1. **TRANSFORMADA DE LAPLACE** 
   1. DEFINICIÓN

Se define la transformada de Laplace para una función como la integral

Para que esta integral impropia se requiere que se cumplan para valores de , y tales que

Es decir que la función debe ser de Orden Exponencial

Ejemplo

Ejemplo

Resolvemos por partes donde y

Mediante el método de inducción se puede demostrar que

Lo cual queda de tarea

Ejemplo

Queda de tarea demostrar que

Por otra parte, podemos hacer otro ejemplo

No definiremos la transformada inversa, esto es porque en realidad la variable ., esto requiere que se dicte de forma previa un curso de cálculo en el dominio de los números complejos. Podemos eso sí intuir que la Transformada de Fourier es un caso especial de la transformada de Laplace

Se puede considerar la variable y por lo tanto cuando la Transformada de Laplace coincide con la Transformada de Fourier. Sin embargo, por ser un tema que está más allá de los contenidos de este curso, no entraremos en un método analítico para calcular la trasformada inversa y presentaremos un método de carácter práctico.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

* 1. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE UNA DERIVADA

Calcularemos la transformada de Laplace de una función derivada

Usaremos la integración por partes donde y

Calcularemos ahora la Transformada de Laplace de la segunda derivada de una función

Usamos entonces integración por partes donde y

Entonces podemos demostrar mediante inducción que la transformada de la enésima derivada de una función es

Ejemplo

Usamos la transformada de Laplace

Despejamos y factorizamos

Para determinar la transformada inversa debemos simplificar estas expresiones mediante el uso de fracciones parciales

Sistema de ecuaciones

Entonces

Usamos las tablas para transformada inversa

La solución complementaria de la ecuación homogénea es

Y la solución particular es asociada a

* 1. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE UNA FUNCIÓN MULTIPLICADA POR

Determinaremos la transformada de una función multiplicada por mediante un simple cambio de variable llamamos

Usamos las propiedades

Factorizamos y ordenamos

Para el primer término usamos la propiedad que fue mencionada al inicio de este apartado

Usamos fracciones parciales para el otro término

* 1. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE FUNCION MULTIPLICADA POR

La función escalón unitario o función de Heaviside

## Caso 1

## Caso 2

Ejemplo caso 1

Ejemplo caso 2

Resolvamos

Separamos las fracciones parciales

Usamos la inversa de las transformadas y las respectivas propiedades

Otro ejemplo

Concentrémonos en la fracción parcial

Usando las propiedades de la Transformada de Laplace

* 1. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE FUNCION MULTIPLICADA POR

Consideremos la derivada de la Transformada de Laplace derivada con respecto a la variable

Como la integral y la derivada son operadores lineales se pueden intercambiar

Podemos concluir que

Si calculamos la segunda derivada

Por lo tanto

Podemos extrapolar que

Realicemos el ejemplo

Inicialmente se ve que la fracción parcial no es alcanzable de forma fácil, pero pensemos en la derivada de

Comparamos con lo anterior, vemos que se parece pero que hay que ajustar algunos factores

Por lo tanto

Cuando consideramos esto como un sistema oscilatorio masa resorte sin amortiguamiento

La frecuencia de resonancia es igual a la frecuencia de la fuerza impulsora y es esperable una solución que crece hasta el infinito

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

* 1. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE UNA INTEGRAL

Si tenemos una función que es integrada de la forma

Su Transformada de Laplace es

Por otro lado, si se define la convolución de funciones (operador \*)

Se puede interpretar como la respuesta en el dominio del tiempo de un sistema donde es la entrada, es la salida y es la llamada función de respuesta de impulso, la cual caracteriza al sistema físico. Cuando se realiza la Transforma da de Laplace de una convolución

Donde se cono ce como Función de Transferencia. Si el sistema es estable y recordando que la variable de Laplace es un número complejo , cuando la función de transferencia se evalúa en el eje imaginario tenemos la Función Respuesta de Frecuencia

Y entonces tenemos una relación entre la Transformada de Laplace, la Transformada de Fourier y la respectiva Serie de Fourier que hemos visto hasta el momento