GUIA N° 3 - ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

3. Un termómetro que marca 18°F se lleva a un cuarto cuya temperatura es de 70°F. Un minuto después la lectura del termómetro es 31°F. Determínese las temperaturas medidas como una función del tiempo y, en particular, encontrar la temperatura que marca el termómetro cinco minutos después de que se lleva al cuarto.
   SOL. $u = 70 - 52 \exp(-0.29t)$; cuando $t = 5$, $u = 58$.
4. Un termómetro que marca 75°F se lleva fuera donde la temperatura es de 20°F. Cuatro minutos después el termómetro marca 30°F. Encontrar: *a*) la lectura del termómetro siete minutos después de que éste ha sido llevado al exterior, y *b*) el tiempo que le toma al termómetro caer desde 75°F hasta más o menos medio grado con respecto a la temperatura del aire. SOL. *a*) 23°F. *b*) 11.5 min.
5. A la 1:00 p.m. un termómetro que marca 70°F, es trasladado al exterior donde el aire tiene una temperatura de -10°F, diez grados abajo de cero. A la 1:02 p.m. la lectura es de 26°F. A la 1:05 p.m. el termómetro se lleva nuevamente adentro donde el aire está a 70°F. ¿Cuál es la lectura del termómetro a las 1:09 p.m?
6. A las 9:00 a.m. un termómetro marca 70°F y se le traslada al exterior donde la temperatura es de 15°F. A las 9:05 a.m. la lectura del termómetro es 45°F. A las 9:10 a.m. el termómetro es devuelto a su lugar original donde la temperatura permanece fija a 70°F. Encuéntrese: *a*) la lectura de las 9:20 a.m., y *b*) ¿a qué hora el termómetro marcará la temperatura correcta del cuarto? (70°F.)
   SOL. *a*) 58°F; *b*) 9:46 a.m.
7. A las 2:00 p.m. un termómetro marca 80°F y se le traslada al exterior donde la temperatura del aire es de 20°F. A las 2:03 p.m. la lectura del termómetro es de 42°F. Posteriormente, el termómetro es devuelto al interior donde el aire está a 80°F. A las 2:10 p.m. la lectura es de 71°F. ¿En qué momento el termómetro fue devuelto al interior? SOL. A las 2:05 p.m.
8. Supóngase que una reacción química se desarrolla de acuerdo con la ley indicada en la sección 16. Si la mitad de la sustancia A ha sido convertida al finalizar diez segundos, encuéntrese en cuánto tiempo se transforman nueve décimos de la sustancia. SOL. 33 seg.
9. La conversión de una sustancia B sigue la ley empleada en la sección 16 vista anteriormente. Si sólo una cuarta parte de la sustancia ha sido convertida después de diez segundos, encuéntrese cuánto tardan en convertirse nueve décimos de la sustancia SOL. 80 seg.
10. Para una sustancia C, la velocidad de variación con el tiempo es proporcional al cuadrado de la cantidad x de sustancia no convertida. Sea k el valor numérico de la constante de proporcionalidad y sea x_0 la cantidad de sustancia no convertida en el tiempo $t = 0$. Determínese x para toda $t \geq 0$. SOL. $x = x_0/(1 + x_0kt)$.
11. Dos sustancias A y B, se convierten en un solo compuesto C. En el laboratorio se ha mostrado que para estas sustancias se cumple la siguiente ley de conversión: la velocidad de variación con el tiempo de la cantidad x del compuesto C es proporcional al pro-

ducto de las cantidades de las sustancias no convertidas A y B. Supóngase que las unidades de medida se eligen de tal forma que una unidad del compuesto C está formado de la combinación de una unidad de A con una unidad de B. Si al tiempo $t = 0$ hay a unidades de sustancia A, b unidades de sustancia B y ninguna del compuesto C presente, muéstrese que la ley de conversión puede expresarse con la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x).$$

Resolver esta ecuación con la condición inicial dada

SOL. Si $b \neq a$, $x = \dfrac{ab[\exp(b - a)kt - 1]}{b \exp(b - a)kt - a}$;

si $b = a$, $x = a^2kt(akt + 1)$.

12. En la solución del ejercicio 11, suponer que $k > 0$ e investíguese el comportamiento de x cuando $t \to \infty$.

SOL. Si $b \geq a$, $x \to a$; si $b \geq a$, $x \to b$.

13. El radio se descompone con una velocidad proporcional a la cantidad de radio presente. Supóngase que se descubre que en 25 años aproximadamente 1.1 por ciento de una cierta cantidad de radio se ha descompuesto. Determínese aproximadamente qué tanto tiempo tomará el radio para que se descomponga la mitad de la cantidad original. SOL. 1 600 años.
14. Una cierta sustancia radiactiva tiene una vida media de 38 horas. Encontrar qué tanto tiempo toma al 90% de la radiactividad para disiparse SOL. 126 horas.
15. Una población bacteriana B se sabe que tiene una tasa de crecimiento Proporcional a B misma. Si entre el mediodía y las 2:00 p.m. la población se triplica, ¿a qué tiempo, si no se efectúa ningún control, B será 100 veces mayor que al mediodía?

SOL. Cerca de las 8:22 p. m.

16. En el movimiento de un objeto a través de un cierto medio (aire a ciertas presiones, es un ejemplo), el medio efectúa una fuerza de resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad del objeto móvil. Supóngase que el cuerpo cae por la acción de la gravedad, a través de tal medio. Si t representa el tiempo y v la velocidad positiva hacia abajo, y g es la aceleración de la gravedad constante usual, y w el peso del cuerpo, usando la ley de Newton, fuerza igual a masa por aceleración, concluir que la ecuación diferencial del movimiento es

$$\frac{w}{g}\frac{dv}{dt} = w - kv^2,$$

donde kv^2 es la magnitud de la fuerza de resistencia efectuada por el medio.

17. Resuélvase la ecuación diferencial del ejercicio 16 con la condición inicial de que $v = v_0$ cuando $t = 0$. Introducir la constante $a^2 = w/k$ para simplificar las fórmulas. SOL. $\dfrac{a + v}{a - v} = \dfrac{a + v_0}{a - v_0} \exp\left(\dfrac{2gt}{a}\right)$
18. Enlístese un conjunto consistente de unidades para las dimensiones de las variables y parámetros que aparecen en las ecuaciones de los ejercicios 16-17 anteriores.

SOL. t en seg; g en pie/seg^2
v en pie/seg; k en (lb) (seg^2)/(pie^2)
w en lb; a en pie/seg

19. Hay medios que oponen una fuerza de resistencia al paso de los cuerpos que los atraviesan proporcional a la primera potencia de la velocidad. Para tales medios, planteénse y resuélvanse problemas análogos a los planteados en los ejercicios 16-18, excepto que, por conveniencia, debe escogerse una constante $b = w/k$ para reemplazar a la constante a^2 del ejercicio 17. Mostrar que b tiene las dimensiones de una velocidad.

SOL. $v = b + (v_0 - b)\exp\left(-\dfrac{gt}{b}\right)$

20. La figura 7 muestra un cuerpo que pesa w libras, resbalando por un plano inclinado que forma un ángulo α con respecto a la horizontal. Supóngase que ninguna otra fuerza más que la gravedad está actuando sobre el cuerpo, esto es, que no hay fricción, resistencia del aire, etc. Al tiempo $t = 0$ supóngase que $x = x_0$ y que la velocidad inicial es v_0. Determinar x para $t > 0$.

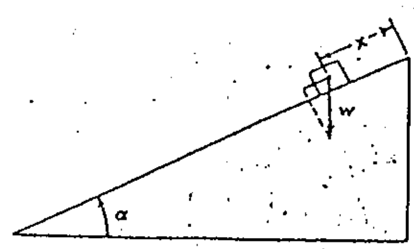

FIGURA 7

SOL. $x = \frac{1}{2}gt^2 \operatorname{sen}\alpha + v_0t + x_0$.

21. Una tabla larga y muy lisa se inclina en un ángulo de 10° con respecto a la horizontal. Un cuerpo empieza a moverse desde el reposo a una distancia de diez pies sobre la parte más baja de la tabla y resbala hacia abajo debido a la acción de la fuerza de gravedad solamente. Encuéntrese cuánto tiempo tarda el cuerpo en llegar a la base de la tabla y determínese la velocidad con que llega.

SOL. 1.9 seg y 10.5 pie/seg.

22. A las condiciones del ejercicio 20 agréguese esta otra. Hay una fuerza retardatoria de magnitud kv, donde v es la velocidad. Determínese v y x suponiendo que el cuerpo principia su movimiento desde el reposo con $x = x_0$. Usese la notación $a = kg/w$.

SOL. $x = a^{-1}g \operatorname{sen}\alpha(1 - e^{-at})$;
$x = x_0 + a^{-2}g \operatorname{sen}\alpha(-1 + e^{-at} + at)$.

En los ejercicios 1-21 obténgase la solución general.

1. $(3x - 2y + 1)\,dx + (3x - 2y + 3)\,dy = 0$.
SOL. $5(x + y + c) = 2\ln(15x - 10y + 11)$.
2. $\operatorname{sen} y(x + \operatorname{sen} y)\,dx + 2x^2 \cos y\,dy = 0$.
SOL. $x^3 \operatorname{sen}^2 y = c(3x + \operatorname{sen} y)$.
3. $\dfrac{dy}{dx} = (9x + 4y + 1)^2$. SOL. $3\tan(6x + c) = 2(9x + 4y + 1)$.
4. $y' = y - xy^3e^{-2x}$. SOL. $e^{2x} = y^2(x^2 + c)$.
5. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(x + y)$. SOL. $x + c = \tan(x + y) - \sec(x + y)$.
6. $xy\,dx + (x^2 - 3y)\,dy = 0$. SOL. $x^2y^2 = 2y^3 + c$.
7. $(3\tan x - 2\cos y)\sec^2 x\,dx + \tan x \operatorname{sen} y\,dy = 0$.
SOL. $\cos y \tan^2 x = \tan^3 x + c$.
8. $(x + 2y - 1)\,dx + (2x + 4y - 3)\,dy = 0$. Resolverla por dos métodos.
SOL. $(x + 2y - 1)^2 = 2y + c$.
9. Resuélvase la ecuación

$$6y^2\,dx - x(ax^2 + y)\,dy = 0$$

del ejemplo anterior b) tratándola como una ecuación de Bernoulli en la variable dependiente x.

