CAPÍTULO XII. INTEGRALES IMPROPIAS

SECCIONES

A. Integrales impropias de primera especie.

B. Integrales impropias de segunda especie.

C. Aplicaciones al cálculo de áreas y volúmenes.

D. Ejercicios propuestos.

A. INTEGRALES IMPROPIAS DE PRIMERA ESPECIE.

El concepto de integral definida se refiere a funciones acotadas en intervalos cerrados $[a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Este concepto se puede extender eliminando estas restricciones. Ello da lugar a las integrales impropias.

Llamaremos *integral impropia de primera especie* aquella cuyo intervalo de integración es infinito, ya sea de la forma (a, ∞), $(-\infty, b)$ o bien $(-\infty, \infty)$, pero la función está acotada. Para cada uno de los casos indicados se define

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty f(x)\,dx &= \lim_{B\to\infty} \int_a^B f(x)\,dx, \\
\int_{-\infty}^b f(x)\,dx &= \lim_{A\to-\infty} \int_A^b f(x)\,dx, \\
\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx &= \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to\infty}} \int_A^B f(x)\,dx,
\end{aligned}$$ [1]

y se dice que la integral impropia correspondiente es *convergente* si el límite existe y es finito y *divergente* en caso contrario. Las siguientes propiedades son análogas a las correspondientes en las integrales propias (sólo consideraremos el caso del intervalo (a, ∞) pues el segundo caso se puede reducir al primero con el cambio de variable $t = -x$ y el tercer caso es combinación de los dos anteriores al descomponer la integral en dos sumandos).

PROPIEDADES.

(1) La convergencia de la integral no depende del límite de integración real. Es decir, $\int_a^\infty f(x)dx$ converge $\iff \int_b^\infty f(x)dx$ converge.

(2) **Homogénea.** Si $\int_a^\infty f$ es convergente, entonces $\int_a^\infty \lambda f$ es convergente, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y se cumple:

$$\int_a^\infty \lambda f = \lambda \int_a^\infty f.$$

(3) **Aditiva.** Si $\int_a^\infty f$, $\int_a^\infty g$ convergen, entonces $\int_a^\infty (f+g)$ converge y además

$$\int_a^\infty (f+g) = \int_a^\infty f + \int_a^\infty g.$$

(4) **Integración por partes.** Si f y g tienen derivadas de primer orden continuas en $[a,\infty)$ y dos de los tres límites

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)g'(x)\,dx,\ \lim_{b\to\infty}\int_a^b f'(x)g(x)\,dx,\ \lim_{b\to\infty}[f(b)g(b)-f(a)g(a)]$$

existen, entonces el tercero también existe y se tiene que

$$\int_a^\infty f(x)g'(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}[f(b)g(b)-f(a)g(a)] - \int_a^\infty f'(x)g(x)\,dx.$$

(5) Si $\int_a^\infty |f|$ converge, entonces $\int_a^\infty f$ converge.

Esta última propiedad permite definir el concepto de convergencia absoluta para el caso en que la función integrando no tenga signo constante en $[a,\infty)$.

Dada una función f integrable en $[a,x]$, para todo $x>a$, se dice que $\int_a^\infty$ *converge absolutamente* si la integral $\int_a^\infty |f|$ converge, y que $\int_a^\infty f$ *converge condicionalmente* si $\int_a^\infty f$ converge pero $\int_a^\infty |f|$ diverge.

En los casos en que no sea posible (o no sea necesario) calcular explícitamente la integral, su convergencia se puede deducir por alguno de los siguientes criterios (observar el paralelismo que mantienen algunos de estos criterios con sus correspondientes para la convergencia de series).

CRITERIOS DE CONVERGENCIA.

(1) **Criterio de comparación.** Si f y g son funciones continuas en $[a,\infty)$ y $0\le f(x)\le g(x),\ \forall x>a$, entonces $0\le \int_a^\infty f(x)\,dx \le \int_a^\infty g(x)\,dx$.
Por tanto, si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge.

(2) **Comparación por paso al límite.** Sean f y g continuas y no negativas en $[a,\infty)$.

a) Si $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda\ne 0,\ \lambda$ finito, entonces

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ converge} \iff \int_a^\infty g(x)\,dx \text{ converge.}$$

b) Si $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, entonces

$$\int_a^\infty g(x)\,dx \text{ converge} \implies \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ converge.}$$

En muchos casos, debido a que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge si $\alpha > 1$ y diverge si $\alpha \leq 1$ (ver problema 12.1), se aplica el criterio anterior con $g(x) = 1/x^\alpha$. Este queda entonces así:

(3) Sea f una función continua y no negativa en $[a, \infty)$.

a) Si $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = \lambda \neq 0$, λ finito, entonces

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ converge } \iff \alpha > 1.$$

b) Si $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = 0$ y $\alpha > 1$, entonces $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge.

c) Si $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = \infty$ y $\alpha \leq 1$, entonces $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge.

(4) **Criterio de Dirichlet.** Sean f una función continua con primitiva F acotada $\forall x \geq a$ y g una función decreciente con derivada primera continua $\forall x \geq a$. Si $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, entonces $\displaystyle\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ converge.

