CAPÍTULO V
ANÁLISIS DE VIBRACIONES LIBRES Y SOLUCIONES A LA RESPUESTA FORZADA

5. ANÁLISIS DE VIBRACIONES LIBRES Y SOLUCIONES A LA RESPUESTA FORZADA

5.1. INTRODUCCIÓN

La ecuación de movimiento y las condiciones iniciales de un sistema acústico, ya sea descrita en términos generales, como se ha realizado en el capítulo 2 o bien en el caso de tubos como vimos en el capítulo 3 es:

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}\ddot{\hat{\mathbf{p}}}(\mathrm{t}) + \mathbf{C}\dot{\hat{\mathbf{p}}}(\mathrm{t}) + \mathbf{K}\hat{\mathbf{p}}(\mathrm{t}) = \mathbf{f}(\mathrm{t}) \\ &\hat{\mathbf{p}}(0) = \hat{\mathbf{p}}_0 \\ &\dot{\hat{\mathbf{p}}}(0) = \dot{\hat{\mathbf{p}}}_0 \end{aligned} \qquad (4.001)$$

En esta situación consideraremos el vector de fuerzas como cualquier tipo de excitación, fuerza corporal y condiciones de contorno prescritas, entre muchas otras. Los métodos de poder resolver este tipo de ecuación dependen si la excitación es nula, es periódica, transiente o aleatoria. Este capítulo trata con algunos de estos métodos y técnicas para encontrar dicha solución. Una visión más general de los variados métodos numéricos asociados a este tipo de problemas se puede encontrar en el texto de Petyt (2010).

Específicamente se tratará la respuesta forzada en el dominio de la frecuencia para excitaciones no aleatorias y soluciones en el dominio del tiempo para excitación armónica y transiente. Esto nos permitirá presentar algunos métodos numéricos que son de extrema utilidad en el proceso de resolución.

5.2. EL PROBLEMA DE VALORES PROPIOS NO AMORTIGUADO

Cuando tomamos la transformada de Fourier en la ecuación (4.001) tenemos la siguiente situación

$$[-\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}]\hat{\mathbf{P}}(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \qquad (4.002)$$

Inicialmente una posible propuesta de solución sería algo como

$$\hat{\mathbf{P}}(\omega) = [-\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}]^{-1}\mathbf{F}(\omega) \qquad (4.003)$$

Este posible método de solución es muy susceptible a errores y genera un elevado costo computacional, inicialmente es deseable trabajar el problema por partes para obtener una solución más generalizada. Partamos del caso más simple y consideremos una solución para la ecuación sin amortiguamiento

$$\mathbf{M}\ddot{\hat{\mathbf{p}}}(t) + \mathbf{K}\hat{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{0} \qquad (4.004)$$

Consideremos una solución de la forma

$$\hat{\mathbf{p}}(t) = \hat{\boldsymbol{\Phi}}e^{j\omega t} \qquad (4.005)$$

Reemplazamos y obtenemos

$$[-\omega^2\mathbf{M} \quad + \quad \boldsymbol{K}] \quad \hat{\boldsymbol{\phi}}e^{j\omega t} = \mathbf{0} \tag{4.006}$$

Simplificamos *exp*(*jωt*)

$$[-\omega^2\mathbf{M} \quad + \quad \mathbf{K}] \quad \hat{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{0} \qquad\qquad [s\mathbf{M} \quad + \quad \mathbf{K}] \quad \hat{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{0} \tag{4.007}$$

La ecuación (4.005) corresponde al problema de valores propios asociado al sistema de ecuaciones diferenciales. En otras palabras determinaremos las soluciones si se cumple

$$det[-\omega^2\mathbf{M} \quad + \quad \mathbf{K}] = \mathbf{0} \qquad\qquad det[-s\mathbf{M} \quad + \quad \mathbf{K}] = \mathbf{0} \tag{4.008}$$

Como resultado de este determinante obtenemos un polinomio de orden N en la variable $s=\omega^2$

$$\begin{gathered} a_N s^N + a_{N-1}s^{N-1} + a_{N-2}s^{N-2} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s^1 + a_0 = 0 \\ a_N(\omega^2)^N + a_{N-1}(\omega^2)^{N-1} + a_{N-2}(\omega^2)^{N-2} + \cdots + a_2(\omega^2)^2 + a_1(\omega^2)^1 + a_0 = 0 \end{gathered} \tag{4.009}$$

Las raíces de ese polinomio están íntimamente relacionadas con las frecuencias naturales del sistema acústico en cuestión y son conocidas como los *valores propios* del sistema

$$\begin{gathered} s_1 = \omega_1^2 \Leftrightarrow f_1 \\ \vdots \\ s_N = \omega_N^2 \Leftrightarrow f_N \end{gathered} \tag{4.010}$$

Además por cada valor de $s=\omega^2$ obtenemos un sistema de ecuaciones independiente. Los resultados de estos sistemas de ecuaciones corresponden a los *vectores propios*

$$\begin{aligned} &[-\omega_1{}^2\mathbf{M} \quad + \quad \mathbf{K}] \quad \hat{\boldsymbol{\phi}}_1 = \mathbf{0} \\ &\vdots \\ &[-\omega_N{}^2\mathbf{M} \quad + \quad \mathbf{K}] \quad \hat{\boldsymbol{\phi}}_N = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.011}$$