10. $2x^3y' = y(y^2 + 3x^2)$. Resolver por dos métodos SOL. $y^2(c - x) = x^3$.
11. $(3\operatorname{sen} y - 5x)\,dx + 2x^2 \cot y\,dy = 0$.
SOL. $x^3(\operatorname{sen} y - x)^2 = c\operatorname{sen}^2 y$.
12. $y' = 1 + 6x\exp(x - y)$. SOL. $\exp(y - x) = 3x^2 + c$.
13. $\dfrac{dv}{du} = (u - v)^2 - 2(u - v) = 2$.
SOL. $(u - v - 3\exp(4u) = c(u - v + 1)$.
14. $2y\,dx + x(x^2 \ln y - 1)\,dy = 0$. SOL. $y(1 + x^2 - x^2 \ln y) = cx^2$.
15. $\cos y \operatorname{sen} 2x\,dx + (\cos^2 y - \cos^2 x)\,dy = 0$.
SOL. $\cos^2 x(1 + \operatorname{sen} y) = \cos y(y + c - \cos y)$.
16. $(ke^{2v} - u)\,du = 2e^{2v}(e^{2v} + ku)\,dv$.
SOL. $2k \operatorname{Arctan}(ue^{-2v}) = \ln[c(u^2 + e^{4v})]$.
17. $y' \tan x \operatorname{sen} 2y = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y$.
SOL. $(\operatorname{sen}^2 x + 3\cos^2 y)\operatorname{sen} x = c$.
18. $(x + 2y - 1)\,dx - (x + 2y - 5)\,dy = 0$.
19. $y(x\tan x + \ln y)\,dx + \tan x\,dy = 0$.
SOL. $\operatorname{sen} x \ln y = x\cos x - \operatorname{sen} x + c$.
20. $xy' - y = x^ky^n$, donde $n \neq 1$ y $k + n \neq 1$.
SOL. $(k + n - 1)y^{1-n} = (1 - n)x^k + cx^{1-n}$.
21. La ecuación del ejercicio 20 para los valores de k y n no incluidos allí.
SOL. Si $n = 1$ y $k \neq 0$, $x^k = k\ln(cy/x)$.
Si $n = 1$ y $k = 0$, $y = cx^2$.
Si $n \neq 1$ pero $k + n = 1$, $y^{1-n} = (1 - n)x^{1-n}\ln(cx)$.

En los ejercicios 22-27 encuéntrese la solución particular pedida.

22. $4(3x + y + 2)\,dx - (3x + y)\,dy = 0$; cuando $x = 1$, $y = 0$.
SOL. $7(4x - y - 4) = 8 \ln \dfrac{21x + 7y - 8}{13}$.

23. $y' = 2(3x + y)^2 - 1$; cuando $x = 0$, $y = 1$.
SOL. $4 \operatorname{Arctan} (3x + y) = 8x + \pi$.

24. $2xyy' = y^2 - 2x^3$. Encuéntrese la solución que pasa por el punto $(1, 2)$.
SOL. $y^2 = x(5 - x^2)$.

25. $(y^4 - 2xy)\,dx + 3x^2\,dy = 0$; cuando $x = 2$, $y = 1$.
SOL. $x^2 = y^3(x + 2)$.

26. $(2y^3 - x^3)\,dx + 3xy^2\,dy = 0$; cuando $x = 1$, $y = 1$. Resolverla por dos métodos.
SOL. $5x^3y^3 = x^6 + 4$.

27. $(x^2 + 6y^2)\,dx - 4xy\,dy = 0$; cuando $x = 1$, $y = 1$. Resolverla por tres métodos.
SOL. $2y^2 = x^2(3x - 1)$.

2. $(x - 4y - 9)\,dx + (4x + y - 2)\,dy = 0$.
SOL. $\ln [(x - 1)^2 + (y + 2)^2] - 8 \operatorname{Arctan} \dfrac{x - 1}{y + 2} = c$.

3. $(2x - y)\,dx + (4x + y - 6)\,dy = 0$.
SOL. $(x + y - 3)^2 = c(2x + y - 4)^3$.

4. $(x - 4y - 3)\,dx - (x - 6y - 5)\,dy = 0$.
SOL. $(x - 2y - 1)^2 = c(x - 3y - 2)$.

5. $(2x + 3y + 5)\,dx + (3x - y - 2)\,dy = 0$. Resolverla por dos métodos.

6. $2dx + (2x - y + 3)\,dy = 0$. Usar un cambio de variable.
SOL. $y + c = -\ln (2x - y + 4)$.

7. Resuélvase la ecuación del ejercicio 6 usando el hecho de que la ecuación es lineal en x.

8. $(x - y + 2)\,dx + 3\,dy = 0$. SOL. $x + c = 3 \ln (x - y + 5)$.

9. Resuelva el ejercicio 8 por otro método.

10. $(x + y - 1)\,dx + (2x + 2y + 1)\,dy = 0$.
SOL. $x + 2y + c = 3 \ln (x + y + 2)$.

11. $(3x + 2y + 7)\,dx + (2x - y)\,dy = 0$. Resolverla por dos métodos.

12. $(x - 2)\,dx + 4(x + y - 1)\,dy = 0$.
SOL. $2(y + 1) = -(x + 2y) \ln [c(x + 2y)]$.

13. $(x - 3y + 2)\,dx + 3(x + 3y - 4)\,dy = 0$.
SOL. $\ln [(x - 1)^2 + 9(y - 1)^2] - 2 \operatorname{Arctan} \dfrac{x - 1}{3(y - 1)} = c$.

14. $(6x - 3y + 2)\,dx - (2x - y - 1)\,dy = 0$.
SOL. $3x - y + c = 5 \ln (2x - y + 4)$.

15. $(9x - 4y + 4)\,dx - (2x - y + 1)\,dy = 0$.
SOL. $y - 1 = 3(y - 3x - 1) \ln [c(3x - y + 1)]$.

16. $(x + 3y - 4)\,dx + (x + 4y - 5)\,dy = 0$.
SOL. $y - 1 = (x + 2y - 3) \ln [c(x + 2y - 3)]$.

17. $(x + 2y - 1)\,dx - (2x + y - 5)\,dy = 0$.
SOL. $(x - y - 4)^3 = c(x + y - 2)$.

18. $(x - 1)\,dx - (3x - 2y - 5)\,dy = 0$.
SOL. $(2y - x + 3)^2 = c(y - x + 2)$.

En los ejercicios 19-22 obténgase la solución particular indicada.

19. $(2x - 3y + 4)\,dx + 3(x - 1)\,dy = 0$; cuando $x = 3$, $y = 2$.
SOL. $3(y - 2) = -2(x - 1) \ln \dfrac{x - 1}{2}$.

20. La ecuación del ejercicio 19, pero con la condición: cuando $x = -1$, $y = 2$.
SOL. $3(y - 2) = -2(x - 1) \ln \dfrac{1 - x}{2}$.

21. $(x + y - 4)\,dx - (3x - y - 4)\,dy = 0$; cuando $x = 4$, $y = 1$.
SOL. $2(x + 2y - 6) = 3(x - y) \ln \dfrac{x - y}{3}$.

22. La ecuación del ejercicio 21, pero con la condición: cuando $x = 3$, $y = 7$.
SOL. $y - 5x + 8 = 2(y - x) \ln \dfrac{y - x}{4}$.

23. Pruébese que el cambio de variables

$$x = \alpha_1 u + \alpha_2 v, \qquad y = u + v$$

transformará la ecuación

(A) $(a_1x + b_1y + c_1)\,dx + (a_2x + b_2y + c_2)\,dy = 0.$

en una ecuación en la que las variables u y v son separables, si α_1 y α_2 son raíces de la ecuación

(B) $a_1\alpha^2 + (a_2 + b_1)\alpha + b_2 = 0.$

y si $\alpha_2 \neq \alpha_1$.

Nótese que este método de solución de (A) no es práctico a menos que las raíces de la ecuación (B) sean reales y diferentes.

Resuélvanse los ejercicios 24-29 por el método indicado en el ejercicio 23.

24. El ejercicio 4 anterior. Como una comprobación, la ecuación (B) para este caso es

$$\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0,$$

así que podemos escoger $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = 3$
La ecuación en u y v vuelve a ser

$$(v - 1)\,du - 2(u + 2)\,dv = 0.$$

25. El ejercicio 3 anterior.
26. El ejercicio 10 anterior.
27. El ejercicio 17 anterior.
28. El ejercicio 18 anterior.
29. El ejemplo *a*) del texto de esta sección.
30. Pruébese que el cambio de variables

$$x = \alpha_1 u + \beta v, \qquad y = u + v$$

transformará la ecuación

(A) $(a_1x + b_1y + c_1)\,dx + (a_2x + b_2y + c_2)\,dy = 0$

en una ecuación que es lineal en la variable u, si α_1 es una raíz de la ecuación

(B) $a_1\alpha^2 + (a_2 + b_1)\alpha + b_2 = 0,$

y si β es cualquier número tal que $\beta \neq \alpha_1$.

Obsérvese que este método no es práctico a menos que las raíces de la ecuación (B) sean reales. Sin embargo, no necesitan ser diferentes como tuvieron que ser en el teorema del ejercicio 23. El método de este ejemplo es particularmente útil cuando las raíces de (B) son iguales.

Resolver los ejercicios 31-35 por el método indicado en el ejercicio 30.

31. El ejercicio 16 anterior. El único valor posible para α_1 es -2). Entonces β puede escogerse como cualquier otro valor.

En cada ejercicio, encuéntrese la solución general a menos que el enunciado del ejercicio estipule otra cosa.

1. $(y^2 - 3y - x)\,dx + (2y - 3)\,dy = 0.$ SOL. $y^2 - 3y - x + 1 = ce^{-x}.$
2. $(y^3 + y + 1)\,dx + x(x - 3y^2 - 1)\,dy = 0.$ SOL. $y^3 - xy + y + 1 = cx.$
3. $(x + 3y - 5)\,dx - (x - y - 1)\,dy = 0.$ SOL. $2(y - 1) = (x + y - 3)\ln[c(x + y - 3)].$
4. $(x^3 - y^3)\,dx + 2xy\,dy = 0.$ SOL. $x^3 + 4y^2 = cx.$
5. $(2x + y - 4)\,dx + (x - 3y + 12)\,dy = 0.$ SOL. $2x^2 + 2xy - 3y^2 - 8x + 24y = c.$
6. Resuélvase por dos métodos la ecuación $y' = ax + by + c$ con $b \neq 0$. SOL. $b^2y = c_1e^{bx} - abx - a - cb.$
7. $y^3\sec^2 x\,dx - (1 - 2y^2\tan x)\,dy = 0.$ SOL. $y^2\tan x = \ln(cy).$
8. $x^3y\,dx + (3x^4 - y^3)\,dy = 0.$ SOL. $15x^4y^{12} = 4y^{15} + c.$
9. $(a_1x + ky + c_1)\,dx + (kx + b_2y + c_2)\,dy = 0.$ SOL. $a_1x^2 + 2kxy + b_2y^2 + 2c_1x + 2c_2y = c.$
10. $(x - 4y + 7)\,dx + (x + 2y + 1)\,dy = 0.$ SOL. $(x - y + 4)^3 = c(x - 2y + 5)^2.$
11. $xy\,dx + (y^4 - 3x^2)\,dy = 0.$ SOL. $x^2 = y^4(1 + cy^2).$
12. $(x + 2y - 1)\,dx - (2x + y - 5)\,dy = 0.$
13. $(5x + 3e^y)\,dx + 2xe^y\,dy = 0.$ SOL. $x^3(x + e^y)^2 = c.$
14. $(3x + y - 2\,dx + (3x + y + 4)\,dy = 0.$ SOL. $x + y + c = 3\ln(3x + y + 7).$

23. Pruébese que el cambio de variables

$$x = \alpha_1 u + \alpha_2 v, \qquad y = u + v$$

transformará la ecuación

(A) $\quad (a_1x + b_1y + c_1)\,dx + (a_2x + b_2y + c_2)\,dy = 0.$

en una ecuación en la que las variables u y v son separables, si α_1 y α_2 son raíces de la ecuación

(B) $$a_1\alpha^2 + (a_2 + b_1)\alpha + b_2 = 0.$$

y si $\alpha_2 \neq \alpha_1$.

Nótese que este método de solución de (A) no es práctico a menos que las raíces de la ecuación (B) sean reales y diferentes.

Resuélvanse los ejercicios 24-29 por el método indicado en el ejercicio 23.

