INTEGRALES DOBLES SOBRE REGIONES GENERALES.

6. En la integral doble $\iint_D f(x,y)\,dxdy$, colocar los límites de integración en ambos órdenes, para los siguientes recintos:

   i) trapecio de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$ y $(0,1)$.

   ii) segmento parabólico $y = x^2$, $y = 1$.

   iii) círculo $x^2 + y^2 \le 1$.

   iv) círculo $x^2 + y^2 \le y$.

   Solución

   Si dibujamos las gráficas y despejamos cada una de las variables con respecto a la otra, tenemos:

   i) $I = \int_0^1 dx \int_0^{x+1} f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x,y)\,dx.$

   ii) $I = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx.$

   iii) $I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx.$

   iv) $I = \int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{(1-\sqrt{1-4x^2})/2}^{(1+\sqrt{1-4x^2})/2} f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)\,dx.$

---

7. Cambiar el orden de integración en las integrales siguientes:

   a) $\int_0^3 dx \int_{4x/3}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\,dy.$

   b) $\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\,dy.$

   c) $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy.$

   d) $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy.$

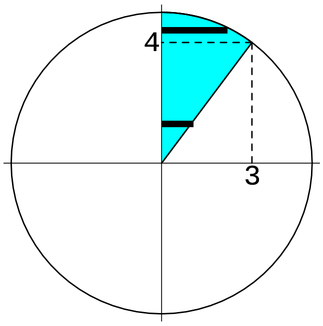
   e) $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dy,\ a > 0.$

f) $\displaystyle\int_1^2 dx \int_x^{x^3} f(x,y)\,dy + \int_2^8 dx \int_x^8 f(x,y)\,dy.$

Solución

a) La región de integración, indicada en la figura, es la que verifica el sistema

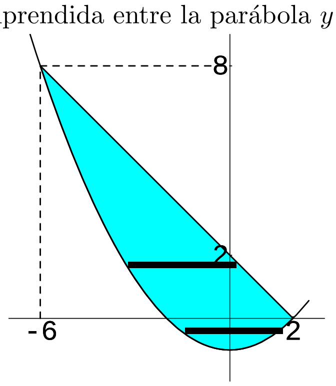
$$0 \le x \le 3,\ \ 4x/3 \le y \le \sqrt{25-x^2}.$$



Como el punto $(3,4)$ es la intersección entre la circunferencia y la recta, la nueva integral se escribirá como

$$\int_0^3 dx \int_{4x/3}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\,dy = \int_0^4 dy \int_0^{3y/4} f(x,y)\,dx + \int_4^5 dy \int_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

b) Se trata de la región comprendida entre la parábola $y = x^2/4 - 1$ y la recta $y = 2 - x$.



Al invertir el orden de integración, la integral se descompone así:

$$I = \int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)\,dx.$$

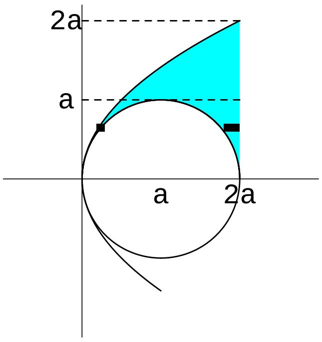
c) La región de integración es el segmento de circunferencia $(x-1)^2 + y^2 = 1$ limitado por la recta $x + y = 2$. La integral se puede escribir como:

$$I = \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

d) Para invertir el orden de integración, basta despejar x en la ecuación $y = \ln x$. Tenemos así:

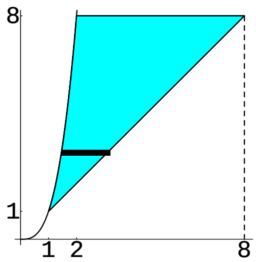
$$I = \int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)\,dx.$$

e) Si observamos la región de integración, al cambiar el orden de integración debemos descomponer la integral en tres sumandos:



$$I = \int_0^a dy \int_{y^2/2a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f\,dx + \int_0^a \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f\,dx + \int_a^{2a} dy \int_{y^2/2a}^{2a} f\,dx.$$

f) La suma de las dos integrales dadas origina la región dada por la figura.



