# **ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN (EDO1)**

## DEFINICIÓN DE ECUACIÓN DIFERENCIAL

Definimos una ecuación diferencial como aquella ecuación cuya incógnita es una función que depende en una primera instancia, del tiempo, y la relación entre las distintas variables es expresada a partir de las derivadas

En una Ecuación Algebraica, el objetivo es determinar el valor de , que es un número real o complejo, tal que se cumpla la igualdad

Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) Lineal de orden es:

Donde es el orden de la ecuación y es la derivada más alta. Una Ecuación Diferencial Ordinaria no Lineal es expresada por ejemplo como:

## ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN DE VARIABLES SEPARABLES

Una ecuación diferencial lineal de primer orden puede ser expresada como

Siempre y cuando podemos decir que

Cuando en un no existe solución en ese intervalo, como ejemplo la solución es válida para todo , exceptuando

Se recomienda siempre antes de aplicar cualquier método de resolución dejar la ecuación en su forma estándar

Una EDO1 de variables separables es

Una EDO1 NO de variables separables es

### Método de Resolución Analítica

* EDO1 Variables separables: En forma general este tipo de ecuaciones podemos expresarlas como
* Condición inicial: Todas las ecuaciones deben tener una condición inicial, la cual puede ser expresada de manera directa e indirecta

Podemos volver a la ecuación y reordenarla

Separamos

Integramos

Usando la función inversa

Donde depende de las condiciones iniciales

## Ejemplo

En este caso la solución no es válida para y debemos tener también cuidado con

Usamos antilogaritmo, es decir la fusión exponencial

Tenemos en este momento infinitos resultados para distintos valores de



## Ejemplo

Aplicamos la condición inicial

Finalmente, la solución es

El signo menos se debe a que debe cumplir



## Ejemplo

Ordenamos

Vemos que esta ecuación tiene problemas para , continuemos mediante integración

Separaremos en fracciones parciales el primer integrando

Tenemos el sistema de ecuaciones

Entonces

Volvamos a las integrales

Usamos la función exponencial

Podemos despejar la función

## Ejemplo

Simplificamos

Integramos

En este caso no podemos determinar la función en forma explícita. Pero si aplicáramos una condición inicial tal como

## ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN

Una ecuación diferencial lineal de primer orden puede ser expresada como

Siempre y cuando podemos decir que

Cuando en un no existe solución en ese intervalo, como ejemplo la solución es válida para todo , exceptuando . Similarmente al caso anterior podemos utilizar la metodología aprendida. Presentaremos una propuesta de solución compuesta en dos partes, la primera llamada, solución complementaria y la segunda es la solución particular

La solución complementaria es aquella asociada a la ecuación homogénea, mientras que la segunda es parte de la ecuación no homogénea

Si unimos ambas llegamos a

## Método de Resolución

Primero resolvemos la ecuación asociada la solución homogénea

Como es de variables separables

Integramos

Segundo proponemos una solución particular de la forma

Donde es la solución complementaria , también llamada homogénea, cuando la constante

Usaremos la forma compacta en la ecuación

Factorizamos por

Como es parte de la solución complenetaria

Separamos

Integramos

Retomamos la solución particular

La solución general es

## Ejemplo

Obviamente esta ecuación no tiene solución para . Debemos dejarla en su forma canónica

Donde

Resolvemos la ecuación homogénea y determinamos la solución complementaria

Por lo tanto , entonces la función

La solución particular es

La solución es

## Ejemplo

Este ejemplo considera condición inicial, la solución homogénea

Aplicamos la condición inicial

Finalmente

Comparemos los gráficos









## Ejemplo

Ordenamos

Ordenamos

Vamos a la solución complementaria

## ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN EXACTA

Consideremos la ecuación diferencial de primer orden de la forma

Ordenamos

Indirectamente podemos observar una función

Que satisface esta igualdad. Reescribimos

Entonces una ecuación de primer orden puede ser reformulada como una Ecuación Diferencial de Primer Orden Exacta