24. El ejercicio 4 anterior. Como una comprobación, la ecuación (B) para este caso es

$$\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0,$$

así que podemos escoger $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = 3$
La ecuación en u y v vuelve a ser

$$(v - 1)\,du - 2\,(u + 2)\,dv = 0.$$

25. El ejercicio 3 anterior.
26. El ejercicio 10 anterior.
27. El ejercicio 17 anterior.
28. El ejercicio 18 anterior.
29. El ejemplo *a*) del texto de esta sección.
30. Pruébese que el cambio de variables

$$x = \alpha_1 u + \beta v, \qquad y = u + v$$

transformará la ecuación

(A) $\quad (a_1x + b_1y + c_1)\,dx + (a_2x + b_2y + c_2)\,dy = 0$

en una ecuación que es lineal en la variable u, si α_1 es una raíz de la ecuación

(B) $$a_1\alpha^2 + (a_2 + b_1)\alpha + b_2 = 0,$$

y si β es cualquier número tal que $\beta \neq \alpha_1$.

Obsérvese que este método no es práctico a menos que las raíces de la ecuación (B) sean reales. Sin embargo, no necesitan ser diferentes como tuvieron que ser en el teorema del ejercicio 23. El método de este ejemplo es particularmente útil cuando las raíces de (B) son iguales.

Resolver los ejercicios 31-35 por el método indicado en el ejercicio 30.

31. El ejercicio 16 anterior. El único valor posible para α_1 es (-2). Entonces β puede escogerse como cualquier otro valor.

En cada ejercicio, encuéntrese la solución general a menos que el enunciado del ejercicio estipule otra cosa.

1. $(y^2 - 3y - x)\,dx + (2y - 3)\,dy = 0.$ SOL. $y^2 - 3y - x + 1 = ce^{-x}.$
2. $(y^2 + y + 1)\,dx + x(x - 3y^2 - 1)\,dy = 0.$ SOL. $y^3 - xy + y + 1 = cx.$
3. $(x + 3y - 5)\,dx - (x - y - 1)\,dy = 0.$ SOL. $2(y - 1) = (x + y - 3)\ln[c(x + y - 3)].$
4. $(x^3 - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0.$ SOL. $x^3 + 4y^2 = cx.$
5. $(2x + y - 4)\,dx + (x - 3y + 12)\,dy = 0.$ SOL. $2x^2 + 2xy - 3y^2 - 8x + 24y = c.$
6. Resuélvase por dos métodos la ecuación $y' = ax + by + c$ con $b \neq 0$. SOL. $b^2y = c_1e^{bx} - abx - a - cb.$
7. $y^3 \sec^2 x\,dx - (1 - 2y^2 \tan x)\,dy = 0.$ SOL. $y^2 \tan x = \ln(cy).$
8. $x^3y\,dx + (3x^4 - y^3)\,dy = 0.$ SOL. $15x^4y^{12} = 4y^{15} + c.$
9. $(a_1x + ky + c_1)\,dx + (kx + b_2y + c_2)\,dy = 0.$ SOL. $a_1x^2 + 2kxy + b_2y^2 + 2c_1x + 2c_2y = c.$
10. $(x - 4y + 7)\,dx + (x + 2y + 1)\,dy = 0.$ SOL. $(x - y + 4)^3 = c(x - 2y + 5)^2.$
11. $xy\,dx + (y^4 - 3x^2)\,dy = 0.$ SOL. $x^2 = y^4(1 + cy^2).$
12. $(x + 2y - 1)\,dx - (2x + y - 5)\,dy = 0.$
13. $(5x + 3e^y)\,dx + 2xe^y\,dy = 0.$ SOL. $x^3(x + e^y)^2 = c.$
14. $(3x + y - 2\,dx + (3x + y + 4)\,dy = 0.$ SOL. $x + y + c = 3\ln(3x + y + 7).$

15. $(x - 3y + 4)\,dx + 2(x - y - 2)\,dy = 0.$ SOL. $(x + y - 8)^4 = c(x - 2y + 1).$

16. $(x - 2)\,dx + 4(x + y - 1)\,dy = 0.$ SOL. $2(y + 1) = -(x + 2y)\ln[c(x + 2y)].$

17. $y\,dx = x(1 + xy^4)\,dy.$ SOL. $y(5 + xy^4) = cx.$

18. $2x\,dv + v(2 + v^2x)\,dx = 0$, cuando $x = 1$, $v = \frac{1}{2}$. SOL. $xv^2(5x - 1) = 1.$

19. $2(x - y)\,dx + (3x - y - 1)\,dy = 0.$ SOL. $(x + y - 1)^4 = c(4x - 2y - 1).$

20. $(2x - 5y + 12)\,dx + (7x - 4y + 15)\,dy = 0.$ SOL. $(x + 2y - 3)^3 = c(x - y + 3).$

21. $y\,dx + x(x^2y - 1)\,dy = 0.$ SOL. $y^2(2x^2y - 3) = cx^2.$

22. $\dfrac{dy}{dx} = \tan y \cot x - \sec y \cos x.$ SOL. $\operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x \ln(c \operatorname{sen} x) = 0.$

23. $[1 + (x + y)^2]\,dx + [1 + x(x + y)]\,dy = 0.$ SOL. $y^2 = (x + y)^2 + 2\ln(x + y) + c.$

Resolver por dos métodos los ejercicios 24 y 25.

24. $(x - 2y - 1)\,dx - (x - 3)\,dy = 0.$ SOL. $(x - 3)^2(x - 3y) = c.$

25. $(2x - 3y + 1)\,dx - (3x + 2y - 4)\,dy = 0.$ SOL. $x^2 + x - 3xy - y^2 + 4y = c.$

26. $(4x + 3y - 7)\,dx + (4x + 3y + 1)\,dy = 0.$ SOL. $x + y + c = 8\ln(4x + 3y + 25).$

27. Encuéntrese un cambio de variables que reduzca cualquier ecuación de la forma

$$xy' = yf(xy)$$

a una ecuación de variables separables.

28. $(x + 4y + 3)\,dx - (2x - y - 3)\,dy = 0.$ SOL. $3(y + 1) = (x + y)\ln[c(x + y)].$

29. $(3x - 3y - 2)\,dx - (x - y + 1)\,dy = 0.$ SOL. $2(y - 3x + c) = 5\ln(2x - 2y - 3).$

30. $(x - 6y + 2)\,dx + 2(x + 2y + 2)\,dy = 0.$ SOL. $4y = -(x - 2y + 2)\ln[c(x - 2y + 2)].$

31. $(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)\,dx + 4x^3y\,dy = 0$, cuando $x = 1$, $y = 2$. SOL. $y^2(5 - 3x) = x^2(5 + 3x).$

32. $(x - y - 1)\,dx - 2(y - 2)\,dy = 0.$ SOL. $(x + y - 5)^2(x - 2y + 1) = c.$

33. $(x - 3y + 3)\,dx + (3x + y + 9)\,dy = 0.$ SOL. $\ln[(x + 3)^2 + y^2] = c + 6\operatorname{Arctan}[(x + 3)/y].$

34. $(2x + 4y - 1)\,dx - (x + 2y - 3)\,dy = 0.$ SOL. $\ln(x + 2y - 1) = y - 2x + c.$

35. $4y\,dx + 3(2x - 1)(dy + y^4\,dx) = 0$, cuando $x = 1$, $y = 1$. SOL. $y^3(2x - 1)(5x - 4) = 1.$

36. $y(x - 1)\,dx - (x^2 - 2x - 2y)\,dy = 0.$ SOL. $x^2 - 2x - 4y = cy^2.$

37. $(6xy - 3y^2 + 2y)\,dx + 2(x - y)\,dy = 0.$ SOL. $y(2x - y) = ce^{-3x}.$

38. $y' = x - y + 2$. Resolverla por dos métodos. SOL. $\ln(x - y + 1) = c - x.$

39. $(x + y - 2)\,dx - (x - 4y - 2)\,dy = 0.$ SOL. $\ln[(x - 2)^2 + 4y^2] + \operatorname{Arctan}\dfrac{x - 2}{2y} = c.$

40. $4\,dx + (x - y + 2)^2\,dy = 0.$ SOL. $y + 2\operatorname{Arctan}\dfrac{x - y + 2}{2} = c.$

Ejecútense las multiplicaciones indicadas en los ejercicios 1-4.

1. $(4D + 1)(D - 2)$. SOL. $4D^2 - 7D - 2$.
2. $(2D - 3)(2D + 3)$. SOL. $4D^2 - 9$.
3. $(D + 2)(D^2 - 2D + 5)$. SOL. $D^3 + D + 10$.
4. $(D - 2)(D + 1)^2$. SOL. $D^3 - 3D - 2$.

En los ejercicios 5-16, factorícense cada uno de los operadores.

5. $2D^2 + 3D - 2$. SOL. $(D + 2)(2D - 1)$.
6. $2D^2 - 5D - 12$.
7. $D^3 - 2D^2 - 5D + 6$. SOL. $(D - 1)(D + 2)(D - 3)$.
8. $4D^3 - 4D^2 - 11D + 6$.
9. $D^4 - 4D^2$. SOL. $D^2(D - 2)(D + 2)$.
10. $D^3 - 3D^2 + 4$.
11. $D^3 - 21D + 20$. SOL. $(D - 1)(D - 4)(D + 5)$.
12. $2D^3 - D^2 - 13D - 6$.
13. $2D^4 + 11D^3 + 18D^2 + 4D - 8$. SOL. $(D + 2)^3(2D - 1)$.
14. $8D^4 + 36D^3 - 66D^2 + 35D - 6$.
15. $D^4 + D^3 - 2D^2 + 4D - 24$. SOL. $(D - 2)(D + 3)(D^2 + 4)$.
16. $D^3 - 11D - 20$. SOL. $(D - 4)(D^2 + 4D + 5)$.

Ejecútense las multiplicaciones indicadas en los ejercicios 17-22.

17. $(D - x)(D + x)$. SOL. $D^2 + 1 - x^2$.
18. $(D + x)(D - x)$. SOL. $D^2 - 1 - x^2$.
19. $D(xD - 1)$. SOL. xD^2.
20. $(xD - 1)D$. SOL. $xD^2 - D$.
21. $(xD + 2)(xD - 1)$. SOL. $x^2D^2 + 2xD - 2$.
22. $(xD - 1)(xD + 2)$. SOL. $x^2D^2 + 2xD - 2$.

5. $(D^3 + 3D^2 - 4D)y = 0$. SOL. $y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-4x}$.
6. $(D^3 - 3D^2 - 10D)y = 0$.
7. $(D^3 + 6D^2 + 11D + 6)y = 0$. SOL. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + c_3e^{-3x}$.
8. $(D^3 + 3D^2 - 4D - 12)y = 0$.
9. $(4D^3 - 7D + 3)y = 0$.
SOL. $y = c_1e^x + c_2 \exp(\frac{1}{2}x) + c_3 \exp(-\frac{3}{2}x)$.
10. $(4D^3 - 13D - 6)y = 0$.
11. $\dfrac{d^3x}{dt^3} + \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} = 0$. SOL. $x = c_1 + c_2e^t + c_3e^{-2t}$.
12. $\dfrac{d^3x}{dt^3} - 19\dfrac{dx}{dt} + 30x = 0$.
13. $(9D^3 - 7D + 2)y = 0$.
SOL. $y = c_1e^{-x} + c_2 \exp(\frac{1}{3}x) + c_3 \exp(\frac{2}{3}x)$.
14. $(4D^3 - 21D - 10)y = 0$.
15. $(D^3 - 14D + 8)y = 0$.
SOL. $y = c_1e^{-4x} + c_2 \exp[(2 + \sqrt{2})x] + c_3 \exp[(2 - \sqrt{2})x]$.
16. $(D^3 - D^2 - 4D - 2)y = 0$.
17. $(4D^4 - 8D^3 - 7D^2 + 11D + 6)y = 0$.
SOL. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + c_3 \exp(-\frac{1}{2}x) + c_4 \exp(\frac{3}{2}x)$.
18. $(4D^4 - 16D^3 + 7D^2 + 4D - 2)y = 0$.
19. $(4D^4 + 4D^3 - 13D^2 - 7D + 6)y = 0$.
20. $(4D^5 - 8D^4 - 17D^3 + 12D^2 + 9D)y = 0$.
21. $(D^2 - 4aD + 3a^2)y = 0$, a real $\neq 0$.
22. $[D^2 - (a + b)D + ab]y = 0$, a y b reales y desiguales.

