Los Números reales

Necesitamos trabajar con un conjunto de números de manera precisa, que no permita ambigüedades, razón que tomaremos los números reales en forma axiomática, pués toda disciplina matemática debe basarse, en última instancia, en ciertos objetos no definidos y ciertas proposiciones no demostradas esto significa un sistema axiomático.

Los axiomas son como las reglas de un juego, es decir, nos indican lo que aceptamos como verdadero y debemos respetar. De los axiomas se deducirán necesariamente ciertas propiedades que llamaremos teoremas

En una primera instancia recordaremos el conjunto de axiomas que definen a los números reales separados en tres grupos. El primer grupo lo constituyen los axiomas de campo, tema conocido en la E.M. y es lo que nos convoca en está inducción. Más adelante cuando trabajemos en el programa de la asignatura estudiaremos los otros dos grupos, que son los axiomas de orden y el axioma de plenitud

Axiomas de Campo o Cuerpo

Designaremos por $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales y dejaremos como concepto no definido el ser número real

Axioma 1.- Axioma de clausura

En $\mathbb{R}$ hay dos operaciones, llamadas adición y multiplicación, que denotamos por + y · respectivamente, En símbolos esto se resume así:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \exists! (a+b) \in \mathbb{R} \text{ y } \exists! a \cdot b \in \mathbb{R}$$

La palabra clausura nos indica que el resultado de sumar dos números reales debe quedar en el mismo conjunto $\mathbb{R}$. Cosa análoga ocurre para la multiplicación de dos números

Axioma 2.- Axiomas de Asociatividad

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, se tiene: $(a+b)+c = a+(b+c)$

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Axioma 3.- Axiomas de Conmutatividad

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ se tiene: $a+b = b+a$

$a \cdot b = b \cdot a$

Axioma 4.- Axioma de Distributividad

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ se tiene $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Axioma 5.- Axiomas de Neutros

Existen dos números reales, distintos entre sí, que designaremos por los símbolos 0 y 1 tales que para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene que: $a+0 = 0+a = a$

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

$\cdot = \times = *$

Axioma 6 : Axiomas de Inversos

$\forall a \in \mathbb{R}, \exists (-a) \in \mathbb{R}$ tq $a+(-a)=0$

$\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que: $a \cdot a^{-1} = 1$

Estos seis axiomas definen lo que se llama campo cuerpo y constituyen la base de toda la operatoria que estudiaremos posteriormente

Ejemplo.- Demuestre que: $-b+(a+b)=a$

Justificando cada paso, recordemos que tenemos ciertas reglas del juego previamente establecidas: los axiomas de campo o cuerpo, en consecuencia, fundamentaremos cada paso de la demostración, recurriendo a ellos

$$
\begin{aligned}
-b+(a+b) &= -b+(b+a) && \text{Ax. 3}\\
&= (-b+b)+a && \text{Ax. 2}\\
&= 0+a && \text{Ax. 6}\\
&= a && \text{Ax. 5}
\end{aligned}
$$

Definición 1.- Dado $a, b \in \mathbb{R}$, tenemos:

i) $a-b = a+(-b)$

ii) $\dfrac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$, siempre que $b \neq 0$

Propiedades de los números reales

Teorema 1.- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ se tiene:

i) $a+b = a+c \Rightarrow b=c$ (Ley de Cancelación para +)

ii) $a \cdot b = a \cdot c,\ a \neq 0 \Rightarrow b=c$ (Ley de Cancelación para ·)

6 Demuestre que $\forall a,b \in \mathbb{R}$, se tiene:

i) $a \cdot 0 = 0$ y ii) $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

(i) Nos expresa, que todo número multiplicado por cero da cero.
(ii) Expresa que en el conjunto $\mathbb{R}$ no hay divisores de cero, lo que significa que si un producto de dos factores es cero, por lo menos uno debe ser cero, su aplicación directa en la resolución de ecuaciones de grado superior a uno.

Dem (i) El axioma de neutros nos permite escribir:

$0 = 0 + 0$, luego

$a \cdot 0 = a(0+0)$

$a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$ Distributividad

$a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$ Neutro

$0 = a \cdot 0$ Ley de la cancelación para la adición.

Dem (ii) Si $a = 0 \Rightarrow$ no habría nada que demostrar, pues se estaría cumpliendo la tesis, pongamos entonces en el caso que $a \neq 0 \Rightarrow$ nos garantiza que existe a^{-1}, multipliquemos la igualdad de la hipótesis

$a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0$

$(a^{-1} a) \cdot b = 0$ Asoc. & (i) recién demostrado

$1 \cdot b = 0$ Inverso

$b = 0$ Neutro

$\therefore$ el caso $a \neq 0$, hemos concluido que b tiene que ser 0, esto completa la demostración

7.- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, se tiene:

i) $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ ii) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Este axioma, nos recuerda la regla de los signos para la multiplicación

Dem (i) por ejercicio 6, nos permite escribir:

$0 \cdot b = 0$

$[a + (-a)] \cdot b = 0$ Inversos

$a \cdot b + (-a) \cdot b = 0$ Distributividad

Sumando a ambos miembros de esta igualdad $-(a \cdot b)$ y asociando convenientemente, obtenemos

$[-(a \cdot b) + ab] + (-a) \cdot b = -(a \cdot b) + 0$

$0 + (-a) b = -(ab)$ Inverso

$(-a) \cdot b = -(ab)$ Neutro

Tarea, Demuestre: $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

Ayuda, parta de la igualdad $a \cdot 0 = 0$

Dem (ii) Del ejercicio 6, tenemos que $(-a) \cdot 0 = 0$

$\therefore$ $(-a) \cdot [b + (-b)] = 0$ Inverso

$(-a) b + (-a)(-b) = 0$ Distributividad

$-(ab) + (-a) \cdot (-b) = 0$ parte (i) // sumamos $a \cdot b$ y asoc.