Específicamente

$$\begin{aligned} &[-\omega_1{}^2\mathbf{M} \quad + \quad \mathbf{K}] \quad \hat{\boldsymbol{\phi}}_1 = 0 &\qquad& \hat{\boldsymbol{\phi}}_1 = [\hat{\phi}_1 \quad \hat{\phi}_2 \quad \cdots \quad \hat{\phi}_N]_1^T \\ &[-\omega_2{}^2\mathbf{M} \quad + \quad \mathbf{K}] \quad \hat{\boldsymbol{\phi}}_2 = 0 && \hat{\boldsymbol{\phi}}_2 = [\hat{\phi}_1 \quad \hat{\phi}_2 \quad \cdots \quad \hat{\phi}_N]_2^T \\ &\vdots \\ &[-\omega_N{}^2\mathbf{M} \quad + \quad \mathbf{K}] \quad \hat{\boldsymbol{\phi}}_N = 0 && \hat{\boldsymbol{\phi}}_N = [\hat{\phi}_1 \quad \hat{\phi}_2 \quad \cdots \quad \hat{\phi}_N]_N^T \end{aligned} \tag{4.012}$$

Si bien este es el marco teórico asociado al problema de valores propios no amortiguado, nadie resuelve este tipo de problemas de manera directa, existen variados métodos altamente eficientes en la literatura que pueden ser consultados (Bathe, Wilson, 1976; Wilkinson, 1988). Los vectores propios cumplen con las ecuaciones siguientes y además se da la relación

$$\hat{\phi}_i^T\mathbf{M}\hat{\phi}_i = m_i \qquad\qquad \hat{\phi}_i^T\mathbf{K}\hat{\phi}_i = k_i \qquad\qquad \frac{k_i}{m_i} = \omega_i^2 = s_i \tag{4.013}$$

Si se define el vector propio normalizado a la matriz de masa tenemos

$$\phi_i = \frac{\hat{\phi}_i}{\sqrt{m_i}} \tag{4.014}$$

Entonces se cumple

$$\phi_i^T\mathbf{M}\phi_i = 1 \qquad\qquad \phi_i^T\mathbf{K}\phi_i = \omega_i^2 = s_i \tag{4.015}$$

5.3. ORTOGONALIDAD DE LOS VECTORES PROPIOS Y MATRIZ MODAL

Los vectores propios normalizados a la matriz de masa son ortogonales, es decir:

$$\phi_i^T \mathbf{M} \phi_i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad \phi_i^T \mathbf{K} \phi_i = \begin{cases} \omega_i^2 = s_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{4.016}$$

Esto significa que podemos definir la matriz modal como:

$$\mathbf{\Phi} = [\widehat{\boldsymbol{\phi}}_1 \quad \widehat{\boldsymbol{\phi}}_2 \quad \cdots \quad \widehat{\boldsymbol{\phi}}_N] \tag{4.017}$$

$$\mathbf{\Phi} = \left[\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \\ \phi_{N-1} \\ \phi_N \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \\ \phi_{N-1} \\ \phi_N \end{bmatrix}_{\mathbf{2}} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \\ \phi_{N-1} \\ \phi_N \end{bmatrix}_{\mathbf{3}} \cdots \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \\ \phi_{N-1} \\ \phi_N \end{bmatrix}_{\boldsymbol{N-1}} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \\ \phi_{N-1} \\ \phi_N \end{bmatrix}_{\boldsymbol{N}} \right] \tag{4.018}$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \phi_{1,3} & \cdots & \phi_{1,N-1} & \phi_{1,N} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} & \phi_{2,3} & \cdots & \phi_{2,N-1} & \phi_{2,N} \\ \phi_{3,1} & \phi_{3,2} & \phi_{3,3} & \cdots & \phi_{3,N-1} & \phi_{3,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi_{N-1,1} & \phi_{N-1,2} & \phi_{N-1,3} & \cdots & \phi_{N-1,N-1} & \phi_{N-1,N} \\ \phi_{N,1} & \phi_{N,2} & \phi_{N,3} & \cdots & \phi_{N,N-1} & \phi_{N,N} \end{bmatrix} \tag{4.019}$$

La matriz modal tiene la propiedad de diagonalizar las matrices de rigidez y masa

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}} \mathbf{M} \mathbf{\Phi} = \mathbf{I} \tag{4.020}$$

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}} \mathbf{K} \mathbf{\Phi} = \mathbf{\Sigma} = diag(s_i) = diag(\omega_i^2) \qquad i = 1,2, \dots, N \tag{4.021}$$

5.4. RESPUESTA FORZADA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA: SIN AMORTIGUAMIENTO

El objetivo de los primeros elementos de este capítulo es poder dar un marco teórico que nos permita obtener una solución eficiente de este sistema de ecuaciones diferenciales. Desde una primera etapa este será resuelto utilizando toda la información disponible del sistema. Más adelante usaremos información modal truncada que permite acelerar el proceso de solución Consideremos la ecuación en el dominio del tiempo, si tomamos la transformada de Fourier tenemos

$$\mathbf{M}\ddot{\widehat{\mathbf{p}}}(t) \quad + \quad \mathbf{K}\widehat{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{f}(t) \tag{4.022}$$

$$[-\omega^2 \mathbf{M} \quad + \quad \mathbf{K}]\widehat{\mathbf{P}}(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \tag{4.023}$$

Si consideramos la transformación a coordenadas principales dadas por

$$\widehat{\mathbf{P}}(\omega) = \mathbf{\Phi}\mathbf{Q}(\omega) \tag{4.024}$$

Y reemplazando en la ecuación (4.020), tenemos

$$[-\omega^2\mathbf{M} \quad + \quad \mathbf{K}]\mathbf{\Phi}\mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \tag{4.025}$$

Pre multiplicando por la transpuesta de la matriz modal tenemos

$$\mathbf{\Phi}^T[-\omega^2\mathbf{M} \quad + \quad \mathbf{K}]\mathbf{\Phi}\mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{F}(\omega) \tag{4.026}$$

Utilizando las propiedades expresadas en la ecuación (4.18) tenemos

$$[-\omega^2\mathbf{I} \quad + \quad \mathbf{\Sigma}]\mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{F}(\omega) \tag{4.027}$$