Supongamos esta ecuación diferencial de primer orden no lineal

Puede ser transformada en

### Condición Para Resolución

Si tenemos una Ecuación Diferencial Exacta

Esta tendrá solución analítica si se cumple

Porque

### Método de Solución 1

Paso 1: comprobar si se cumple la igualdad

Paso 2: entonces como se cumple esta expresión podemos integrar respecto a

Paso 3: derivamos respecto a la variable y además igualamos a

Paso 4: la función se calcula como

## Ejemplo

Comprobamos la igualdad

Integramos

Finalmente

Podemos despejar la variable

Donde depende de las condiciones inciales



### Método de Solución 2

Paso 1: comprobar si se cumple la igualdad

Paso 2: entonces como se cumple esta expresión podemos integrar respecto a

Paso 3: derivamos respecto a la variable y además igualamos a

## Ejemplo

Se debe comprobar la igualdad

Por lo tanto

Donde C depende de las condiciones iniciales. Si bien no hay una solución analítica para podemos estudiar el comportamiento de



## ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN EXACTA: MÉTODO DEL FACTOR INTEGRANTE

Muchas ecuaciones de este tipo no tienen solución analítica, pero un cierto grupo menor, puede ser resuelta mediante la construcción de un factor de integración

Pero la condición no se cumple

En algunas situaciones se puede encontrar un factor de integración, es decir donde al ser integrado en la ecuación entonces

Y en esta situación

Para propósitos prácticos rescribimos la ecuación anterior como

Podemos arreglar

## Primer Caso

Podemos suponer entonces . Entonces tenemos la ecuación diferencial de primer orden de variables separables

Para que esto resulte el integrando debe ser una función exclusiva de la variable

## Primer Caso

Tomando un razonamiento similar tenemos que el factor integrante entonces .

Entonces tenemos la ecuación diferencial de primer orden de variables separables

Para que esto resulte el integrando debe ser una función exclusiva de la variable

## Ejemplo

Comprobamos si se cumple

Como vemos no son iguales, y se recomienda siempre antes de elegir el factor integrante realizar las siguientes operaciones

Podemos ver que esta situación no es recomendable, tomemos la segunda alternativa

Integramos

Volvemos a la ecuación

Multiplicamos por

Comprobamos la efectividad del factor integrante

Se cumple

Entonces procederemos

Derivamos

A fin de determinar la(s) función(es) se debe resolver la ecuación algebraica

## ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN: MÉTODO EULER

Como hemos dicho anteriormente no todas las ecuaciones diferenciales tienen solución analítica, es decir que al final de un proceso basado en el análisis matemático encontramos una fórmula que nos permite resolver el problema. Partamos de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden homogénea que posee solución analítica, con el objetivo de pensar acerca del problema

Esta ecuación diferencial de primer orden de variables separables con condiciones iniciales nos permitirá efectuar una reflexión de lo que significa una ecuación diferencial. Resolvanmos

Integramos

Usamos la condición inicial

Finalmente

Podemos pensar en la ecuación diferencial como

Pensemos en el siguiente resultado usando la condición inicial , es decir cuando

Pensemos en el siguiente resultado usando la condición inicial , es decir cuando

Si realizamos para este proceso para cada punto del plano obtenemos el Campo Direccional de la ecuación diferencial de primer orden. Este corresponde a todos los vectores (flechas) condiciones iniciales posibles a partir, en nuestro ejemplo de la ecuación



Todos los puntos de los vectores, las “bases de las flechas” flechas se ubican en todas las posibles combinaciones de condiciones iniciales y los vectores tienen componentes dadas por la siguiente expresión

Esto nos puede dar una idea de solución aproximada a la solución de la ecuación diferencial con condición inicial

La cual es siga las flechas desde la condición inicial como muestra la figura



Consideremos una ecuación diferencial de primer orden genérica, no lineal con su condición inicial

O bien

En forma más general, podemos escribir la ecuación diferencial ordinaria de primer orden no lineal con su condición inicial

Donde . El punto es poder determinar un método numérico de forma intuitiva que nos permita obtener una solución aproximada, este es la idea principal del método de Euler



Podemos pensar que tenemos una recta tangente que nos da un valor aproximado cuando

Pero recordemos

Aproximamos , donde con la recta tangente

Remplazamos

Podemos extender a una fórmula genérica para una solución numérica y aproximada

En nuestro caso

acomodamos



%valores inciales

tini = 0;

tfin = 3;

y0 = 1;

t0 = tini;

%incremento

deltat = 1/10;

%valores de tn por prelocalización

tn = tini:deltat:tfin; %valores de t

Nn = length(tn); %tamanho de t

yn = zeros(1,Nn); %incialmente lleno de ceros

yn(1) = y0; %condicion incial

%solucion

for n = 1:Nn-1

 fty = -2\*yn(n)\*tn(n);

 yn(n+1) = yn(n) + fty\*deltat;

end;