$[a \cdot b - (a \cdot b)] + (-a)(-b) = a \cdot b + 0$

$0 + (-a)(-b) = ab$ Neutro e Inverso

$(-a)(-b) = ab$ Neutro

100

$(\mathbb{R},+,\cdot)$ es cuerpo, Demuestre los siguientes teoremas

(1) • es distributiva respecto a la suma

(2) $\forall a \in \mathbb{R}$, se tiene:

i) $-(-a) = a$ (El opuesto del opuesto de un número real es el mismo número)

ii) $(a^{-1})^{-1}$ (El inverso del inverso de un número real es el mismo número)

3) $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$ se tiene:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow b \cdot c = a \cdot d$$

4.- $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$ $b \neq 0$, $d \neq 0$ se tiene que

i) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + bc}{b \cdot d}$

ii) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

5.- $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} \qquad b \neq 0, d \neq 0$$

6.- idem. pero, cuáles son sus restricciones?

i) si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$

ii) si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

Demostraciones: $(\mathbb{R},+,\cdot)$ cuerpo

Demuestre los sgtes teoremas

(1) • es distributiva respecto a la suma

Dem: Basta demostrar la distributividad por la izquierda (o derecha) $b, d, f \neq 0$

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{cf + ed}{df}\right) \quad \text{suma en } \mathbb{R}$$

$$= \frac{a(cf + ed)}{b(df)}$$ producto en $\mathbb{R}$

$$= \frac{acf + ade}{dbf}$$ distrib y comm.

$$= \frac{b(acf + ade)}{b(dbf)}$$ | $1 = \frac{b}{b}$.

$$= \frac{acbf + bdae}{(bd)(bf)}$$ | conm y dist.

$$= \frac{ac\cancel{bf}}{(bd)\cancel{(bf)}} + \frac{\cancel{bd}ae}{\cancel{(bd)}(bf)}$$ | op. div

$$= \frac{ac}{bd} + \frac{ae}{bf}$$ ✓

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} + \frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}}$$ ✓

2.- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ cuerpo ✓

i) Pd: $-(-a) = a$

Sol: $a + (-a) = 0$ | inv | $+ \; -(-a)$

$[a + (-a)] + (-(-a)) = 0 + [-(-a)]$ | Axs

$a + \{ \underbrace{(-a) + (-(-a))} \} = -(-a)$ ojo ya trasponía parte

$a + 0 = -(-a)$

$a = -(-a)$ ✓✓

ii) $a = (a^{-1})^{-1}$ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ cuerpo o campo

Dem: $a \cdot a^{-1} = 1$ | Neutro $\cdot$ | $(a^{-1})^{-1}$

$(a \cdot a^{-1})(a^{-1})^{-1} = 1 \cdot (a^{-1})^{-1}$ | Asoc., Neutro

$a \cdot (a^{-1} \cdot (a^{-1})^{-1}) = (a^{-1})^{-1}$

$a \cdot 1 = (a^{-1})^{-1}$ inv

$a = (a^{-1})^{-1}$ ✓✓

3) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$ se tiene que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

$\Rightarrow$) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot b^{-1} = c \cdot d^{-1}$ $\left(\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}\right.$

$\Leftarrow$ $ab^{-1} = cd^{-1}$ / b

$(a \cdot b^{-1})b = (cd^{-1})b$ / Ax

$a \cdot (b^{-1} \cdot b) = c(d^{-1}b)$ / Ax

$a \cdot 1 = c(d^{-1} \cdot b)$ / Ax.

$a = (cb) \cdot d^{-1}$ / d

$ad = (c \cdot b)(d^{-1} \cdot d)$ Con y Ax..

$ad = bc \cdot (1)$

$ad = bc$ ✓✓

$\Leftarrow$ Pd: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$bc = ad$ / b^{-1} Asoc

$(b^{-1} \cdot b)c = (a \cdot b^{-1}) \cdot d$ / Prop.

$c = (a \cdot b^{-1})d$ / Neutro / d^{-1}

$c \cdot d^{-1} = (a \cdot b^{-1})(d \cdot d^{-1})$ / Asoc

$c \cdot d^{-1} = (a \cdot b^{-1}) \cdot (1)$ inv

$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ $\therefore$ Dem $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad = bc$ ✓

Demostrar que

$[(a+b) \neq 0 \wedge (ax+by=0 \wedge bx+ay=0)]$

$\Rightarrow (x+y=0)$

Hint: buscar $(a+b)(x+y)=0$ $\begin{cases} a \cdot b = 0 \\ a=0 \vee b=0 \end{cases}$

✓