

INTEGRALES DOBLES SOBRE RECTÁNGULOS.

1. Calcular $\iint_R f$ en los siguientes casos:

(a) $f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^2}$, $R = [3, 4] \times [1, 2]$.

(b) $f(x, y) = \frac{x^2}{1+y^2}$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

(c) $f(x, y) = ye^{xy}$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

(d) $f(x, y) = |\cos(x+y)|$, $R = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

Solución

(a) Como la función es simétrica respecto a sus variables, es indiferente el orden de las integrales iteradas. Podemos poner entonces:

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y) \, dx dy &= \int_0^4 dx \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dy = \int_3^4 \left(\frac{-1}{x+y} \Big|_1^2 \right) dx \\ &= \int_3^4 \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln \frac{|x+1|}{|x+2|} \Big|_3^4 = \ln \frac{25}{24}.\end{aligned}$$

(b) En este caso las variables se pueden separar, de modo que la integral se convierte en producto de integrales simples:

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y) \, dx dy &= \int_0^1 x^2 dx \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy \\ &= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \cdot \arctan y \Big|_0^1 = \frac{\pi}{12}.\end{aligned}$$

(c) Las integrales son inmediatas si integramos en primer lugar respecto a la variable x :

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y) \, dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^1 ye^{xy} dx = \int_0^1 (e^{xy} \Big|_0^1) dy \\ &= \int_0^1 (e^y - 1) dy = (e^y - y) \Big|_0^1 = e - 2.\end{aligned}$$

- (d) Para poder integrar la función valor absoluto, debemos dividir la región de integración como se indica en la figura.

Resulta entonces:

$$\begin{aligned}
 \iint_R f &= \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/2-x} \cos(x+y) dy - \int_0^{\pi/2} dx \int_{\pi/2-x}^{\pi} \cos(x+y) dy \\
 &\quad - \int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_0^{3\pi/2-x} \cos(x+y) dy + \int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_{3\pi/2-x}^{\pi} \cos(x+y) dy \\
 &= \int_0^{\pi/2} (\sin(\pi/2) - \sin x) dx - \int_0^{\pi/2} (\sin(x+\pi) - \sin(\pi/2)) dx \\
 &\quad - \int_{\pi/2}^{\pi} (\sin(3\pi/2) - \sin x) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\sin(x+\pi) - \sin(3\pi/2)) dx \\
 &= (2x + \cos x + \cos(x+\pi)) \Big|_0^{\pi/2} + (2x - \cos x - \cos(x+\pi)) \Big|_{\pi/2}^{\pi} = 2\pi.
 \end{aligned}$$

2. Si f es continua en $R = [a, b] \times [c, d]$, y se define $F(x, y) = \int_a^x du \int_c^y f(u, v) dv$, probar que $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = f(x, y)$, para $a < x < b$, $c < y < d$.

Solución

Llamamos $G(x, y)$ a una función tal que

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = f(x, y).$$

De este modo, por el teorema fundamental del cálculo integral,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = G(x, y) - G(x, c).$$

Derivando respecto a la segunda variable,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial G}{\partial y}(x, c) = f(x, y).$$

Por otra parte, si intercambiamos el orden de integración podemos escribir

$$F(x, y) = \int_c^y dv \int_a^x f(u, v) du = \int_c^y (H(x, v) - H(a, v)) dv,$$

si H es una función tal que $\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = f(x, y)$.

Procediendo ahora de forma análoga al caso anterior, obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = H(x, y) - H(a, y),$$

y, si derivamos respecto a la primera variable,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = f(x, y).$$

3. Sea $f(x, y) = e^{\sin(x+y)}$ y $D = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$. Probar que

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2} \iint_D f(x, y) dx dy \leq e.$$

Solución

Calculamos en primer lugar los máximos y mínimos de la función

$$f(x, y) = e^{\sin(x+y)}$$

en el cuadrado $D = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$.