Entonces

$$\mathbf{Q}(\omega) = [-\omega^2\mathbf{I} \quad + \quad \mathbf{\Sigma}]^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{F}(\omega) \tag{4.028}$$

Pre multiplicando por la transpuesta de la matriz modal nuevamente tenemos

$$\widehat{\mathbf{P}}(\omega) = \mathbf{\Phi}\mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{\Phi}[-\omega^2\mathbf{I} \quad + \quad \mathbf{\Sigma}]^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{F}(\omega) \tag{3.029}$$

La presión sonora en el dominio de la frecuencia es entonces

$$\widehat{\mathbf{P}}(\omega) = \mathbf{\Phi}[-\omega^2\mathbf{I} \quad + \quad \mathbf{\Sigma}]^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{F}(\omega) \tag{3.030}$$

Podemos distinguir la matriz de receptancia del sistema acústico como:

$$\boldsymbol{\alpha}(\omega) = \mathbf{\Phi}[-\omega^2\mathbf{I} \quad + \quad \mathbf{\Sigma}]^{-1}\mathbf{\Phi}^T \tag{3.031}$$

Cada elemento de la receptancia es expresado como

$$\alpha_{rs}(\omega) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\phi_{ri}\phi_{si}}{-\omega^2 + \omega_i^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_{rs}^i}{-\omega^2 + \omega_i^2} \tag{3.032}$$

La receptancia corresponde a la respuesta de frecuencia del sistema. Específicamente cada elemento de dicha matriz contiene la información de la función de respuesta de frecuencia cuando se realiza una excitación en el nodo r y se mide la respuesta en el nodo s. En este punto es importante reflexionar acerca de estas últimas ecuaciones, el costo de usar toda la información modal es elevado y no todos los algoritmos computacionales de resolución de valores propios son capaces de entregar todos los datos. Esto se debe a que en el método de los elementos finitos el orden de las matrices es muy elevado Es normal que muchos algoritmos entreguen algunos, especialmente los primeros modos, que consisten en la información más relevante; en muchos casos dicha información está centrada en el sector de "baja frecuencia".

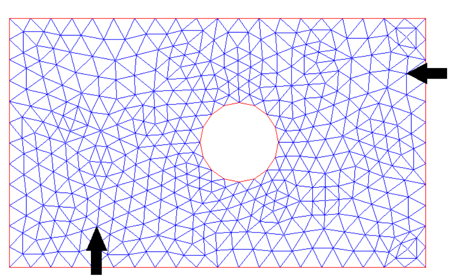

Figura 5.1. Significado físico de la Receptancia r punto de excitación – s punto de respuesta

El uso comillas para esta última frase se debe a que se entiende como baja frecuencia depende, entre muchas cosas, del problema y del modelo a estudiar. Además la información de modos superiores no es en muchos casos exacta o relevante. Este hecho sirve para ahorrar espacio en procesamiento computacional y memoria. Puesto que los modos asociados a las frecuencias naturales más bajas son los más utilizados, se define en este punto la Matriz Modal Truncada como aquella que contiene la información de los vectores propios asociados a los valores propios de menor valor:

$$\widehat{\boldsymbol{\Phi}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \\ \phi_{N-1} \\ \phi_N \end{bmatrix}_{\mathbf{1}} & \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \\ \phi_{N-1} \\ \phi_N \end{bmatrix}_{\mathbf{2}} & \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \\ \phi_{N-1} \\ \phi_N \end{bmatrix}_{\mathbf{3}} & \cdots & \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \\ \phi_{N-1} \\ \phi_N \end{bmatrix}_{\widehat{N}} \end{bmatrix} \qquad \widehat{N} << N \tag{3.033}$$

Y entonces la solución y la receptancia son construidas con los primeros modos y frecuencias naturales del sistema.

$$\widehat{\mathbf{P}}(\omega) = \widehat{\boldsymbol{\Phi}}[-\omega^2\mathbf{I} \quad + \quad \boldsymbol{\Sigma}]^{-1}\widehat{\boldsymbol{\Phi}}^T\mathbf{F}(\omega) \tag{3.034}$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\omega) = \widehat{\boldsymbol{\Phi}}[-\omega^2\mathbf{I} \quad + \quad \boldsymbol{\Sigma}]^{-1}\widehat{\boldsymbol{\Phi}}^T \tag{3.035}$$

Cada miembro de la matriz de receptancia es expresado como

$$\alpha_{rs}(\omega) = \sum_{i=1}^{\widehat{N}} \frac{\phi_{ri}\phi_{si}}{-\omega^2 + \omega_i^2} = \sum_{i=1}^{\widehat{N}} \frac{A_{rs}^i}{-\omega^2 + \omega_i^2} \tag{3.036}$$

En otras oportunidades es de interés determinar la receptancia en un rango de frecuencia comprendido entre distintos modos, luego la matriz modal truncada es:

$$\widehat{\boldsymbol{\Phi}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \\ \phi_{N-1} \\ \phi_N \end{bmatrix}_{N1} & \cdots & \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \\ \phi_{N-1} \\ \phi_N \end{bmatrix}_{N2} \end{bmatrix} \qquad 1 < N1 < N2 < N \tag{3.037}$$

La solución y la receptancia son dadas por las ecuaciones (3.027) y (3.028) mientras que cada elemento de la receptancia es

$$\alpha_{rs}(\omega) = \sum_{i=N1}^{N2} \frac{\phi_{ri}\phi_{si}}{-\omega^2 + \omega_i^2} = \sum_{i=N1}^{N2} \frac{A_{rs}^i}{-\omega^2 + \omega_i^2} \tag{3.038}$$

