha sido demostrado anteriormente, o bien incrementado el orden del polinomio usado como función de interpolación dentro de cada elemento. Esto resulta en un incremento del número de grados de libertad del elemento, estos grados de libertad adicionales pueden ser localizados en los nodos existentes o bien en nuevos puntos nodales.

Una de las maneras más simples es recurrir a los polinomios de Lagrange. Estos son dados por la siguiente ecuación (Craggs, 1997).

$$l_m^j(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3) \cdots (\xi - \xi_{j-1})(\xi - \xi_{j+1}) \cdots (\xi - \xi_{m+1})}{(\xi_j - \xi_1)(\xi_j - \xi_2)(\xi_j - \xi_3) \cdots (\xi_j - \xi_{j-1})(\xi_j - \xi_{j+1}) \cdots (\xi_j - \xi_{m+1})} \quad (2.210)$$

Donde m es el orden del polinomio y j es el número del nodo. En el caso de un elemento lineal $m = 1$ de dos nodos ubicados en $\xi_1 = -1$ y $\xi_2 = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= l_1^1(\xi) = \frac{(\xi - 1)}{(-1 - 1)} = \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ N_2(\xi) &= l_1^2(\xi) = \frac{(\xi - (-1))}{(1 - (-1))} = \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{aligned} \quad (2.211)$$

En el caso de funciones de interpolación cuadrática, lo que significa un elemento de tres nodos tenemos.

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi) &= l_2^1(\xi) = \frac{(\xi - 0)(\xi - 1)}{(-1 - 0)(-1 - 1)} = -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi) \\
 N_2(\xi) &= l_2^2(\xi) = \frac{(\xi - (-1))(\xi - 1)}{(0 - (-1))(0 - 1)} = (1 - \xi^2) \\
 N_3(\xi) &= l_2^3(\xi) = \frac{(\xi - 0)(\xi - (-1))}{(1 - 0)(1 - (-1))} = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)
 \end{aligned}
 \tag{2.212}$$

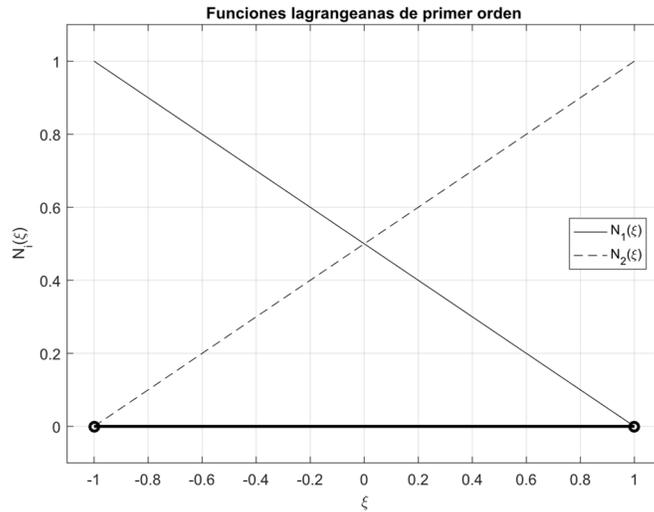


Figura 2.28. Funciones lagrangeanas lineales

Las matrices elementales de masa, rigidez y amortiguamiento son calculadas conforme a las secciones anteriores, por lo tanto, para elementos lagrangianos cuadráticos tenemos, las siguientes matrices elementales de masa y rigidez dadas por la ecuación (2.213)

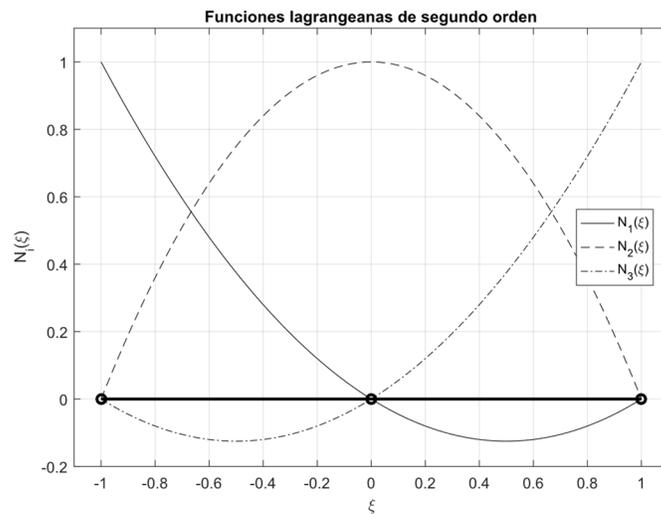


Figura 2.29. Funciones lagrangeanas cuadráticas

$$\mathbf{M}^e = \frac{Aa_x}{15c^2} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}^e = \frac{A}{6a_x} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad (2.213)$$

El montaje de estas matrices elementales para construir las matrices globales es similar a lo visto en otras secciones de este capítulo. Podemos observar una comparación en la tabla 2.6, donde el uso de polinomios de interpolación de orden superior mejora notablemente la exactitud de los cálculos para unos pocos elementos

Tabla 2.6. Frecuencias Teóricas y FEM – 10 Elementos – Polinomios Lagrangeanos Lineales vs. Polinomios Lagrangianos Cuadráticos para

fTEO [Hz]	10 Elementos Lineales		10 Elementos Cuadráticos	
	f FEM [Hz]	error [%]	f FEM [Hz]	error [%]
0	0	0	0	0
170	170,699933	0,41172506	170,001144	0,00067298
340	345,616806	1,65200179	340,036058	0,01060518
510	529,020278	3,72946637	510,26716	0,05238427
680	725,094803	6,63158866	681,08916	0,16017064
850	937,259122	10,2657791	853,190999	0,3754117
1020	1166,21251	14,3345595	1027,56558	0,74172365
1190	1405,46548	18,1063432	1205,43561	1,29711009
1360	1633,59056	20,1169529	1387,90222	2,05163392
1530	1807,72995	18,1522845	1573,63747	2,8521221