Para ello resolvemos el sistema

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos(x+y) \cdot e^{\sin(x+y)} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \cos(x+y) \cdot e^{\sin(x+y)} = 0 \end{aligned} \right\} \implies \cos(x+y) = 0 \implies x+y = \frac{(2k+1)\pi}{2}.$$

Los únicos puntos estacionarios de la función en el cuadrado D son los correspondientes a las rectas $x+y = \pi/2$ y $x+y = 3\pi/2$. Como los valores de la función en dichos puntos son e y $1/e$, respectivamente, deducimos que

$$\max\{f(x, y) : (x, y) \in D\} = e, \quad \min\{f(x, y) : (x, y) \in D\} = 1/e.$$

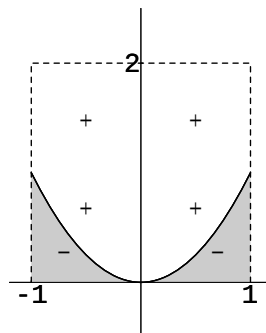
De la desigualdad $1/e \leq f(x, y) \leq e$, concluimos que

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{e} dx dy &\leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D e dx dy \\ \implies \frac{4\pi^2}{e} &\leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq 4e\pi^2. \end{aligned}$$

4. Hallar $I = \int_{-1}^1 dx \int_0^2 \sqrt{|y-x^2|} dy$.

Solución

Dividamos el cuadrado $[-1, 1] \times [0, 2]$ en dos regiones (ver figura) separadas por la parábola $y = x^2$.



La integral buscada se descompone así en:

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy + \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^2 \sqrt{y - x^2} dy = I_1 + I_2.$$

Calculamos por separado ambas integrales:

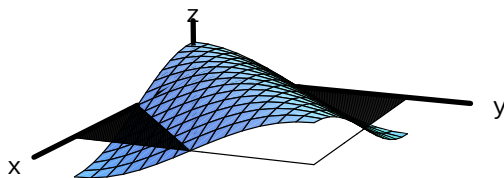
$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^1 -dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy = - \int_{-1}^1 \frac{(x^2 - y)^{3/2}}{3/2} \Big|_0^{x^2} dx = \int_{-1}^1 -\frac{2x^3}{3} dx = 0. \\ I_2 &= \int_{-1}^1 \frac{(y - x^2)^{3/2}}{3/2} \Big|_{x^2}^2 dx = \int_{-1}^1 (2/3) \sqrt{(2 - x^2)^3} dx \\ &= (\text{sustitución } x = \sqrt{2} \cos t) = \frac{2}{3} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 - \cos 2t) dt = \frac{\pi - 2}{3}. \end{aligned}$$

El valor de la integral es entonces $I = \frac{\pi - 2}{3}$.

5. Calcular el volumen del sólido limitado por la función $z = \cos(x - y)$ y el plano $z = 0$, encerrada en el cuadrado $[0, \pi] \times [0, \pi]$.

Solución

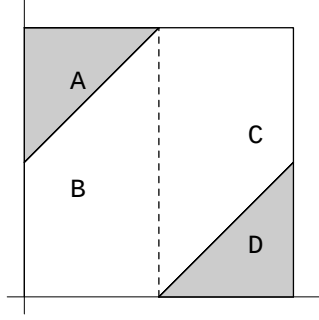
En la figura se muestra la gráfica de la función donde observamos que toma valores positivos y negativos.



En efecto, si $(x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$,

$$\cos(x - y) > 0 \iff -\frac{\pi}{2} < x - y < \frac{\pi}{2} \iff x - \frac{\pi}{2} < y < x + \frac{\pi}{2}.$$

Por tanto, debemos descomponemos el cuadrado S en las regiones A , B , C y D , como se ilustra en la figura adjunta, y calcular la integral como suma de integrales en cada una de dichas regiones.



Así pues:

$$\begin{aligned} V &= \iint_S |\cos(x - y)| \, dx dy \\ &= \iint_A -\cos(x - y) \, dx dy + \iint_B \cos(x - y) \, dx dy \\ &\quad + \iint_C \cos(x - y) \, dx dy - \iint_D \cos(x - y) \, dx dy \\ &= -\int_0^{\pi/2} dx \int_{x+\pi/2}^{\pi} \cos(x - y) \, dy + \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{x+\pi/2} \cos(x - y) \, dy \\ &\quad + \int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_{x-\pi/2}^{\pi} \cos(x - y) \, dy - \int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_0^{x-\pi/2} \cos(x - y) \, dy \\ &= \int_0^{\pi/2} (\text{sen}(x - \pi) - \text{sen}(-\pi/2)) \, dx - \int_0^{\pi/2} (\text{sen}(-\pi/2) - \text{sen } x) \, dx \\ &\quad - \int_{\pi/2}^{\pi} (\text{sen}(x - \pi) - \text{sen}(\pi/2)) \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\text{sen}(\pi/2) - \text{sen } x) \, dx = 2\pi. \end{aligned}$$