5.5. RESPUESTA FORZADA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA: AMORTIGUAMIENTO VISCOSO PROPORCIONAL

Es común en el medio de los elementos finitos considerar casos donde la matriz de amortiguamiento es proporcional a las matrices de masa y rigidez (Adhirkari 2006), es decir:

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} \quad + \quad \beta\mathbf{K} \tag{3.039}$$

Entonces la ecuación de movimiento es

$$\mathbf{M}\ddot{\hat{\mathbf{p}}}(t) \quad + \quad \mathbf{C}\dot{\hat{\mathbf{p}}}(t) + \quad \mathbf{K}\hat{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{f}(t) \tag{3.040}$$

En el dominio de la frecuencia

$$[-\omega^2\mathbf{M} \quad + \quad j\omega\mathbf{C} + \quad \mathbf{K}]\mathbf{P}(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \tag{3.041}$$

Al utilizar la matriz modal del problema no amortiguado podemos diagonalizar la matriz de amortiguamiento viscoso

$$\mathbf{\Phi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Phi} = \alpha\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi} \quad + \quad \beta\mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Xi} = diag(2\omega_i\xi_i) \tag{3.042}$$

Donde ξ_i es el factor de amortiguamiento modal, entonces al incorporar la transformación a coordenadas principales dadas por

$$\mathbf{P}(\omega) = \mathbf{\Phi}\mathbf{Q}(\omega) \tag{3.043}$$

Reemplazamos

$$[-\omega^2\mathbf{M} \quad + \quad j\omega\mathbf{C} + \quad \mathbf{K}]\mathbf{\Phi}\mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \tag{3.044}$$

Multiplicamos por la transpuesta de la matriz modal

$$\mathbf{\Phi}^T[-\omega^2\mathbf{M} \quad + \quad j\omega\mathbf{C} + \quad \mathbf{K}]\mathbf{\Phi}\mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{F}(\omega) \tag{3.045}$$

Distribuimos la multiplicación y utilizando las propiedades de disgonalización

$$[-\omega^2\mathbf{I} \quad + \quad j\omega\mathbf{\Xi} + \quad \mathbf{\Sigma}]\mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{F}(\omega) \tag{3.046}$$

Podemos invertir una de las matrices

$$\mathbf{Q}(\omega) = [-\omega^2\mathbf{I} \quad + \quad j\omega\mathbf{\Xi} + \quad \mathbf{\Sigma}]^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{F}(\omega) \tag{3.047}$$

Multiplicamos por la matriz modal obtenemos la solución en el dominio de la frecuencia para la presión sonora

$$\mathbf{P}(\omega) = \mathbf{\Phi}\mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{\Phi}[-\omega^2\mathbf{I} \quad + \quad j\omega\mathbf{\Xi} + \quad \mathbf{\Sigma}]^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{F}(\omega) \tag{3.048}$$

La matriz de receptancia es:

$$\boldsymbol{\alpha}(\omega) = \mathbf{\Phi}[-\omega^2\mathbf{I} \quad + \quad j\omega\mathbf{\Xi} + \quad \mathbf{\Sigma}]^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{F}(\omega) \tag{3.049}$$

Cada elemento de la receptancia es de la forma

$$\alpha_{rs}(\omega) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\phi_{ri}\phi_{si}}{-\omega^2 + \omega_i^2 + j2\omega\omega_i\xi_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_{rs}^i}{-\omega^2 + \omega_i^2 + j2\omega\omega_i\xi_i} \tag{3.050}$$

5.6. RESPUESTA FORZADA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA: AMORTIGUAMIENTO VISCOSO NO PROPORCIONAL

En general en sistemas acústicos no es muy común encontrar procesos donde el amortiguamiento sea proporcional, como resultado la ecuación de movimiento nos lleva a un problema de valores propios cuadrático, como puede ver en las siguientes ecuaciones. Las primeras corresponden a la ecuación de movimiento y la solución propuesta.

$$\mathbf{M}\ddot{\widehat{\mathbf{p}}}(t) \quad + \quad \mathbf{C}\dot{\widehat{\mathbf{p}}}(t) + \quad \mathbf{K}\widehat{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{f}(t) \tag{3.051}$$

$$\widehat{\mathbf{p}}(t) = \widehat{\boldsymbol{\Phi}}e^{st} \tag{3.052}$$

Las segundas muestran la ecuación homogénea y el problema de valores propios cuadrático asociado.

$$\mathbf{M}\ddot{\widehat{\mathbf{p}}}(t) \quad + \quad \mathbf{C}\dot{\widehat{\mathbf{p}}}(t) + \quad \mathbf{K}\widehat{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{0} \tag{3.053}$$

$$[s^2\mathbf{M} \quad + \quad s\mathbf{C} + \quad \mathbf{K}]\widehat{\boldsymbol{\Phi}}e^{st} = 0 \tag{3.054}$$

Si bien el problema de valores propios cuadráticos podría en teoría ser abordable, se recomienda plantear las ecuaciones de movimiento en espacio de estado, de esta manera se puede convertir el problema de valores propios de segundo grado en uno de tipo lineal. Definimos el vector de estado de orden $(2N \times 1)$ y reordenamos la ecuación como

$$\mathbf{v}(t) = [\widehat{\mathbf{p}}(t) \quad \dot{\widehat{\mathbf{p}}}(t)]^T \tag{3.055}$$

$$[\mathbf{C} \quad \mathbf{M}]\dot{\mathbf{v}}(t) + [\mathbf{K} \quad \mathbf{0}]\mathbf{v}(t) = \mathbf{f}(t) \tag{3.056}$$

Usamos la identidad

$$[\mathbf{M} \quad \mathbf{0}]\dot{\mathbf{v}}(t) + [\mathbf{0} \quad -\mathbf{M}]\mathbf{v}(t) = \mathbf{0} \tag{3.057}$$