Al cambiar el orden de integración, queda sencillamente:

$$I = \int_1^8 dy \int_{y^{1/3}}^{y} f(x,y)\,dx.$$

---

8. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_1^2 dx \int_{2x}^{3x+1} xy\,dy.$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 dx \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}\,dy.$

(c) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy.$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} dy \int_{|y|}^{1} (x+y)^2\, dx.$

(e) $\displaystyle\int_{0}^{8} dy \int_{y/4}^{\sqrt[3]{y}} e^{x^2}\, dx.$

Solución

(a) Basta resolver directamente las integrales iteradas para obtener:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 dx \int_{2x}^{3x+1} xy\, dy &= \int_1^2 \frac{xy^2}{2}\Big|_{2x}^{3x+1} dx = \int_1^2 \left(\frac{x(3x+1)^2}{2} - \frac{x(2x)^2}{2}\right) dx \\
&= \int_1^2 \frac{5x^3+6x^2+x}{2}\, dx = \left(\frac{5x^4}{8} + x^3 + \frac{x^2}{4}\right)\Big|_1^2 = \frac{137}{8}.
\end{aligned}$$

(b) Calculamos primero la integral respecto a la variable y:

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}\, dy = \int_{-1}^{1} e^{x+y}\Big|_{-2|x|}^{|x|} dx = \int_{-1}^{1} (e^{x+|x|} - e^{x-2|x|})\, dx.$$

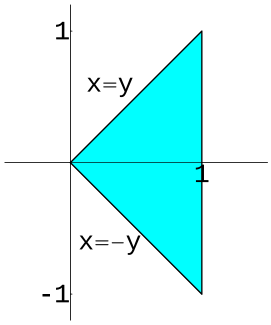
Ahora descomponemos la integral simple en suma de dos integrales para sustituir el valor absoluto:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (e^{x+|x|} - e^{x-2|x|})\, dx &= \int_{-1}^{0} (1 - e^{3x})\, dx + \int_0^1 (e^{2x} - e^{-x})\, dx \\
&= \left(x - \frac{1}{3}\, e^{3x}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{1}{2}\, e^{2x} + e^{-x}\right)\Big|_0^1 \\
&= -\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\, e^{-3} + \frac{1}{2}\, e^2 + e^{-1}.
\end{aligned}$$

(c) Integramos primero respecto a y para lo cual hacemos el cambio de variable $\operatorname{sen} t = y/\sqrt{1-x^2}$. De este modo:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dy &= \int_0^1 dx \int_0^{\pi/2} (\sqrt{1-x^2})^2 \cdot \cos^2 t\, dt \\
&= \int_0^1 (1-x^2)\cdot \left(\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} dx \\
&= \frac{\pi}{4}\int_0^1 (1-x^2)\, dx = \frac{\pi}{4}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

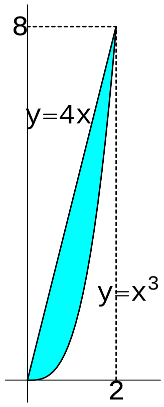
(d) El dominio de integración es la región ilustrada en la figura.



Integramos primero respecto a y y después descomponemos el intervalo $[-1,1]$ en dos subintervalos para calcular la integral respecto a x:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{x^3}{3} + x^2 y + x y^2 \right) \Bigg|_{|y|}^{1} dy \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{3} + y + y^2 - \frac{|y|^3}{3} - y^3 - |y| \cdot y^2 \right) dy \\ &= \int_{-1}^{0} \left(\frac{1}{3} + y + y^2 + \frac{y^3}{3} \right) dy + \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{3} + y + y^2 - \frac{7y^3}{3} \right) dy \\ &= \left(\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{12} \right) \Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{7y^4}{12} \right) \Bigg|_{0}^{1} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(e) La región de integración es la que se ilustra en la figura adjunta.



Intercambiando el orden de integración se obtiene

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 dx \int_{x^3}^{4x} e^{x^2} dy = \int_0^2 (4xe^{x^2} - x^3 e^{x^2})\, dx \\ &= 2e^{x^2}\big|_0^2 - \frac{x^2}{2} e^{x^2}\big|_0^2 + \int_0^2 x e^{x^2} dx = \frac{e^4}{2} - \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

(Aplicar el método de integración por partes en la segunda integral.)