En los ejercicios 23-24, encuéntrese la solución particular indicada.

23. $(D^2 - 2D - 3)y = 0$, cuando $x = 0, y = 0$, y $y' = -4$.
SOL. $y = e^{-x} - e^{3x}$.
24. $(D^2 - D - 6)y = 0$, cuando $x = 0, y = 0$, cuando $x = 1, y = e^3$.
SOL. $y = (e^{3x} - e^{-2x})/(1 - e^{-5})$.

En los ejercicios 25-29, encuéntrese para $x = 1$ el valor de y que satisface la solución particular pedida.

25. $(D^2 - 2D - 3)y = 0$, cuando $x = 0, y = 4$ y $y' = 0$.
SOL. Cuando $x = 1, y = e^3 + 3e^{-1} \approx 21.2$.
26. $(D^3 - 4D)y = 0$, cuando $x = 0, y = 0, y' = 0$, y $y'' = 2$.
SOL. Cuando $x = 1, y = \operatorname{senh}^2 1$.
27. $(D^2 - D - 6)y = 0$, cuando $x = 0, y = 3$ y $y' = -1$.
SOL. Cuando $x = 1, y = 20.4$.
28. $(D^2 + 3D - 10)y = 0$, cuando $x = 0, y = 0$, y cuando $x = 2, y = 1$.
SOL. Cuando $x = 1, y = 0.135$.
29. $(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)y = 0$, cuando $x = 0, y = 1, y' = -7$, y $y'' = -1$.
SOL. Cuando $x = 1, y = -19.8$.

En los ejercicios 1-20 encuéntrese la solución general.

1. $(D^2 - 6D + 9)y = 0$. SOL. $y = (c_1 + c_2x)e^{3x}$.
2. $(D^2 + 4D + 4)y = 0$.
3. $(4D^3 + 4D^2 + D)y = 0$. SOL. $y = c_1 + (c_2 + c_3x)\exp(-\frac{1}{2}x)$.
4. $(D^5 - 8D^3 + 16D)y = 0$.
5. $(D^4 + 6D^3 + 9D^2)y = 0$. SOL. $y = c_1 + c_2x + (c_3 + c_4x)e^{-3x}$.
6. $(D^3 - 3D^2 + 4)y = 0$.
7. $(4D^3 - 3D + 1)y = 0$. SOL. $y = c_1e^{-x} + (c_2 + c_3x)\exp(\frac{1}{2}x)$.
8. $(D^4 - 3D^3 - 6D^2 + 28D - 24)y = 0$.
9. $(4D^4 - 4D^3 - 23D^2 + 12D + 36)y = 0$.
   SOL. $y = (c_1 + c_2x)e^{2x} + (c_3 + c_4x)\exp(-\frac{3}{2}x)$.
10. $(D^3 + 6D^2 + 12D + 8)y = 0$.
11. $(D^5 - D^3)y = 0$. SOL. $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^x + c_5e^{-x}$;
   o $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_6\cosh x + c_7\operatorname{senh} x$.
12. $(D^5 - 16D^3)y = 0$.
13. $(4D^4 + 4D^3 - 3D^2 - 2D + 1)y = 0$.
14. $(54D^4 - 27D^3 - 9D^2 + 7D - 1)y = 0$.
15. $(D^4 - 2D^3 - 3D^2 + 4D + 4)y = 0$.
   SOL. $y = (c_1 + c_2x)e^{-x} + (c_3 + c_4x)e^{2x}$.
16. $(4D^4 + 4D^3 - 3D^2 - 2D + 1)y = 0$.
17. $(4D^5 + 4D^4 - 9D^3 - 11D^2 + D + 3)y = 0$.
18. $(D^5 - 15D^3 + 10D^2 + 60D - 72)y = 0$.
19. $(D^4 + 2D^3 - 6D^2 - 16D - 8)y = 0$.
   SOL. $y = (c_1 + c_2x)e^{-2x} + c_3\exp[(1 + \sqrt{3})x] + c_4\exp[(1 - \sqrt{3})x]$.
20. $(D^4 - 2D^3 - 5D^2 + 2)y = 0$.

En los ejercicios 21-26 encuéntrese la solución particular indicada.

21. $(D^2 + 4D + 4)y = 0$, cuando $x = 0$, $y = 1$ y $y' = -1$.
   SOL. $y = (1 + x)e^{-2x}$.
22. La ecuación del ejercicio 21 con la condición de que la gráfica de la solución pase por los puntos $(0, 2)$ y $(2, 0)$.
   SOL. $y = (2 - x)e^{-2x}$.
23. $(D^3 - 3D - 2)y = 0$, cuando $x = 0$, $y = 0$, $y' = 9$, $y'' = 0$.
   SOL. $y = 2e^{2x} + (3x - 2)e^{-x}$.
24. $(D^4 + 3D^3 + 2D^2)y = 0$, cuando $x = 0$, $y = 0$, $y' = 4$, $y'' = -6$, $y''' = 14$.
   SOL. $y = 2(x + e^{-x} - e^{-2x})$.
25. La ecuación del ejercicio 24 con las condiciones: cuando $x = 0$, $y = 0$, $y' = 3$, $y'' = -5$, $y''' = 9$. SOL. $y = 2 - e^{-x} - e^{-2x}$.
26. $(D^3 + D^2 - D - 1)y = 0$, cuando $x = 0$, $y = 1$, cuando $x = 2$, $y = 0$, y también cuando $x \to \infty$; $y \to 0$. SOL. $y = \frac{1}{2}(2 - x)e^{-x}$.

En los ejercicios 27-29, encuéntrese para $x = 2$ el valor de y para la solución particular pedida.

27. $(4D^2 - 4D + 1)y = 0$, cuando $x = 0$, $y = -2$, $y' = 2$.
   SOL. Cuando $x = 2$, $y = 4e$.
28. $(D^3 + 2D^2)y = 0$, cuando $x = 0$, $y = -3$, $y' = 0$, $y'' = 12$.
   SOL. Cuando $x = 2$, $y = 3e^{-4} + 6$.
29. $(D^3 + 5D^2 + 3D - 9)y = 0$, cuando $x = 0$, $y = -1$, cuando $x = 1$, $y = 0$, y también cuando $x \to \infty$, $y \to 0$.
   SOL. Cuando $x = 2$, $y = e^{-6}$

Encuéntrese la solución general, excepto cuando el ejercicio estipule otra cosa.

1. Verifíquese directamente que la relación

(4) $$y = c_3e^{ax}\cos bx + c_4e^{ax}\operatorname{sen} bx$$

satisface la ecuación

$$[(D - a)^2 + b^2]y = 0.$$

2. $(D^2 - 2D + 5)y = 0$. Verifíquese la respuesta.
   SOL. $y = c_1e^x\cos 2x + c_2e^x\operatorname{sen} 2x$.
3. $(D^2 - 2D + 2)y = 0$.
4. $(D^2 + 9)y = 0$. Verifíquese la respuesta.
   SOL. $y = c_1\cos 3x + c_2\operatorname{sen} 3x$.

5. $(D^2 - 9)y = 0.$ SOL. $y = c_1 \cosh 3x + c_2 \operatorname{senh} 3x.$
6. $(D^2 + 4D + 5)y = 0.$ Verifíquese la respuesta.
7. $(D^2 - 6D + 25)y = 0.$ SOL. $y = e^{3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \operatorname{sen} 4x).$
8. $(D^3 + D^2 + 4D + 4)y = 0.$ Verifíquese la respuesta.
9. $(D^2 - 1)y = 0$, cuando $x = 0$, $y = y_0$ y $y' = 0$. SOL. $y = y_0 \cosh x.$
10. $(D^2 + 1)y = 0$, cuando $x = 0$, $y = y_0$ y $y' = 0$. SOL. $y = y_0 \cos x.$
11. $(D^4 + 2D^3 - 11D^2 - 52D)y = 0.$
12. $(D^3 + 5D^2 + 17D + 13)y = 0$, cuando $x = 0$, $y = 0$, $y' = 1$, y $y'' = 6$. SOL. $y = e^{-x} - e^{-2x} \cos 3x.$
13. $(D^5 - 2D^3 - 2D^2 - 3D - 2)y = 0.$
14. $(D^4 - 2D^3 + 2D^2 - 2D + 1)y = 0.$ Verifíquese la respuesta.
15. $(D^4 + 18D^2 + 81)y = 0.$ SOL. $y = (c_1 + c_2x) \cos 3x + (c_3 + c_4x) \operatorname{sen} 3x.$
16. $2(D^4 + 11D^3 - 4D^2 - 69D + 34)y = 0.$ Verifíquese la respuesta.
17. $(D^6 + 6D^4 + 9D^2 + 4)y = 0.$
18. $(16D^3 - 11D - 5)y = 0.$
19. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$, k real, cuando $t = 0$, $x = 0$, y $\dfrac{dx}{dt} = v_0$. Verificar su resultado completamente. SOL. $x = (v_0/k) \operatorname{sen} kt.$
20. $(D^3 + D^2 + 4D + 4)y = 0$, cuando $x = 0$, $y = 0$, $y' = -1$ y $y'' = 5$. SOL. $y = e^{-x} - \cos 2x.$
21. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2b\dfrac{dx}{dt} + k^2x = 0$, $k > b > 0$, cuando $t = 0$, $x = 0$ y $\dfrac{dx}{dt} = v_0$. SOL. $x = (v_0/a)e^{-bt} \operatorname{sen} at$, donde $a = \sqrt{k^2 - b^2}.$

Obténgase la solución general a menos que se indique otra cosa. Las soluciones pueden ser comprobadas por sustitución directa.