Las juntamos y obtenemos la ecuación en espacio de estado e orden (2N X 2N)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\dot{\mathbf{v}}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix}\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{3.058}$$

El problema de forma homogénea es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\dot{\mathbf{v}}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix}\mathbf{v}(\mathrm{t}) = \mathbf{0} \tag{3.059}$$

O bien de forma compacta

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{v}(t) = \mathbf{0} \tag{3.060}$$

Podemos asumir la solución de la forma

$$\mathbf{v}(t) = \widehat{\boldsymbol{\theta}}e^{st} \tag{3.061}$$

Donde

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Phi}} \\ s\widehat{\boldsymbol{\Phi}} \end{bmatrix} \tag{3.062}$$

Reemplazando tenemos

$$[s\mathbf{A} + \mathbf{B}]\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \tag{3.063}$$

Los vectores propios poseen la siguiente propiedad

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_i^T \boldsymbol{A} \widehat{\boldsymbol{\theta}}_i = a_i \qquad \widehat{\boldsymbol{\theta}}_i^T \mathbf{B} \widehat{\boldsymbol{\theta}}_i = b_i \qquad \frac{b_i}{a_i} = s_i \tag{3.064}$$

Estos pueden ser normalizados y cumplen con ser ortogonales

$$\boldsymbol{\theta}_i = \frac{\widehat{\boldsymbol{\theta}}_i}{\sqrt{a_i}} \tag{3.065}$$

$$\boldsymbol{\theta}_i^T \mathbf{A} \boldsymbol{\theta}_i = 1 \qquad \boldsymbol{\theta}_i^T \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}_i = s_i \tag{3.066}$$

$$\boldsymbol{\theta}_i^T \mathbf{A} \boldsymbol{\theta}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad \boldsymbol{\theta}_i^T \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}_j = \begin{cases} s_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{3.067}$$

La matriz modal en este caso es

$$\boldsymbol{\Theta} = [\boldsymbol{\theta}_1 \quad \boldsymbol{\theta}_2 \quad \boldsymbol{\theta}_3 \cdots \quad \boldsymbol{\theta}_{2N-1} \quad \boldsymbol{\theta}_{2N}] \tag{3.068}$$

Los valores propios y vectores propios corresponden a pares conjugados, es decir

$$s_i = s_{N+i}^* \qquad \boldsymbol{\theta}_i = \boldsymbol{\theta}_{N+i}^* \tag{3.069}$$

La receptancia entonces se puede expresar como

$$\alpha_{rs}(\omega) = \sum_{i=1}^{2N} \frac{\theta_{ri}\theta_{si}}{\delta_i + j(\omega - \upsilon_i)} = \sum_{i=1}^{2N} \frac{A_{rs}^i}{\delta_i + j(\omega - \upsilon_i)} \tag{3.070}$$

$$\delta_i = \Re\{s_i\} \qquad \upsilon_i = \Im\{s_i\} \tag{3.071}$$

Específicamente las partes real e imaginaria de los valores propios se relacionan con las frecuencias naturales y los factores de amortiguamiento modal de la siguiente forma

$$\delta_i = \omega_i \xi_i \qquad \upsilon_i = \omega_i \sqrt{1 - (\xi_i)^2} \tag{3.072}$$

Reemplazando entonces y considerando los pares de complejos conjugados tenemos:

$$\alpha_{rs}(\omega) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\theta_{ri}\theta_{si}}{\omega_i \xi_i + j\left(\omega - \omega_i \sqrt{1 - (\xi_i)^2}\right)} + \frac{\theta^*{}_{ri}\theta^*{}_{si}}{\omega_i \xi_i + j\left(\omega + \omega_i \sqrt{1 - (\xi_i)^2}\right)} \tag{3.073}$$

$$\alpha_{rs}(\omega) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_{rs}^i}{\omega_i \xi_i + j\left(\omega - \omega_i \sqrt{1 - (\xi_i)^2}\right)} + \frac{A_{rs}^{*i}}{\omega_i \xi_i + j\left(\omega + \omega_i \sqrt{1 - (\xi_i)^2}\right)} \tag{3.074}$$

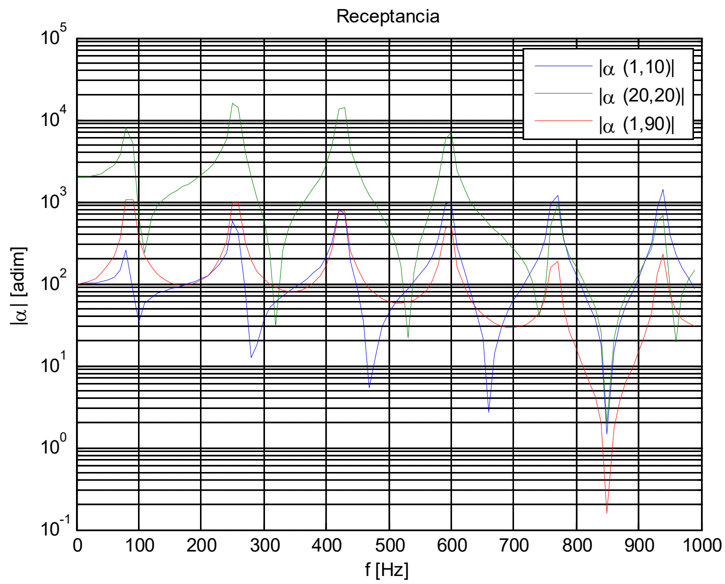

Figura 5.2. Receptancias Tubo Cerrado en un extremo – 100 elementos

5.7. RESPUESTA FORZADA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA: AMORTIGUAMIENTO HISTERÉTICO

Los fenómenos asociados con este tipo de amortiguamiento son comunes de observar en sistemas sólidos vibratorios en este caso la ecuación de movimiento escrita en el dominio de la frecuencia. En este caso $U(\omega)$ corresponde al vector de desplazamiento del sistema. (Nashif. et. al.. 1985)
Es interesante considerar este caso debido a que más adelante se tratará la interacción de sistemas acústicos con estructuras sólidas vibratorias.