9. Calcular $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ en los siguientes casos:

i) $f(x,y) = xy^2$, D el recinto limitado por $y^2 = 2px$ y $x = p/2$ $(p > 0)$.

ii) $f(x,y) = x^2 + y^2$, D el paralelogramo limitado por $y = x$, $y = x + a$, $y = a$, $y = 3a$.

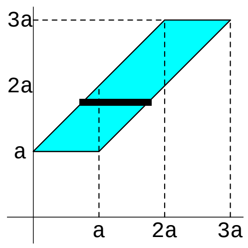
iii) $f(x,y) = x + y$, D está limitado por $y^2 = 2x$, $x + y = 4$, $x + y = 12$.

Solución

i) Escribimos la integral doble en forma de integrales iteradas y resulta:

$$I = \int_0^{p/2} dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} xy^2\,dy = \int_0^{p/2} x \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} dx = \frac{1}{3}\int_0^{p/2} 2x(2px)^{3/2}\,dx = \frac{p^5}{21}.$$

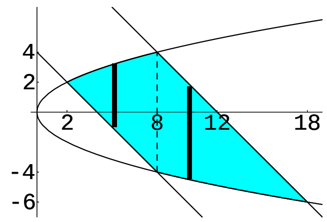
ii) Si observamos el paralelogramo de la figura, observamos que es más conveniente realizar primero la integral respecto a x.



Así,

$$I = \int_a^{3a} dy \int_{y-a}^{y} (x^2 + y^2)\,dx = \int_a^{3a} \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x\right)\Big|_{y-a}^{y} dy = \cdots = 14a^4.$$

iii) Teniendo en cuenta la forma de la región de integración, si integramos primero respecto a y, la integral se descompone en dos sumandos.



Así pues,

$$\begin{aligned} I &= \int_2^8 dx \int_{4-x}^{\sqrt{2x}} (x+y)\,dy + \int_8^{18} dx \int_{-\sqrt{2x}}^{12-x} (x+y)\,dy \\ &= \int_2^8 \left(\sqrt{2}\cdot x^{3/2} - 3x + x^2 - \frac{(4-x)^2}{2}\right) dx \\ &\quad + \int_8^{18} \left(11x - x^2 + \frac{(12-x)^2}{2} + \sqrt{2}\cdot x^{3/2}\right) dx = \frac{8156}{15}. \end{aligned}$$

Otra posibilidad sería restar la integral sobre la región comprendida entre la parábola y la recta $x + y = 12$ y la integral sobre la región comprendida entre la parábola y la recta $x + y = 4$.

---

10. Calcular $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ en los siguientes casos:

    i) $f(x,y) = y,\ D = \{(x,y : 0 \le 2x/\pi \le y \le \operatorname{sen} x\}$.

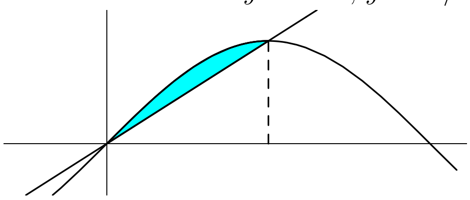
    ii) $f(x,y) = x^2 + y^2,\ D$ recinto limitado por $y = x^2,\ x = 2,\ y = 1$.

    iii) $f(x,y) = x^2 y,\ D$ es el primer cuadrante del círculo $x^2 + y^2 \le 4$.

    iv) $f(x,y) = y,\ D = \{(x,y) : y > 0,\ x^2 + y^2 \le a^2,\ y^2 \ge 2ax,\ x \ge 0\}$.

Solución

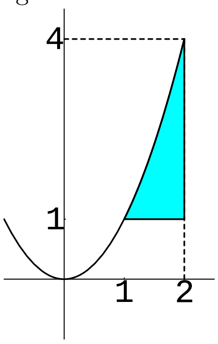
i) Los puntos de intersección de las curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = 2x/\pi$ son $(0,0)$ y $(\pi/2, 1)$.



La integral se calcula entonces de forma directa:

$$I = \int_0^{\pi/2} dx \int_{2x/\pi}^{\operatorname{sen} x} y\,dy = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 x - (2x/\pi)^2}{2}\,dx = \frac{\pi}{24}.$$

ii) La figura adjunta muestra la región dada.