Si bien el uso de polinomios lagrangianos es muy efectivo en el contexto de elementos finitos, en la medida de que el orden del polinomio sube, las funciones y las matrices elementales deben ser construidas desde la nada. A fin de solucionar ese problema el uso de funciones jerárquicas, basadas en polinomios de Legendre en vez de un conjunto de funciones de interpolación de orden r este contenido en un conjunto de orden $r + 1$ (Solín et. al. 2004). Las funciones jerárquicas están dadas por las ecuaciones 2.215 y 2.216

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ N_2(\xi) &= \frac{1}{2}(1 + \xi) \\ N_i(\xi) &= \hat{\mu}_{i-1}(\xi) \quad i = 3, 4, \dots, r + 1 \end{aligned} \quad (2.215)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_j(\xi) &= \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} \hat{L}_{j-1}(\hat{x}) d\hat{x} \\ \hat{L}_n(\hat{x}) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\hat{x}^n} (\hat{x}^2 - 1)^n \end{aligned} \quad (2.216)$$

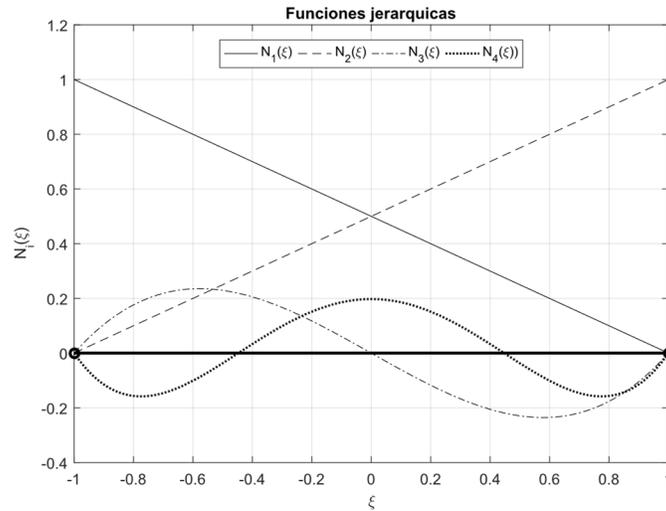


Figura 2.29. Funciones jerárquicas

Como se puede apreciar las matrices de masa y rigidez en este contexto son mucho más fáciles de montar, puesto que aprovechan los datos de una matriz elemental de (2X2) para construir la de (3X3) y de (4X4)

$$\mathbf{M}^e = \frac{Aa_x}{3c^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}^e = \frac{A}{2a_x} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.217)$$

$$\mathbf{M}^e = \frac{Aa_x}{3c^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{\sqrt{6}}{10} \\ 1 & 2 & \frac{-\sqrt{6}}{10} \\ \frac{\sqrt{6}}{10} & \frac{-\sqrt{6}}{10} & \frac{6}{35} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}^e = \frac{A}{2a_x} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{10} \end{bmatrix} \quad (2.218)$$

$$\mathbf{M}^e = \frac{Aa_x}{3c^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{\sqrt{6}}{10} & 0 \\ 1 & 2 & \frac{-\sqrt{6}}{10} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{10} & \frac{-\sqrt{6}}{10} & \frac{6}{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{63} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}^e = \frac{A}{2a_x} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{7} \end{bmatrix} \quad (2.219)$$

2.14. INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Salvo circunstancias y/o problemas muy simples la integración asociada a las matrices de masa rigidez, etc. es algo tedioso, complejo y fuente de muchos posibles errores. En otras situaciones dicha integración es imposible de realizar de manera exacta, como en el caso de un medio no homogéneo, por lo tanto, es en la mayoría de los casos se recomienda usar integración numérica.

Uno de los métodos más utilizados es Gauss-Legendre (Petyt, 2010), este se puede resumir en la siguiente fórmula como:

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^n H_j g(\xi_j) \quad (2.217)$$

Donde H_j son coeficientes y ξ_j son puntos de muestreo. Esto nos permite integrar polinomios de orden $2n - 1$ usando n puntos. Los resultados se pueden expresar en la tabla 2.7. Considerando por ejemplo que la matriz de masa elemental es producto de la integración de funciones cuadráticas sería adecuada integrar con dos puntos, es decir

$$m_{ij}^e = \int_{-1}^1 \frac{1}{c^2} \hat{N}_i(\xi) \hat{N}_j(\xi) A_x d\xi = \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \quad (2.218)$$

$$\begin{aligned} m_{ij}^e &= \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^2 H_j g(\xi_j) = H_1 g(\xi_1) + H_2 g(\xi_2) \\ &= 1 \times g(-\sqrt{1/3}) + 1 \times g(\sqrt{1/3}) \end{aligned} \quad (2.219)$$

Tabla 2.7. Puntos de integración y coeficientes Gauss - Legendre

n	ξ_j	H_j
1	0	2
2	$\pm\sqrt{1/3}$	1
3	$\pm\sqrt{0.6}$ 0	5/9 8/9
4	$\pm \left[\frac{3 + (4.8)^{0.5}}{7} \right]^{0.5}$ $\pm \left[\frac{3 - (4.8)^{0.5}}{7} \right]^{0.5}$	$\left[\frac{1}{2} - \frac{(30)^{0.5}}{36} \right]$ $\left[\frac{1}{2} + \frac{(30)^{0.5}}{36} \right]$