$$[-\omega^2\mathbf{M} \quad + \quad j\omega\mathbf{C} + \quad \mathbf{K}]\mathbf{U}_s(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \tag{3.075}$$

Donde la matriz de amortiguamiento es de la forma

$$\mathbf{C}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)/\omega \tag{3.076}$$

Entonces reescribimos

$$[-\omega^2\mathbf{M} \quad + \quad j\mathbf{H}(\omega) + \quad \mathbf{K}]\mathbf{U}_s(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \tag{3.077}$$

Podemos definir la matriz de rigidez compleja de la forma

$$\bar{\mathbf{K}}(\omega) = \mathbf{K}(\omega) + j\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{K}(\omega)[\mathbf{I} + j\boldsymbol{\eta}(\omega)] \tag{3.078}$$

Donde

$$\boldsymbol{\eta}(\omega) = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{H}(\omega) \tag{3.079}$$

Re escribimos la ecuación de movimiento

$$[-\omega^2\mathbf{M} \quad + \quad \bar{\mathbf{K}}(\omega)]\mathbf{U}_s(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \tag{3.080}$$

El problema de valores propios es de la forma

$$[s\mathbf{M} \quad + \quad \tilde{\mathbf{K}}(\omega)]\hat{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{0} \tag{3.081}$$

Considerando los procesos de normalización a la matriz de masa visto en secciones anteriores y la definición de matriz modal, que también ha sido tratada en este capítulo, podemos ver que los valores propios son de la forma

$$s_i = \omega_i^2 + j\eta_i\omega_i^2 \qquad\qquad \omega_i^2 = \Re\{s_i\} \qquad\qquad \eta_i\omega_i^2 = \Im\{s_i\} \tag{3.082}$$

La matriz ortonomalzada modal cumple con las siguientes ecuaciones

$$\boldsymbol{\Phi}\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I} \qquad\qquad \boldsymbol{\Phi}\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Sigma} = diag(s_i) = diag(\omega_i^2 + j\eta_i\omega_i^2) \tag{3.083}$$

Esta matriz puede ser usada para generar el siguiente cambio de coordenadas

$$\mathbf{U}_S(\omega) = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{Q}(\omega) \tag{3.084}$$

Reemplazamos en la ecuación de movimiento

$$[-\omega^2\mathbf{M} \quad + \quad \mathbf{K}(\omega)]\boldsymbol{\Phi}\mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \tag{3.085}$$

Multiplicamos por la transpuesta de la matriz modal

$$\boldsymbol{\Phi}^T[-\omega^2\mathbf{M} \quad + \quad \mathbf{K}(\omega)]\boldsymbol{\Phi}\mathbf{Q}(\omega) = \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{F}(\omega) \tag{3.086}$$

Distribuimos la multiplicación y utilizando las propiedades de diagonalización

$$[-\omega^2\mathbf{I} \quad + \quad \boldsymbol{\Sigma}]\boldsymbol{Q}(\omega) = \boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{F}(\omega) \tag{3.087}$$

Podemos invertir una de las matrices

$$\mathbf{Q}(\omega) = [-\omega^2\mathbf{I} \quad + \quad \boldsymbol{\Sigma}]^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{F}(\omega) \tag{3.088}$$

Multiplicamos por la matriz modal obtenemos la solución en el dominio de la frecuencia para el desplazamiento

$$\mathbf{U}_{\boldsymbol{s}}(\omega) = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{Q}(\omega) = \boldsymbol{\Phi}[-\omega^2\mathbf{I} \quad + \quad \boldsymbol{\Sigma}]^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{F}(\omega) \tag{3.089}$$

La matriz de receptancia es:

$$\boldsymbol{\alpha}(\omega) = \boldsymbol{\Phi}[-\omega^2\mathbf{I} \quad + \quad \boldsymbol{\Sigma}]^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T \tag{3.090}$$

Cada elemento de la receptancia es de la forma

$$\alpha_{rs}(\omega) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\varphi_{ri}\varphi_{si}}{-\omega^2 + \omega_i^2 + j\eta_i\omega_i^2} = \sum_{i=1}^{N}\frac{A_{rs}^i}{-\omega^2 + \omega_i^2 + j\eta_i\omega_i^2} \tag{3.091}$$

5.8. *RESPUESTA FORZADA EN EL DOMINIO DEL TIEMPO: ANALISIS ARMÓNICO*

En este caso nos concentraremos en la solución del sistema de ecuaciones bajo condiciones estacionarias cuando inicialmente es excitado por una fuerza que posee una sola frecuencia y como este resultado se puede extender cuando la forma de onda es compleja

$$\mathbf{M}\ddot{\hat{\mathbf{p}}}(t) \quad + \quad \mathbf{C}\dot{\hat{\mathbf{p}}}(t) \quad + \quad \mathbf{K}\hat{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{f}e^{j\omega t} \tag{3.092}$$

La solución propuesta es de la forma, donde la incognita es un vector de coeficientes a determinar

$$\hat{\boldsymbol{p}}(t) = \hat{\mathbf{p}}e^{j\omega t} \tag{3.093}$$

Al reemplazar

$$[-\omega^2\mathbf{M} \quad + \quad j\omega\mathbf{C} \quad + \quad \mathbf{K}]\hat{\mathbf{p}}e^{j\omega t} = \mathbf{f}e^{j\omega t} \tag{3.094}$$

Al simplificar y resolver podríamos formalmente decir que el vector de la presión sonora es

$$\hat{\mathbf{p}} = [-\omega^2\mathbf{M} \quad + \quad j\omega\mathbf{C} \quad + \quad \mathbf{K}]^{-1}\mathbf{f} \tag{3.095}$$