Para calcular la integral podemos seguir dos métodos:

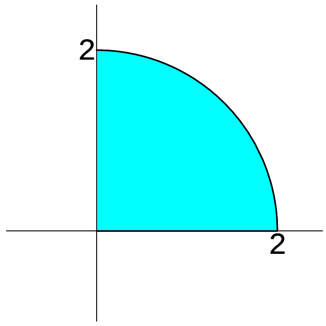
1) Integrando como región de tipo 1.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 dx \int_1^{x^2} (x^2 + y^2)\,dy \\ &= \int_1^2 (x^2 y + y^3/3)\Big|_1^{x^2} dx = \int_1^2 (x^4 + x^6/3 - x^2 - 1/3)\,dx = \frac{1006}{105}. \end{aligned}$$

2) Integrando como región de tipo 2.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 (x^2+y^2)\,dx \\
&= \int_1^4 (x^3/3+xy^2)\Big|_{\sqrt{y}}^2 dy = \int_1^4 (8/3+2y^2-y^{3/2}/3-y^{5/2})\,dy = \frac{1006}{105}.
\end{aligned}
$$

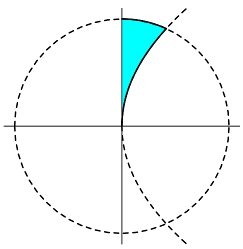
iii) A partir de la figura adjunta obtenemos los límites de integración.



De este modo, la integral se expresa como:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^2 x^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y\,dy = \int_0^2 x^2y^2/2\Big|_0^{\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 (4x^2-x^4)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right]_0^2 = \frac{32}{15}.
\end{aligned}
$$

iv) La intersección de $x^2+y^2=a^2$ con $y^2=2ax$ da $x=a(\sqrt{2}-1)$, y el recinto S es el indicado en la figura.



Teniendo en cuenta la figura, la integral se escribe como

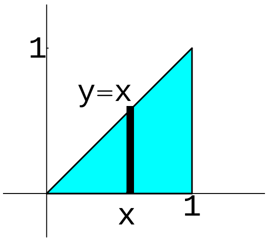
$$
I = \int_0^{a(\sqrt{2}-1)} dx \int_{\sqrt{2ax}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{a(\sqrt{2}-1)} (a^2-x^2-2ax)\,dx = \frac{a^3}{6}(4\sqrt{2}-5).
$$

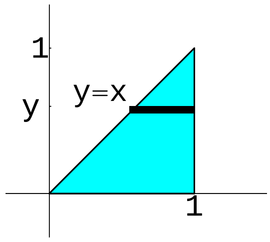
---

11. Si llamamos $A=\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ e $I=2\int_0^1 dx\int_0^x e^{-y^2}\,dy$, probar que $I=2A+e^{-1}-1$.

Solución

La región de integración es el triángulo de la figura.





Intercambiando el orden de integración en I, tenemos:

$$\begin{aligned} I &= 2\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-y^2}\,dx = 2\int_0^1 (e^{-y^2}x)\big|_y^1 dy \\ &= 2\int_0^1 (e^{-y^2} - ye^{-y^2})\,dy = 2\int_0^1 e^{-y^2}\,dy + \int_0^1 -2ye^{-y^2}\,dy \\ &= 2A + e^{-y^2}\big|_0^1 = 2A + e^{-1} - e^0. \end{aligned}$$

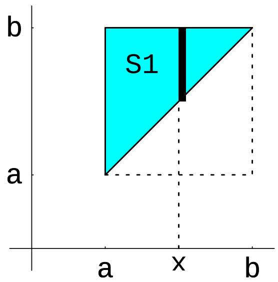
---

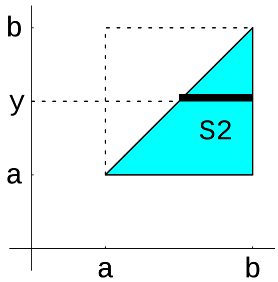
12. Probar que $2\int_a^b dx \int_x^b f(x)f(y)\,dy = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2.$

Solución

Por una parte,

$$I = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) = \int_a^b \int_a^b f(x)f(y)\,dxdy.$$