1. $(9D^4 + 6D^3 + D^2)y = 0.$
2. $(4D^3 - 13D + 6)y = 0.$
3. $(D^3 + 2D^2 - 15D)y = 0.$
4. $(D^3 + 2D^2 + D + 2)y = 0.$
5. $(D^3 - 2D^2 - 3D)y = 0.$
6. $(D^3 + 3D^2 - 4)y = 0.$
7. $(4D^3 - 27D + 27)y = 0.$
8. $(10D^3 + D^2 - 7D + 2)y = 0.$
9. $(D^3 + 7D^2 + 19D + 13)y = 0$, cuando $x = 0$, $y = 0$, $y' = 2$, y $y'' = -12$.
10. $(D^2 - D - 6)y = 0$, cuando $x = 0$, $y = 2$ y $y' = 1$.
11. $(D^4 + 6D^3 + 9D^2)y = 0$, cuando $x = 0$, $y = 0$, $y' = 0$, y $y'' = 6$, y así $x \to \infty$, $y' \to 1$. Para esta solución particular, encontrar el valor de y cuando $x = 1$. SOL. $y = 1 - e^{-3}.$
12. $(D^3 + 6D^2 + 12D + 8)y = 0$, cuando $x = 0$, $y = 1$; $y' = -2$, y $y'' = 2$.
13. $(D^3 + 3D^2 + 3D + 1)y = 0.$
14. $(D^4 - 2D^3 - 13D^2 + 38D - 24)y = 0.$
15. $(D^6 + 9D^4 + 24D^2 + 16)y = 0.$
16. $(8D^3 - 4D^2 - 2D + 1)y = 0.$
17. $(D^4 + D^3 - 4D^2 - 4D)y = 0.$
18. $(D^4 - 2D^3 + 5D^2 - 8D + 4)y = 0.$
19. $(D^4 + 2D^2 + 1)y = 0.$
20. $(D^4 + 5D^2 + 4)y = 0.$
21. $(D^4 + 3D^3 - 4D)y = 0.$
22. $(D^5 + D^4 - 9D^3 - 13D^2 + 8D + 12)y = 0.$
23. $(D^4 - 11D^3 + 36D^2 - 16D - 64)y = 0.$
24. $(D^2 + 2D + 5)y = 0.$
25. $(D^4 + 4D^3 + 2D^2 - 8D - 8)y = 0.$
26. $(4D^4 - 24D^3 + 35D^2 + 6D - 9)y = 0.$
27. $(4D^4 + 20D^3 + 35D^2 + 25D + 6)y = 0.$
28. $(D^4 - 7D^3 + 11D^2 + 5D - 14)y = 0.$
29. $(D^3 + 5D^2 + 7D + 3)y = 0.$
30. $(D^3 - 2D^2 + D - 2)y = 0.$
31. $(D^3 - D^2 + D - 1)y = 0.$
32. $(D^3 + 4D^2 + 5D)y = 0.$
33. $(D^4 - 13D^2 + 36)y = 0.$
34. $(D^4 - 5D^3 + 5D^2 + 5D - 6)y = 0.$
35. $(4D^3 + 8D^2 - 11D + 3)y = 0.$
36. $(D^3 + D^2 - 16D - 16)y = 0.$
37. $(D^4 - D^3 - 3D^2 + D + 2)y = 0.$
38. $(D^3 - 2D^2 - 3D + 10)y = 0.$
39. $(D^5 + D^4 - 6D^3)y = 0.$

40. $(4D^3 + 28D^2 + 61D + 37)y = 0.$
41. $(4D^3 + 12D^2 + 13D + 10)y = 0.$
42. $(18D^3 - 33D^2 + 20D - 4)y = 0.$
43. $(4D^4 - 15D^2 + 5D + 6)y = 0.$
44. $(D^5 + D^4 - 7D^3 - 11D^2 - 8D - 12)y = 0.$
45. $(D^4 + 3D^3 - 6D^2 - 28D - 24)y = 0.$
46. $(4D^4 - 4D^3 - 23D^2 + 12D + 36)y = 0.$
47. $(4D^5 - 23D^3 - 33D^2 - 17D - 3)y = 0.$

En los ejercicios 1-35, obténgase la solución general.

1. $(D^2 + D)y = -\cos x.$ SOL. $y = c_1 + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x.$
2. $(D^2 - 6D + 9)y = e^x.$ SOL. $y = (c_1 + c_2x)e^{3x} + \frac{1}{4}e^x.$
3. $(D^2 + 3D + 2)y = 12x^2$
SOL. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + 6x^2 - 18x + 21.$
4. $(D^2 + 3D + 2)y = 1 + 3x + x^2.$
SOL. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2.$
5. $(D^2 + 9)y = 5e^x - 162x.$
SOL. $y = c_1\cos 3x + c_2\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{2}e^x - 18x.$
6. $(D^2 + 9)y = 5e^x - 162x^2.$
SOL. $y = c_1\cos 3x + c_2\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{2}e^x - 18x^2 + 4.$
7. $y'' - 3y' - 4y = 30e^x.$ SOL. $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-x} - 5e^x.$
8. $y'' - 3y' - 4y = 30e^{4x}.$ SOL. $y = (c_1 + 6x)e^{4x} + c_2e^{-x}.$
9. $(D^2 - 4)y = e^{2x} + 2.$ SOL. $y = c_1e^{-2x} + (c_2 + \frac{1}{4}x)e^{2x} - \frac{1}{2}.$
10. $(D^2 - D - 2)y = 6x + 6e^{-x}.$
SOL. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} - 3x + 3/2 - 2xe^{-x}.$
11. $y'' - 4y' + 3y = 20\cos x.$
SOL. $y = c_1e^x + c_2e^{3x} + 2\cos x - 4\operatorname{sen} x.$
12. $y'' - 4y' + 3y = 2\cos x + 4\operatorname{sen} x.$ SOL. $y = c_1e^x + c_2e^{3x} + \cos x.$
13. $y'' + 2y' + y = 7 + 75\operatorname{sen} 2x.$
SOL. $y = e^{-x}(c_1 + c_2x) + 7 - 12\cos 2x - 9\operatorname{sen} 2x.$
14. $(D^2 + 4D + 5)y = 50x + 13e^{3x}.$
SOL. $y = e^{-2x}(c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x) + 10x - 8 + \frac{1}{2}e^{3x}.$
15. $(D^2 + 1)y = \cos x.$ SOL. $y = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}x\operatorname{sen} x.$
16. $(D^2 - 4D + 4)y = e^{2x}$ SOL. $y = e^{2x}(c_1 + c_2x + \frac{1}{2}x^2).$
17. $(D^2 - 1)y = e^{-x}(2\operatorname{sen} x + 4\cos x).$
18. $(D^2 - 1)y = 8xe^x.$ SOL. $y = c_1e^{-x} + e^x(c_2 - 2x + 2x^2).$
19. $(D^3 - D)y = x.$ SOL. $y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} - \frac{1}{2}x^2.$
20. $(D^3 - D^2 + D - 1)y = 4\operatorname{sen} x.$
SOL. $y = c_1e^x + (c_2 + x)\cos x + (c_3 - x)\operatorname{sen} x.$
21. $(D^3 + D^2 - 4D - 4)y = 3e^{-x} - 4x - 6.$
SOL. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + (c_3 - x)e^{-x} + x + \frac{1}{2}.$
22. $(D^4 - 1)y = 7x^2.$
23. $(D^4 - 1)y = e^{-x}.$
SOL. $y = c_1e^x + (c_2 - \frac{1}{4}x)e^{-x} + c_3\cos x + c_4\operatorname{sen} x.$
24. $(D^2 - 1)y = 10\operatorname{sen}^2 x.$ Use la identidad $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$
SOL. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} - 5 + \cos 2x.$
25. $(D^2 + 1)y = 12\cos^2 x.$
SOL. $y = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x + 6 - 2\cos 2x.$
26. $(D^2 + 4)y = 4\operatorname{sen}^2 x.$
SOL. $y = c_1\cos 2x + c_2\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}(1 - x\operatorname{sen} 2x).$
27. $y'' - 3y' - 4y = 16x - 50\cos 2x.$
28. $(D^3 - 3D - 2)y = 100\operatorname{sen} 2x.$
29. $y'' + 4y' + 3y = 15e^{2x} + e^{-x}.$
30. $y'' - y = e^x - 4.$
31. $y'' - y' - 2y = 6x + 6e^{-x}.$
32. $y'' + 6y' + 13y = 60\cos x + 26.$
33. $(D^3 - 3D^2 + 4)y = 6 + 80\cos 2x.$
34. $(D^3 + D - 10)y = 29e^{4x}.$
35. $(D^3 + D^2 - 4D - 4)y = 8x + 8 + 6e^{-x}.$

En los ejercicios 36-44, encuéntrese la solución particular indicada.

36. $(D^2 + 1)y = 10e^{2x}$, cuando $x = 0, y = 0$ y $y' = 0$.
SOL. $y = 2(e^{2x} - \cos x - 2 \operatorname{sen} x)$.

37. $(D^2 - 4)y = 2 - 8$, cuando $x = 0, y = 0$ y $y' = 5$.
SOL. $y = e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + 2x - \frac{1}{2}$.

38. $(D^2 + 3D)y = -18x$, cuando $x = 0, y = 0$ y $y' = 5$.
SOL. $y = 1 + 2x - 3x^2 - e^{-3x}$.

39. $(D^2 + 4D + 5)y = 10e^{-3x}$, cuando $x = 0, y = 4$ y $y' = 0$.

40. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4\dfrac{dx}{dt} + 5x = 10$, cuando $t = 0, x = 0$ y $\dfrac{dx}{dt} = 0$.
SOL. $x = 2(1 - e^{-2t}\cos t - 2e^{-2t} \operatorname{sen} t)$.

41. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5 = 8 \operatorname{sen} t$, cuando $t = 0, x = 0$ y $\dot{x} = 0$. Obsérvese que $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}, \ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ es una notación común cuando la variable independiente es el tiempo.*
SOL. $x = (1 + e^{-2t}) \operatorname{sen} t - (1 - e^{-2t}) \cos t$.

42. $y'' + 9y = 81x^2 + 14 \cos 4x$, cuando $x = 0, y = 0$ y $y' = 3$.

43. $(D^3 + 4D^2 + 9D + 10)y = -24e^x$, cuando $x = 0, y = 0, y' = -4$ y $y'' = 10$.

44. $y'' + 2y' + 5y = 8e^{-x}$, cuando $x = 0, y = 0$ y $y' = 8$.

En los ejercicios 45-48, obténgase de la solución particular indicada el valor de y y el valor de y' en $x = 2$.

45. $y'' + 2y' + y = x$; en $x = 0, y = -3$, y en $x = 1, y = -1$.
SOL. En $x = 2, y = e^{-2}$ y $y' = 1$.

46. $y'' + 2y' + y = x$; en $x = 0, y = -2$ y $y' = 2$.
SOL. En $x = 2, y = 2e^{-2}$ y $y' = 1 - e^{-2}$.

47. $4y'' + y = 2$; en $x = \pi, y = 0$ y $y' = 1$.
SOL. En $x = 2, y = -0.7635$ y $y' = +0.3012$.

48. $2y'' - 5y' - 3y = -9x^2 - 1$; en $x = 0, y = 1$ y $y' = 0$.
SOL. En $x = 2, y = 5.64$ y $y' = 5.68$.

49. $(D^3 + D)y = x + 1$, cuando $x = 0, y = 1$, y cuando $x = 1, y = \frac{1}{2}$. Calcúlese el valor de y en $x = 4$.
SOL. En $x = 4, y = 8 - e^{-1} - e^{-2} - e^{-3}$.

50. $(D^2 + 1)y = x^3$, cuando $x = 0, y = 0$, y cuando $x = \pi, y = 0$. Demuéstrese que este problema de valores a la frontera no tiene solución.

51. $(D^2 + 1)y = 2 \cos x$, cuando $x = 0, y = 0$, y cuando $x = \pi, y = 0$. Demuéstrese que este problema de valores a la frontera tiene un número ilimitado de soluciones. Obténganse estas soluciones.
SOL. $y = (c + x) \operatorname{sen} x$.

En los ejercicios 3-50, encuéntrese la solución particular por inspección. Verifíquese el resultado.