Sin embargo el proceso de invertir dicha matriz es demasiado constoso. Repensemos el problema de la siguiente forma, separando parte real e imaginaria de la matriz a invertir

$$\mathbf{A}_R = [-\omega^2\mathbf{M} \quad + \quad \mathbf{K}] \qquad\qquad \mathbf{A}_I = \omega\mathbf{C} \tag{3.096}$$

Entonces

$$[\mathbf{A}_R + j\mathbf{A}_I]^{-1} = [\mathbf{B}_R + j\mathbf{B}_I] \tag{3.097}$$

Entonces

$$[\mathbf{A}_R + j\mathbf{A}_I][\mathbf{B}_R + j\mathbf{B}_I] = \mathbf{I} \tag{3.098}$$

$$\begin{gathered}[\mathbf{A}_R\mathbf{B}_R - \mathbf{A}_I\mathbf{B}_I] = \mathbf{I}\\ [\mathbf{A}_R\mathbf{B}_i + \mathbf{A}_I\mathbf{B}_R] = \mathbf{0}\end{gathered} \tag{3.099}$$

Despejamos de la segunda ecuación

$$\mathbf{B}_R = -\mathbf{A}_I^{-1}\mathbf{A}_R\mathbf{B}_i \tag{3.100}$$

Reemplazamos en la primera ecuación y obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_R &= \mathbf{A}_I^{-1}\mathbf{A}_R[\mathbf{A}_I - \mathbf{A}_R\mathbf{A}_I^{-1}\mathbf{A}_R]^{-1}\\ \mathbf{B}_i &= [\mathbf{A}_I - \mathbf{A}_R\mathbf{A}_I^{-1}\mathbf{A}_R]^{-1}\end{aligned} \tag{3.101}$$

Entonces el vector de coeficientes asociado a la presión sonora es dado por la siguiente ecuación, constituyéndose en un proceso mucho más estable desde la perspectiva numérica y que fue usado para resolver problemas como los mostrados en el capítulo anterior.

$$\hat{\mathbf{p}} = [\mathbf{B}_R + j\mathbf{B}_I]\mathbf{f} \tag{3.102}$$

Por supuesto si la fuerza es periódica de período T, se puede expresar como

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t \pm rT) \tag{3.103}$$

Por lo tanto se puede aproximar por una serie de Fourier

$$\mathbf{f}(t) \approx \sum_{r=-R}^{R} \mathbf{F}_{\boldsymbol{r}} e^{j\omega_r t} \tag{3.104}$$

Donde

$$\omega_r = \frac{2\pi r}{T} \tag{3.105}$$

$$\mathbf{F}_{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{f}(t)\, e^{j\omega_r t} \tag{3.106}$$

Resolviendo frecuencia a frecuencia y generando la superposición final podemos construir la solución. Es decir, resolvemos por el método anteriormente mostrado para cada ecuación de la forma

$$\mathbf{M}\ddot{\widehat{\mathbf{p}}}_r(t) \quad + \quad \mathbf{C}\dot{\widehat{\mathbf{p}}}_r(t) \quad + \quad \mathbf{K}\widehat{\mathbf{p}}_r(t) = \mathbf{F}_r e^{j\omega_r t} \tag{3.107}$$

Y la solución final es construida mediante la aproximación:

$$\widehat{\mathbf{p}}(t) \approx \sum_{r=-R}^{R} \widehat{\mathbf{p}}_{\boldsymbol{r}} e^{j\omega_r t} \tag{3.108}$$

5.9. RESPUESTA FORZADA EN EL DOMINIO DEL TIEMPO: TRANSIENTES – MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS CENTRALES

Consideraremos una adecuada discretización del tiempo considerando Δt como un intervalo de muestreo

$$t = n\Delta t \qquad n = 0,1,2,3 \ldots \tag{3.109}$$

Podemos aproximar las derivadas del tiempo de la forma

$$\dot{\widehat{\mathbf{p}}} \approx \frac{1}{2\Delta t}(\widehat{\mathbf{p}}_{n+1} - \widehat{\mathbf{p}}_{n-1}) \tag{3.110}$$

$$\ddot{\widehat{\mathbf{p}}} \approx \frac{1}{(\Delta t)^2}(\widehat{\mathbf{p}}_{n+1} - 2\widehat{\mathbf{p}}_n + \widehat{\mathbf{p}}_{\boldsymbol{n-1}}) \tag{3.111}$$

Entonces a partir de la ecuación diferencial y sus condiciones iniciales

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}\ddot{\widehat{\mathbf{p}}}(t) \quad + \quad \mathbf{C}\dot{\widehat{\mathbf{p}}}(t) \quad + \quad \mathbf{K}\widehat{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{f}(t) \\ &\widehat{\mathbf{p}}(0) = \widehat{\mathbf{p}}_0 \\ &\dot{\widehat{\mathbf{p}}}(0) = \dot{\widehat{\mathbf{p}}}_0 \end{aligned} \tag{3.112}$$

Se puede construir la solución usando el siguiente método. Primero se determinará la aceleración inicial, es decir $n = 0$, usando

$$\mathbf{M}\ddot{\hat{\mathbf{p}}}_0 = \mathbf{f}(t) - \mathbf{C}\dot{\hat{\mathbf{p}}}_0 \quad - \quad \mathbf{K}\hat{\mathbf{p}}_0 \tag{3.113}$$

$$\ddot{\hat{\mathbf{p}}}_0 = \mathbf{M}^{-1}\left[\mathbf{f}(t) - \mathbf{C}\dot{\hat{\mathbf{p}}}_0 \quad - \quad \mathbf{K}\hat{\mathbf{p}}_0\right] \tag{3.114}$$