Descomponiendo el cuadrado en dos triángulos como indica la figura, resulta:

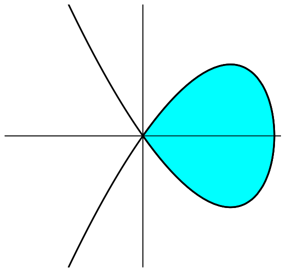
$$\begin{aligned} I &= \iint_{S_1} f(x)f(y)\,dxdy + \iint_{S_2} f(x)f(y)\,dxdy \\ &= \int_a^b dx \int_x^b f(x)f(y)\,dy + \int_a^b dy \int_y^b f(x)f(y)\,dx = 2\int_a^b dx \int_x^b f(x)f(y)\,dy, \end{aligned}$$

pues en el segundo sumando se pueden intercambiar las letras x e y.

---

13. *Hallar el área limitada por el lazo de* $y^2 = x^2(2-x)$.

Solución



Observando la figura se obtiene directamente:

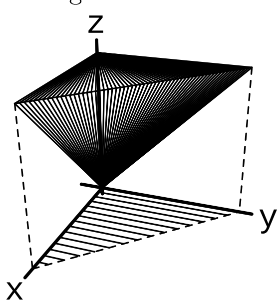
$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^2 dx \int_0^{x\sqrt{2-x}} dy = 2\int_0^2 x\sqrt{2-x}\, dx = \ (\text{sustitución } 2-x=z^2) \\ &= -4\int_{\sqrt{2}}^0 (2z^2 - z^4)\, dz = \frac{32\sqrt{2}}{15}. \end{aligned}$$

---

14. *Hallar el volumen de la región limitada por los planos* $z = x+y$, $z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Solución

La región dada es el tetraedro de la figura.



Si observamos que, cuando x varía entre 0 y 6, y varía entre 0 y $z-x$, con $z=6$, el volumen buscado es:

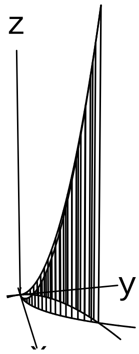
$$V = \int_0^6 dx \int_0^{6-x} [6-(x+y)]\, dy = \int_0^6 (6-x)y - \frac{y^2}{2}\Big|_0^{6-x} dx = \int_0^6 \frac{(6-x)^2}{2}\, dx = 36.$$

---

15. Hallar el volumen del sólido limitado por el paraboloide $x^2 + 4y^2 = z$, el plano $z = 0$ y los cilindros $y^2 = x$, $x^2 = y$.

Solución

La proyección de la figura sobre el plano $z = 0$ es la región limitada por las parábolas $y^2 = x$, $x^2 = y$. Así pues, cuando x varía entre 0 y 1, y varía entre x^2 y $\sqrt{x}$.



El volumen queda ahora

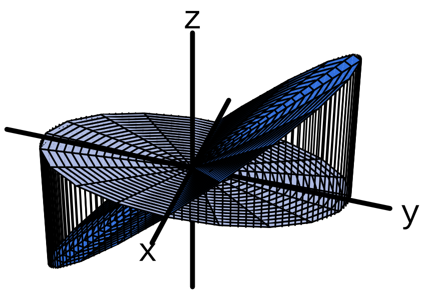
$$V = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + 4y^2)\, dy = \int_0^1 (x^{5/2} + \frac{4}{3}x^{3/2} - x^4 - \frac{4}{3}x^6) dx = \frac{3}{7}.$$

---

16. Hallar el volumen de la porción del cilindro $4x^2 + y^2 = a^2$ comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = my$.

Solución

En primer lugar, observamos que el sólido es simétrico respecto a la recta $y = z = 0$. Por otra parte, la base del sólido es la elipse $4x^2 + y^2 = a^2$, de modo que, cuando x varía entre $-a/2$ y $a/2$, y varía entre 0 y $\sqrt{a^2 - 4x^2}$.



Teniendo en cuenta lo anterior, el volumen queda:

$$V = 2 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{0}^{\sqrt{a^2-4x^2}} my\, dy = m \int_{-a/2}^{a/2} (a^2 - 4x^2)\, dx = \frac{2ma^3}{3}.$$