3. $(D^2 + 4)y = 12$.
4. $(D^2 + 9)y = 18$.
5. $(D^2 + 4D + 4)y = 8$.
6. $(D^2 + 2D - 3)y = 6$.
7. $(D^3 - 3D + 2)y = -7$.
8. $(D^4 + 4D^2 + 4)y = -20$.
9. $(D^3 + 4D)y = 12$.
10. $(D^3 - 9D)y = 27$.
11. $(D^3 + D)y = 15$.
12. $(D^3 + D)y = -8$.
13. $(D^4 - 4D^2)y = 24$.
14. $(D^4 + D^2)y = -12$.
15. $(D^4 - D^3)y = 24$.
16. $(D^5 - 9D^3)y = 27$.
17. $(D^2 + 4)y = 6 \operatorname{sen} x$. SOL. $y = 2 \operatorname{sen} x$.
18. $(D^2 + 4)y = 10 \cos 3x$. SOL. $y = -2 \cos 3x$.
19. $(D^2 + 4)y = 8x + 1 - 15e^x$. SOL. $y = 2x + \frac{1}{4} - 3e^x$.
20. $(D^2 + D)y = 6 + 3e^{2x}$. SOL. $y = 6x + \frac{1}{2}e^{2x}$.
21. $(D^2 + 3D - 4)y = 18e^{2x}$. SOL. $y = 3e^{2x}$.
22. $(D^2 + 2D + 5)y = 4e^x - 10$. SOL. $y = \frac{1}{2}e^x - 2$.
23. $(D^2 - 1)y = 2e^{3x}$.
24. $(D^2 - 1)y = 2x + 3$.
25. $(D^2 - 1)y = \cos 2x$.
26. $(D^2 - 1)y = \operatorname{sen} 2x$.
27. $(D^2 + 1)y = e^x + 3x$.
28. $(D^2 + 1)y = 5e^{2x}$.
29. $(D^2 + 1)y = -2x + \cos 2x$.
30. $(D^2 + 1)y = 4e^{-2x}$.
31. $(D^2 + 1)y = 10 \operatorname{sen} 4x$.
32. $(D^2 + 1)y = -6e^{3x}$.
33. $(D^2 + 2D + 1)y = 12e^x$.
34. $(D^2 + 2D + 1)y = 7e^{-2x}$.
35. $(D^2 - 2D + 1)y = 12e^{-x}$.
36. $(D^2 - 2D + 1)y = 6e^{-2x}$.
37. $(D^2 - 2D - 3)y = e^x$.
38. $(D^2 - 2D - 3)y = e^{2x}$.
39. $(4D^2 + 1)y = 12 \operatorname{sen} x$.
40. $(4D^2 + 1)y = 12 \cos x$.
41. $(4D^2 + 4D + 1)y = 18e^x - 5$.
42. $(4D^2 + 4D + 1)y = 7e^{-x} + 2$.
43. $(D^3 - 1)y = e^{-x}$.
44. $(D^3 - 1)y = 4 - 3x^2$.
45. $(D^3 - D)y = e^{2x}$.
46. $(D^4 + 4)y = 5e^{2x}$.
47. $(D^4 + 4)y = 6 \operatorname{sen} 2x$.
48. $(D^4 + 4)y = \cos 2x$.
49. $(D^3 - D)y = 5 \operatorname{sen} 2x$.
50. $(D^3 - D)y = 5 \cos 2x$.

En los ejercicios 1-12, úsese el cambio de la exponencial para encontrar una solución particular.

1. $(D-3)^2y = e^{3x}$.
2. $(D-1)^2y = e^{x}$. SOL. $y = \frac{1}{2}x^2e^{3x}$.
3. $(D+2)^2y = 12xe^{-2x}$.
4. $(D+1)^2y = 3xe^{-x}$. SOL. $y = 2x^3e^{-2x}$.
5. $(D-2)^3y = 6xe^{2x}$.
6. $(D+4)^3y = 8xe^{-4x}$. SOL. $y = \frac{1}{4}x^4e^{2x}$.
7. $(D+3)^3y = 15x^2e^{-3x}$.
8. $(D-4)^3y = 15x^2e^{4x}$. SOL. $y = \frac{1}{4}x^5e^{-3x}$.
9. $D^3(D-2)^2y = 16e^{2x}$.
10. $D^2(D+3)^2y = 9e^{-3x}$. SOL. $y = 2x^2e^{2x}$.
11. $(D^2-D-2)y = 18xe^{-x}$.
12. $(D^2-D-2)y = 36xe^{2x}$. SOL. $y = -(3x^2+2x)e^{-x}$.

En los ejercicios 13-18 encuéntrese una solución particular, usando el cambio de la exponencial en parte de su trabajo, como en el ejemplo *b)* anterior.

13. $(D-2)^2y = 20-3xe^{2x}$.
14. $(D-2)^2y = 4-8x+6xe^{2x}$. SOL. $y = 5-\frac{1}{2}x^3e^{2x}$.
15. $y''-9y = 9(2x-3+4xe^{3x})$. SOL. $y = 3-2x+(3x^2-x)e^{3x}$.
16. $y''+4y'+4y = 4x-6e^{-2x}+3e^{x}$.
17. $(D+1)^2y = e^{-x}+3x$. SOL. $y = \frac{1}{2}x^2e^{-x}+3x-6$.
18. $(D^2-4)y = 16xe^{-2x}+8x+4$.

SOL. $y = -(2x+1)(xe^{-2x}+1)$.

En los ejercicios 19-28, encuéntrese la solución general.

19. $y''-4y = 8xe^{2x}$.
20. $y''-9y = -72xe^{-3x}$. SOL. $y = c_1e^{-2x}+(c_2-\frac{1}{2}x+x^2)e^{2x}$.
21. $D(D+1)^2y = e^{-x}$.
22. $D^2(D-2)^2y = 2e^{2x}$. SOL. $y = c_1+(c_2+c_3x-\frac{1}{2}x^2)e^{-x}$.
23. $y''+2y'+y = 48e^{-x}\cos 4x$.
24. $y''+4y'+4y = 18e^{-2x}\cos 3x$. SOL. $y = (c_1+c_2x-3\cos 4x)e^{-x}$.
25. $(D-1)^2y = e^{x}\sec^2 x\tan x$.
26. $(D^2+4D+4)y = -x^{-2}e^{-2x}$. SOL. $y = e^{x}(c_1+c_2x+\frac{1}{2}\tan x)$.
27. $(D-a)^2y = e^{ax}f''(x)$. SOL. $y = e^{-2x}(c_1+c_2x+\ln x)$.
28. $(D^2+7D+12)y = e^{-3x}\sec^2 x(1+2\tan x)$. SOL. $y = e^{ax}[c_1+c_2x+f(x)]$.

SOL. $y = c_1e^{-4x}+e^{-3x}(c_2+\tan x)$.

En los ejercicios 1-18 encuéntrese una solución particular.

1. $(D^2-4D+4)y = 6x^2e^{2x}$.
2. $(D-3)^2y = e^{3x}$. SOL. $y = \frac{1}{2}x^4e^{2x}$.
3. $D(D-2)y = e^{2x}$. SOL. $y = \frac{1}{2}x^2e^{3x}$.
4. $D^2(D+1)y = e^{-x}$ SOL. $y = \frac{1}{2}xe^{2x}$.
5. $(D^2+4)y = 8x^2$. SOL. $y = xe^{-x}$.
6. $(D^2+4)y = 16xe^{2x}$. SOL. $y = 2x^5-10x^3+15x$.
7. $(D^2+4D+5)y = 4e^{-2x}\cos x$. SOL. $y = (2x-1)e^{2x}$.
8. $(D^2-D+2)y = 4x^2-3e^{-x}$. SOL. $y = 2xe^{-2x}\,\text{sen}\,x$.
9. $(D^2-4D+13)y = 24e^{2x}\,\text{sen}\,3x$. SOL. $y = xe^{-x}-2x^2+2x-3$.
10. $(D^2-4D+13)y = 24e^{2x}\,\text{sen}\,x$. SOL. $y = -4xe^{2x}\cos 3x$.
11. $(D^2-3D+2)y = (x-2)e^{x}$. SOL. $y = 3e^{2x}\,\text{sen}\,x$.
12. $(D^2-3D+2)y = 72xe^{-x}$. SOL. $y = -\frac{1}{2}(x^2-2x)e^{x}$.
13. $(D^2+4)y = 12(\text{sen}\,x+\text{sen}\,2x)$. SOL. $y = 2(6x+5)e^{-x}$.
14. $(D^2+4)y = 20(e^{x}-\cos 2x)$. SOL. $y = 4\,\text{sen}\,x-3x\cos 2x$.
15. $(D^2+16)y = 8(x+\text{sen}\,4x)$. SOL. $y = 4e^{x}-5x\,\text{sen}\,2x$.
16. $(D^2+4)y = 8\,\text{sen}\,x\cos x$. SOL. $y = x(\frac{1}{2}-\cos 4x)$.
17. $(D^2+4)y = 8\cos^2 x$. SOL. $y = -x\cos 2x$.
18. $(D^4-1)y = x^4$. SOL. $y = 1+x\,\text{sen}\,2x$.

SOL. $y = -x^4-360x^2$.

En los ejercicios 19-28, encuéntrese la solución general.

19. $(D^2-4D+13)y = 24e^{2x}\cos x$.

SOL. $y = e^{2x}(c_1\cos 3x+c_2\,\text{sen}\,3x+3\cos x)$.

20. $(D^2-4D+13)y = 24e^{2x}\cos 3x$.

SOL. $y = e^{2x}(c_1\cos 3x+c_2\,\text{sen}\,3x+4x\,\text{sen}\,3x)$.

21. $(D^2+25)y = \text{sen}\,5x$.

SOL. $y = c_1\cos 5x+c_2\,\text{sen}\,5x-0.1x\cos 5x$.

22. $D(D^2+1)y = \text{sen}\,x$. SOL. $y = c_1+c_2\cos x+(c_3-\frac{1}{2}x)\,\text{sen}\,x$.
23. $D^2(D^2+1)y = \text{sen}\,x$.

SOL. $y = c_1+c_2x+(c_3+\frac{1}{2}x)\cos x+c_4\,\text{sen}\,x$.

24. $(D^2-3D+2)y = x^2-2x$.
25. Ejercicio 8, sección 46.
26. Ejercicio 10, sección 46.
27. Ejercicio 18, sección 46.
28. Ejercicio 19, sección 46.

En los ejercicios 29-34, encuéntrese la solución particular indicada.

29. $(D^2+1)y = 4e^{x}$, cuando $x = 0$, $y = 0$ y $y' = 0$.

SOL. $y = 2(e^{x}\cos x-\text{sen}\,x)$.

30. $(D^2 + 4)y = 2x - 8$, cuando $x = 0$, $y = 1$ y $y' = 0$.

SOL. $4y = 12 \cos 2x - \operatorname{sen} 2x + 2x - 8$.

31. $(D^2 + 3D + 2)y = 4x^2$, cuando $x = 0$, $y = 0$ y $y' = 0$.

SOL. $y = 2x^2 - 6x + 7 - 8e^{-x} + e^{-2x}$.

32. $(D^2 - 1)y = \operatorname{sen} 2x$, cuando $x = 0$, $y = 0$ y $y' = 1$.

SOL. $10y = 7(e^x - e^{-x}) - 2 \operatorname{sen} 2x$; o $5y = 7 \operatorname{senh} x - \operatorname{sen} 2x$.

33. $(D^2 + 2D)y = 2x$, cuando $x = 0$, $y = 0$, y cuando $x = 1$, $y = 0$.

SOL. $2y = x^2 - x$.

34. La ecuación del ejercicio 33 con las condiciones de que cuando $x = 0$, $y = 0$ y $y' = 0$. SOL. $4y = 2x^2 - 2x + 1 - e^{-2x}$.