Calculamos para $n = 1$

$$\ddot{\hat{\mathbf{p}}}_1 = \hat{\mathbf{p}}_0 + \Delta t\dot{\hat{\mathbf{p}}}_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{\hat{\mathbf{p}}}_0 \tag{3.115}$$

Para obtener la solución tenemos que resolver la siguiente ecuación para $n = 1,2,3,\ldots$

$$\left[\frac{1}{(\Delta t)^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta \mathrm{t}}\mathbf{C}\right]\hat{\mathbf{p}}_{n+1} = \mathbf{f}_n + \left[\frac{2}{(\Delta t)^2}\mathbf{M} - \mathbf{K}\right]\hat{\mathbf{p}}_n + \left[\frac{1}{(\Delta t)^2}\mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right]\hat{\mathbf{p}}_{n-1} \tag{3.116}$$

Es decir

$$\hat{\mathbf{p}}_{n+1} = \left[\frac{1}{(\Delta t)^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right]^{-1}\left\{\mathbf{f}_n + \left[\frac{2}{(\Delta t)^2}\mathbf{M} - \mathbf{K}\right]\hat{\boldsymbol{p}}_n + \left[\frac{1}{(\Delta t)^2}\mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right]\hat{\mathbf{p}}_{n-1}\right\} \tag{3.117}$$

Este método es válido si

$$\begin{aligned} \Delta t\omega_{Nmax} &< \frac{\pi}{10} \\ \Delta t f_{Nmax} &< \frac{1}{20} \end{aligned} \tag{3.118}$$

Donde f_{Nmax} es la frecuencia de resonancia más alta incluida en el análisis (Bathe, 1996). Sin embargo, se debe ser cuidadoso al utilizar este método puesto que la respuesta calculada puede ser inestable

5.10. *RESPUESTA FORZADA EN EL DOMINIO DEL TIEMPO: TRANSIENTES – MÉTODO NEWMARK*

Igual que en caso anterior el objetivo es poder resolver de manera aproximada el sistema de ecuaciones diferenciales de manera eficiente. Sin embargo, en esta situación el método de Newmark presenta la principal ventaja de que es mucho más estable numéricamente hablando que el método de diferencias centrales.

$$\ddot{\hat{\mathbf{p}}}_0 = \mathbf{M}^{-1}\left[\mathbf{f}(t) - \mathbf{C}\dot{\hat{\mathbf{p}}}_0 \quad - \quad \mathbf{K}\hat{\mathbf{p}}_0 + \mathbf{f}(t)\right] \tag{3.119}$$

Para obtener la solución tenemos que resolver la siguiente ecuación para $n = 1,2,3,\ldots$

$$\begin{gathered} [a_1\mathbf{M} \quad + \quad a_2\mathbf{C} \quad + \quad \mathbf{K}]\hat{\mathbf{p}}_{n+1} = \\ \mathbf{f}_n(t) \quad + \quad [a_1\mathbf{M} \quad + \quad a_2\mathbf{C}]\hat{\mathbf{p}}_n \quad + [a_3\mathbf{M} \quad - \quad a_4\mathbf{C}]\dot{\hat{\mathbf{p}}}_n \\ + \quad [a_5\mathbf{M} \quad + \quad a_6\mathbf{C}]\ddot{\hat{\mathbf{p}}}_n \end{gathered} \tag{3.120}$$

Donde se debe calcular, además

$$\ddot{\hat{\mathbf{p}}}_{n+1} = a_1[\hat{\mathbf{p}}_{n+1} - \hat{\mathbf{p}}_n] - a_3\dot{\hat{\mathbf{p}}}_n - a_5\ddot{\hat{\boldsymbol{p}}}_n \quad (3.121)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}}_{n+1} = a_2[\hat{\mathbf{p}}_{n+1} - \hat{\mathbf{p}}_n] + a_4\dot{\hat{\mathbf{p}}}_n + a_6\ddot{\hat{\mathbf{p}}}_n \quad (3.122)$$

Además, se debe tiene en cuenta que

$$\begin{array}{ll} a_1 = 1/\beta(\Delta t)^2 & a_2 = \gamma/\beta\Delta t \\ a_3 = 1/\beta\Delta t & a_4 = 1 - \gamma/\beta \\ a_5 = (1/2\beta) - 1 & a_5 = [1 - (\gamma/2\beta)]\Delta t \end{array} \quad (3.123)$$

El método es incondicionalmente estable si

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \qquad \beta \geq \frac{1}{4}\left(\gamma + \frac{1}{2}\right) \quad (3.124)$$

Se recomienda como en el caso anterior que la máxima frecuencia natural de interés en el análisis se relacione con el intervalo de tiempo de la forma

$$\begin{array}{l} \Delta t\omega_{Nmax} < \dfrac{\pi}{50} \\ \Delta t f_{Nmax} < \dfrac{1}{100} \end{array} \quad (3.125)$$

Donde f_{Nmax} es la frecuencia de resonancia más alta incluida en el análisis (Newmark, 1959).

5.11. BIBLIOGRAFIA

- Bathe, K..J., Finite Element Procedures, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.
- K. J. Bathe and E. L. Wilson, Numerical Methods in Finite Elements Analysis, . Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976
- Newmark, N. M., A method of computation for structural dynamics. J. Eng. Mech. Proc. ASCE 85, 67–94, 1959.
- Petyt, M., Introduction to the Finite Element Vibration Analysis (2nd Edition), Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- Wilkinson, J., H., The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford University Press, Inc. New York, 1988
- Adhirkari, S., Damping modelling using generalized proportional damping.. Sound Vibration293, 156–70, 2006.
- Nashif, A. D., Jones, D. I. G., Henderson, J. P., Vibration Damping, New York: John Wiley & Son, 1985.