En los ejercicios 35-37, obténgase de la solución particular indicada el valor de y y el valor de y' en $x = 1$.

35. $y'' + 2y' + y = x + 2$, cuando $x = 0$, $y = 1$ y $y' = 0$.

SOL. En $x = 1$, $y = (e - 1)/e$ y $y' = (e - 1)/e$.

36. $y'' + 2y' + y = x + 2$, cuando $x = 0$, $y = 0$ y $y' = 0$.

SOL. En $x = 1$, $y = (e - 1)/e$ y $y' = 1$.

37. $(D^2 + 1)y = 3$, cuando $x = \pi/2$, $y = 0$ y $y' = 0$.

SOL. En $x = 1$, $y = 0.4756$ y $y' = -1.6209$.

1. Una cuerda es de un material tal que un peso de 5 libras la alarga 6 pulgadas. Cuando el cuerpo de libras de peso se suspende de la cuerda ésta se encuentra en equilibrio. A partir de este momento, la cuerda es jalada 3 pulgadas por debajo de su punto de equilibrio y soltada después con una velocidad inicial, hacia arriba, de 6 pies por segundo. Encontrar la ecuación que nos da la posición del peso en todos los tiempos subsecuentes.

SOL. $x = \frac{1}{4}(\cos 8t - 3 \operatorname{sen} 8t)$.

2. Una cuerda es alargada 1.5 pulgadas por un cuerpo de dos libras de peso. Si el cuerpo es empujado hacia arriba 3 pulgadas por encima de E y soltado en esa posición, describir su movimiento.

SOL. $x = -\frac{1}{4} \cos 16t$.

3. Para la cuerda y el peso del ejercicio 2, suponer que el peso es jalado 4 pulgadas por debajo de E, de tal forma que al soltarlo adquiere una velocidad de 8 pies/seg. Describir el movimiento.

SOL. $x = \frac{1}{3} \cos 16t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 16t$.

4. Demuéstrese que la respuesta del ejercicio 3 puede escribirse como $x = 0.60 \operatorname{sen}(16t + \varphi)$ donde $\varphi = \operatorname{Arctan} \frac{2}{3}$.

5. Una cuerda es de un material tal que un peso de 4 libras la alarga 6 pulgadas. Supóngase que una fuerza de $\frac{1}{2} \cos 8t$ está actuando sobre la cuerda. Si el peso de 4 libras es sacado de su estado de equilibrio por un movimiento hacia arriba que tiene una velocidad de 4 pies/seg, determinar la posición del peso como una función del tiempo. SOL. $x = \frac{1}{4}(t - 2) \operatorname{sen} 8t$.

6. Una cuerda es de un material tal que es alargada 6 pulgadas por un peso de 12 libras. El peso de 12 libras es jalado 3 pulgadas hacia abajo del punto de equilibrio y entonces es soltado. Si sobre la cuerda está actuando una fuerza de magnitud 9 sen $4t$ libras, describir el movimiento. Suponer que la fuerza actúa hacia abajo para t muy pequeña. SOL. $x = \frac{1}{4} \cos 8t - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 8t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 4t$.

7. Demuéstrese que la respuesta al ejercicio 6 puede escribirse como

$$x = \tfrac{1}{4}\sqrt{2} \cos(8t + \pi/4) + \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 4t.$$

8. Una cuerda es de un material tal que un peso de dos libras la alarga $\frac{1}{2}$ pie. Está actuando sobre la cuerda una fuerza de $\frac{1}{4}$ sen $8t$. Si el peso de dos libras se suelta desde un punto situado tres pulgadas abajo del punto de equilibrio, determinar la ecuación de movimiento.

SOL. $x = \frac{1}{4}(1 - t) \cos 8t + \frac{1}{32} \operatorname{sen} 8t$ (pies).

9. Para el movimiento del ejercicio 8, encontrar los primeros cuatro tiempos a los cuales la velocidad es cero, y asimismo la posición correspondiente a cada uno de estos estados.

SOL. $t = \pi/8, \pi/4, 1, 3\pi/8$, (segundos) y $x = -0.15, +0.05, +0.03, +0.04$ (pies), respectivamente.

10. Determínese la posición esperada, si no ocurre ningún frenamiento, al tiempo de que la velocidad es cero por 65 ava vez, cuando $t = 8\pi$ (seg) en el ejercicio 8. SOL. $x = -6.0$ (pies).

11. Una cuerda es de un material tal que un peso de 16 libras la alarga 1.5 pulgadas. El peso se jala 4 pulgadas abajo del punto de equilibrio, dándosele una velocidad hacia abajo de 4 pies/seg. Sobre la cuerda está actuando una fuerza de 360 cos $4t$ libras. Encontrar la posición y la velocidad del peso a un tiempo $t = \pi/8$ segundos.

SOL. En $t = \pi/8$ (segs.), $x = -8/3$ (pies), $v = -8$ (pies/seg).

12. Una cuerda es de un material tal que es alargada 3 pulgadas por un peso de 5 libras. Supóngase que el peso es impulsado desde E con una velocidad hacia arriba de 12 pies/seg. Describir el movimiento. SOL. $x = -1.06 \operatorname{sen} 11.3t$.
13. Para la cuerda y el peso del ejercicio 12, supóngase que el peso es jalado 4 pulgadas hacia abajo de E y que entonces se suelta adquiriendo una velocidad hacia arriba de 8 pies/seg. Describir el movimiento. SOL. $x = 0.33 \cos 11.3t - 0.71 \operatorname{sen} 11.3t$.
14. Encuéntrese la amplitud del movimiento en el ejercicio 13. SOL. 0.78 pies.
15. Una cuerda es de un material tal que se alarga 10 pulgadas cuando se cuelga de ella un peso de 20 libras. Supóngase que la cuerda se comprime 4 pulgadas y que después se le cuelga el peso de 20 libras dándosele una velocidad hacia abajo de 8 pies/seg. Encontrar qué tanto puede caer el peso. SOL. 35 pulg.
16. Una cuerda es de un material tal que un peso de 8 libras puede alargarla 6 pulgadas. Supóngase que un peso de 4 libras es atado a la cuerda y empujado 2 pulgadas hacia arriba del punto de equilibrio y entonces se suelta. Describir el movimiento. SOL. $x = -\frac{1}{6} \cos 11.3t$.
17. Si el peso de 4 libras del ejercicio 16 parte del mismo punto, 2 pulgadas arriba de E, pero con una velocidad hacia arriba de 15 pies/seg, ¿cuándo llega el peso a su punto más bajo? SOL. Aproximadamente en 0.4 seg.
18. Una cuerda es de un material tal que es alargada 4 pulgadas por un peso de 10 libras. Supóngase que el peso se jala 5 pulgadas abajo de E y que entonces se le da una velocidad hacia abajo de 15 pies/seg. Describir el movimiento. SOL. $x = 0.42 \cos 9.8t + 1.53 \operatorname{sen} 9.8t = 1.59 \cos (9.8t - \varphi)$, donde $\varphi = \operatorname{Arctan} 3.64$.
19. Una cuerda es de un material tal que es alargada 4 pulgadas por un peso de 8 libras. Supóngase que el peso es jalado 6 pulgadas por debajo de E adquiriendo entonces una velocidad hacia arriba de 8 pies/seg. Describir el movimiento. SOL. $x = 0.50 \cos 9.8t - 0.82 \operatorname{sen} 9.8t$.
20. Demuéstrese que la respuesta del ejercicio 19 puede escribirse como $x = 0.96 \cos (9.8t + \varphi)$ donde $\varphi = \operatorname{Arctan} 1.64$.
21. Una cuerda es de un material tal que un peso de 4 libras la alarga 6 pulgadas. El sistema está en su punto de equilibrio. En ese momento, ($t = 0$) el peso se jala hacia abajo 3 pulgadas y entonces se suelta. Actuando sobre el sistema hay una fuerza armónica simple externa igual a sen $8t$. Encontrar los tiempos para los que la velocidad es cero las 4 primeras veces (esto es, el peso se para), después de $t = 0$. Representarla en orden cronológico. SOL. $t = \pi/8, \frac{1}{2}, \pi/4, 3\pi/8$ (seg).

1. Un cierto movimiento en línea recta está determinado por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + 169x = 0$$

y las siguientes condiciones: cuando $t = 0$, $x = 0$ y $v = 8$ pies/seg.

a) Encontrar el valor de γ que nos conduce al amortiguamiento crítico, determinar x en términos de t, y trazar la gráfica para $0 \leq t \leq 0.2$. SOL. $\gamma = 13(1/\text{sec.})$, $x = 8te^{-13t}$.

b) Usar $\gamma = 12$. Encontrar x en términos de t y trazar la gráfica. SOL. $x = 1.6e^{-12t} \operatorname{sen} 5t$.

c) Usar $\gamma = 14$. Encontrar x en términos de t y trazar la gráfica. SOL. $x = 0.77(e^{-8.8t} - e^{-19.2t})$.

2. Una cuerda es de tal material que un peso de 2 libras la alarga $\frac{1}{2}$ pie. Actuando sobre la cuerda están dos fuerzas, una motriz de $\frac{1}{4}$ sen $8t$ y una de amortiguamiento de magnitud $|v|$. El peso principia a moverse desde $\frac{1}{4}$ de pie por debajo del punto de equilibrio de la cuerda con una velocidad hacia arriba de 3 pies/seg. Encontrar una fórmula para la posición del peso al tiempo t. SOL. $x = \frac{3}{32}e^{-8t}(3 - 8t) - \frac{1}{32}\cos 8t$.
3. Una cuerda es de un material tal que un peso de 4 libras la alarga 0.64 pies. Al momento de principiar el movimiento el peso de 4 libras ha sido llevado hasta una altura de $\frac{1}{3}$ de pie por encima del punto de equilibrio y entonces soltado con una velocidad hacia abajo de 5 pies/seg. El movimiento tiene lugar en un medio que amortigua al movimiento como si fuera una fuerza de amortiguamiento de una magnitud $\frac{1}{2}|v|$ en todos los tiempos. Encontrar la ecuación que describe la posición del peso en el tiempo t. SOL. $x = \frac{1}{3}e^{-t}(2 \operatorname{sen} 7t - \cos 7t)$.

4. Una cuerda es de un material tal que un peso de 4 libras la alarga 0.32 pies. El peso está dado a la cuerda y se mueve en un medio que actúa como una fuerza de amortiguamiento de magnitud $\frac{3}{2}|v|$. Al principiar el movimiento el peso está $\frac{1}{2}$ pie por debajo del punto de equilibrio y adquiere una velocidad inicial hacia arriba de 4 pies/seg. Encuéntrese la posición del peso de ahí en adelante.
SOL. $x = \frac{1}{8}e^{-6t}(4\cos 8t - \operatorname{sen} 8t)$.
5. Una cuerda es de un material tal que un peso de 4 libras la alarga 0.4 pies. El peso de 4 libras está atado a la cuerda (suspendida de un soporte fijo) y el sistema está en equilibrio. En ese momento el peso, desde el punto de equilibrio, principia su movimiento con una velocidad, hacia arriba, de 2 pies/seg. Supóngase que el movimiento tiene lugar en un medio que actúa como una fuerza retardataria de una magnitud numéricamente igual a la velocidad. en pies por segundo, del peso móvil. Determínese la posición del peso como una función del tiempo. SOL. $x \doteq -\frac{1}{4}e^{-4t}\operatorname{sen} 8t$.
6. Una cuerda es alargada 6 pulgadas por un peso de tres libras. Este peso está atado a la cuerda y principia su movimiento desde el equilibrio con una velocidad hacia arriba de 12 pies/seg. La resistencia del aire actúa como una fuerza retardataria igual en magnitud a $0.03|v|$. Encontrar la ecuación de movimiento.
SOL. $x = -1.5e^{-0.16t}\operatorname{sen} 8t$.
7. Una cuerda es alargada 6 pulgadas por un peso de dos libras. Hay una fuerza amortiguadora presente de una magnitud igual a la magnitud de la velocidad. Actuando sobre la cuerda hay una fuerza motriz $(2\operatorname{sen} 8t)$. Si, en $t = 0$, el peso es soltado desde un punto situado tres pulgadas por debajo del punto de equilibrio, encontrar su posición para $t > 0$. SOL. $x = (\frac{1}{4} + 4t)e^{-8t} - \frac{1}{4}\cos 8t$.
8. Una cuerda es alargada 10 pulgadas por un peso de 4 libras. El peso principia su movimiento desde 6 pulgadas abajo del punto de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 8 pies/seg. Si el movimiento se desarrolla en un medio que actúa como una fuerza retardataria de magnitud $\frac{1}{4}|v|$, describir el movimiento.
SOL. $x = e^{-t}[0.50\cos 6.1t - 1.23\operatorname{sen} 6.1t]$.
9. Para el ejemplo 8, encontrar los tiempos a los que la velocidad es cero (los primeros tres), y la posición del peso en cada una de estas ocasiones.
SOL. $t_1 = 0.3$ sec., $x_1 = -12$ pulgadas; $t_2 = 0.8$ sec., $x_2 = +6$ pulgadas; $t_3 = 1.3$ seg, $x_3 = -4$ pulgadas.
10. Una cuerda es alargada 4 pulgadas por un peso de dos libras. El peso inicia su movimiento desde el punto de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 12 pies/seg. Si la resistencia del aire actúa como una fuerza retardataria de magnitud 0.02 de la magnitud de la velocidad, describir el movimiento.
SOL. $x = 1.22e^{-0.16t}\operatorname{sen} 9.8t$.
11. Para el ejemplo 10, encontrar qué tanto tiempo emplea el factor de amortiguamiento en decaer a un décimo de su valor inicial.
SOL. 14.4 seg.
12. Para el ejemplo 10, encontrar la posición del peso en *a)* la primera parada y *b)* la segunda parada.
SOL. *a)* $x = 1.2$ pies; *b)* $x = -1.1$ pies.
13. Supóngase que el movimiento del ejercicio 8, sección 72, es retardado por una fuerza de amortiguamiento de magnitud $0.6|v|$. Encuéntrese la ecuación de movimiento.
SOL. $x = 0.30e^{-4t}\cos 6.4t + 0.22e^{-4.8t}\operatorname{sen} 6.4t - 0.05\cos 8t$ (pies).
14. Mostrar que siempre que $t > 1$ (seg), la solución del ejercicio 13 puede reemplazarse por $x = -0.05\cos 8t$.
15. Supóngase que el movimiento del ejercicio 8, sección 72, es retardado por una fuerza amortiguadora de magnitud $|v|$. Encontrar la ecuación de movimiento y determinar también su forma para $t > 1$ (segundos).
SOL. $x = \frac{8}{15}(8t + 1)e^{-8t} - \frac{1}{15}\cos 8t$ (ft.); para $t > 1$, $x = -\frac{1}{15}\cos 8t$.
16. Supóngase que el movimiento del ejercicio 8, sección 72, es retardado por una fuerza amortiguadora de magnitud $5/3\,|v|$. Encontrar la ecuación de movimiento.
SOL. $x = 0.30e^{-(8/3)t} - 0.03e^{-24t} - 0.02\cos 8t$.

17. Alterar el ejercicio 6, sección 72, introduciendo en el problema una fuerza amortiguadora de magnitud $\frac{1}{2}$ la magnitud de la velocidad, y determínese entonces x.

SOL. $x = \exp(-\frac{3}{4}t)(0.30 \cos 8.0t - 0.22 \operatorname{sen} 8.0t) - 0.05 \cos 4t + 0.49 \operatorname{sen} 4t.$

18. Una cuerda es alargada 6 pulgadas por un peso de 4 libras. Cuando el peso es empujado hacia abajo del punto de equilibrio 6 pulgadas, se le comunica una velocidad inicial hacia arriba de 7 pies por segundo. Suponiendo que la fuerza de amortiguamiento tiene dos veces la magnitud de la velocidad, describir el movimiento y trazar la gráfica a intervalos de 0.05 seg para $0 \leq t \leq 0.3$ (seg).

SOL. $x = \frac{1}{2}e^{-8t}(1 - 6t)$.

19. Un objeto que pesa w libras es soltado desde una altura de h pies sobre la superficie de la tierra. Al tiempo t(seg) después de que el objeto ha sido soltado, y suponiendo que la distancia que ha recorrido desde el punto de partida es x (pies), medida positivamente hacia abajo, suponiendo además que la resistencia del aire es desdeñable, demuéstrese que x debe satisfacer la ecuación

$$\frac{w}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = w$$

siempre que $x < h$. Encuéntrese x. SOL. $x = \frac{1}{2}gt^2$.

20. Supóngase que al peso del ejercicio 19 se le ha dado una velocidad inicial v_0. Sea v la velocidad al tiempo t. Determinar v y x

SOL. $v = gt + v_0, x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$.

21. De los resultados del ejercicio 20, encuéntrese una relación que no contenga t explícitamente. SOL. $v^2 = v_0^2 + 2gx$.

22. Si la resistencia del aire actúa como una fuerza adicional proporcional a la velocidad en el movimiento estudiado en los ejercicios 19 y 20, demuéstrese que la ecuación del movimiento se transforma en

$$\text{(A)} \qquad \frac{w}{g}\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} = w.$$

Resolver la ecuación (A) dadas las condiciones

$$\text{(B)} \qquad \text{cuando } t = 0,\ x = 0 \text{ y } v = v_0.$$

Emplee $a = bg/w$. SOL. $x = a^{-1}gt + a^{-2}(av_0 - g)(1 - e^{-at})$.

23. Para comparar los resultados de los ejercicios 20 y 22 cuando $a = bg/w$ es pequeño, usar la serie de potencias para e^{-at} en la respuesta del ejercicio 22 y descartar todos los términos que involucren a^n para $n \geq 3$.

SOL. $x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t - \frac{1}{6}at^2(3v_0 + gt) + \frac{1}{24}a^2t^3(4v_0 + gt)$.

24. La ecuación de movimiento de la caída vertical de un hombre con un paracaídas puede estar dada aproximadamente por la ecuación (A) del ejercicio 22. Supóngase que un hombre de 180 libras de peso cae desde una gran altura y alcanza una velocidad de 20 millas por hora después de largo tiempo. Determinar el coeficiente b de la ecuación (A). SOL. 6.1 (lib) (seg) por pie.

25. Una partícula se mueve a lo largo del eje x de acuerdo con la ley

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 25x = 0.$$

Si la partícula principia su movimiento a partir de $x = 0$ con una velocidad inicial de 12 pies/seg, hacia la izquierda, determinar: *a)* x en términos de t; *b)* los tiempos a los cuales la partícula se detiene, y *c)* la razón entre los valores numéricos de x en paradas sucesivas.

SOL. *a)* $x = -3e^{-3t} \operatorname{sen} 4t$,
b) $t = 0.23 + \frac{1}{4}n\pi, n = 0, 1, 2, 3, \cdots$,
c) 0.095.

1. Un reloj tiene un péndulo de seis pulgadas. El reloj hace tic cada vez que el péndulo completa un balanceo, retornando a su posición original. ¿Cuántas veces hará tic el reloj en 30 segundos?

SOL. 38 veces.

2. Un péndulo de seis pulgadas es soltado desde el reposo en un ángulo de un décimo de radian con respecto a la vertical. Usando $g = 32$ (pies/seg²), describir el movimiento. SOL. $\theta = 0.1 \cos 8t$ (rad).

3. Para el péndulo del ejercicio 2 encontrar la máxima velocidad angular y el tiempo en el cual ocurre por vez primera.

SOL. 0.8 (rad/seg) en 0.2 seg.

4. Un péndulo de seis pulgadas principia su movimiento con una velocidad de un radian por segundo, hacia la vertical, desde una posición que está a un décimo de radian de la vertical. Describir el movimiento.

SOL. $\theta = 1/10 \cos 8t - \frac{1}{8} \operatorname{sen} 8t$ (radianes).

5. Para el ejercicio 4, encontrar con la máxima aproximación en grados, el máximo desplazamiento angular con respecto a la vertical.

SOL. 9°.

6. Interprétese como un problema de péndulo y resuélvase

(A) $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \beta^2\theta = 0:\ \beta^2 = \frac{g}{C},$$

(B) $$\text{cuando } t = 0,\ \theta = \theta_0 \text{ y } \omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0.$$

SOL. $\theta = \theta_0 \cos \beta t + \beta^{-1}\omega_0 \operatorname{sen} \beta t$ (radianes).

7. Encontrar el máximo desplazamiento angular desde la vertical para el péndulo del ejercicio 6. SOL. $\theta_{max} = (\theta_0^2 + \beta^{-2}\omega_0^2)^{\frac{1}{2}}$.

En los ejercicios del 8 al 11, encontrar la y que satisface la ecuación (1), sección 74, con la función de carga $W(x)$ dada y las condiciones iniciales en los extremos de la viga. (Ver a), b), c), sección 75.) Verificar las soluciones.

8. La función de carga $W(x)$ igual a la del ejemplo de la sección 75; la viga encajada tanto en $x = 0$, como en $x = 2c$.

SOL. $EIy(x) = [illegible]\, w_0c^2x^2 - [illegible]\, w_0cx^3$

$$+ \frac{w_0}{120c}[5cx^4 - x^5 + (x - c)^5\sigma(x - c)].$$

9. $W(x) = 0,$ para $0 < x < \frac{1}{2}c,$

$= w_0,$ para $\frac{1}{2}c < x < \frac{3}{2}c,$

$= 0,$ para $\frac{3}{2}c < x < 2c;$

viga encajada en $x = 0$ y libre en $x = 2c$.

SOL. $EIy(x) = \frac{1}{2}w_0c^2x^2 - \frac{1}{6}w_0cx^3$

$$+ \tfrac{1}{24}w_0[(x - \tfrac{1}{2}c)^4\alpha(x - \tfrac{1}{2}c) - (x - \tfrac{3}{2}c)^4\alpha(x - \tfrac{3}{2}c)].$$

10. $W(x) = w_0[1 - \alpha(x - c)]$ (describe la carga); viga encajada en $x = 0$ y soportada por un perno (simplemente soportada) en $x = 2c$.

SOL. $EIy(x) = [illegible]\, w_0c^2x^2 - [illegible]\, w_0cx^3$

$$+ \tfrac{1}{24}w_0[x^4 - (x - c)^4\alpha(x - c)].$$

11. $W(x) = \frac{w_0}{c}(2c - x)$, para $0 < x < c$,

$= w_0$, para $c < x < 2c$;

viga encajada en $x = 0$ y libre en $x = 2c$.

SOL. $EIy(x) = [illegible]\, w_0c^2x^2 - [illegible]\, w_0cx^3 + \tfrac{1}{24}w_0x^4$

$$+ \frac{w_0}{120c}[5cx^4 - x^5 + (x - c)^5\alpha(x - c)].$$