(5) **Criterio de la serie asociada.** Sea f una función decreciente y no negativa $\forall x \geq a$, y tal que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Entonces

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ converge } \iff \sum f(n) \text{ converge.}$$

PROBLEMA 12.1

Calcular $\displaystyle\int_a^\infty x^n\,dx$ con $a > 0$.

Solución

Para $n \neq -1$,

$$F(b) = \int_a^b x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}).$$

Si $n > -1$, entonces $\displaystyle\lim_{b\to\infty} F(b) = \infty$, con lo que $\displaystyle\int_a^\infty x^n\,dx$ diverge.

Si $n < -1$, entonces la integral converge y

$$\lim_{b\to\infty} F(b) = \int_a^\infty x^n\,dx = -\frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Para $n = -1$,

$$F(b) = \int_a^b \frac{dx}{x} = \ln b - \ln a$$

y, como $\lim_{b \to \infty} F(b) = \infty$, la integral diverge.

PROBLEMA 12.2

Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x \, dx$.

Solución

Resolvemos directamente la integral:

$$\int_{-\infty}^0 e^x \, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 e^x \, dx = \lim_{a \to -\infty} \left[e^x \right]_a^0 = \lim_{a \to -\infty} (1 - e^a) = 1.$$

PROBLEMA 12.3

Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x}} \, dx$.

Solución

Calcularemos directamente la integral aplicando la definición de integral impropia.

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x}} \, dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-x/2} \, dx = \lim_{b \to \infty} \left[-2e^{-x/2} \right]_0^b = \lim_{b \to \infty} (-2e^{-b/2} + 2) = 2,$$

de lo que se deduce que la integral es convergente.

PROBLEMA 12.4

Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-a|x|} \, dx$, $a \in \mathbb{R}$.

Solución

En primer lugar, si $a = 0$, $e^0 = 1$ y la integral diverge.

Si $a \neq 0$, descomponemos la integral en dos sumandos y obtenemos:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{0} e^{ax}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-ax}\,dx = \lim_{k\to-\infty}\int_{k}^{0} e^{ax}\,dx + \lim_{m\to\infty}\int_{0}^{m} e^{-ax}\,dx \\
&= \lim_{k\to-\infty}\left[\frac{1}{a}e^{ax}\right]_{k}^{0} + \lim_{m\to\infty}\left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\right]_{0}^{m} \\
&= \lim_{k\to-\infty}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{a}e^{ak}\right] + \lim_{m\to\infty}\left[-\frac{1}{a}e^{-am}+\frac{1}{a}\right] = \begin{cases} 2/a & \text{si } a>0, \\ \infty & \text{si } a<0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Resulta en definitiva que la integral propuesta es convergente cuando $a > 0$ y divergente cuando $a \leq 0$.

PROBLEMA 12.5

Calcular $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$.

Solución

Utilizaremos la propiedad (4), relacionada con la integración por partes para integrales impropias. Para ello, tomando $f(x) = x$, $g'(x) = e^{-x}$, tenemos que $f'(x) = 1$, $g(x) = -e^{-x}$ y

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty xe^{-x}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\big[-xe^{-x}\big]_0^b + \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\big[-e^{-x}\big]_0^b = 1,
\end{aligned}$$

debido a que $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\big[-xe^{-x}\big]_0^b = \lim_{b\to\infty} -be^{-b} = \lim_{b\to\infty}\frac{-b}{e^b} = 0.$

PROBLEMA 12.6

Hallar $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

Solución

Como ambos límites de integración son infinitos, descomponemos la integral en dos sumandos. Si escribimos el integrando como $\displaystyle\frac{1}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} + \lim_{b'\to-\infty}\int_{b'}^0 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} \\
&= \lim_{b\to\infty}\big[\operatorname{arc\,tg} e^x\big]_0^b + \lim_{b'\to-\infty}\big[\operatorname{arc\,tg} e^x\big]_{b'}^0 \\
&= \lim_{b\to\infty}(\operatorname{arc\,tg} e^b - \pi/4) + \lim_{b'\to-\infty}(\pi/4 - \operatorname{arc\,tg} e^{b'}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 12.7

Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^8}\,dx$.

Solución

Si calculamos directamente la integral, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^8}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_2^b (1/x)(\ln x)^{-8}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{(\ln x)^{-7}}{-7}\right]_2^b \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{7(\ln b)^7} + \frac{1}{7(\ln 2)^7}\right) = \frac{1}{7(\ln 2)^7},
\end{aligned}$$

de modo que la integral es convergente.

PROBLEMA 12.8

Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{x-e^x}\,dx$.

Solución

Resolvemos en primer lugar la integral indefinida haciendo el cambio de variable $e^x = t$:

$$\int e^{x-e^x}\,dx = \int e^x\cdot e^{-e^x}\,dx = \int e^{-t}\,dt = -e^{-t} = -e^{-e^x}.$$

Calculamos a continuación la integral impropia y tenemos:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{x-e^x}\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b e^{x-e^x}\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}(-e^{-e^b} + e^{-e^a}) = 0+1 = 1;$$

de lo que se deduce que la integral es convergente.

PROBLEMA 12.9 Hallar $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx$.

Solución

El límite superior de integración es infinito con lo que, al integrar por partes, obtenemos:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x} (\operatorname{sen} x + \cos x) \right]_0^b \\ &= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2} e^{-b} (\operatorname{sen} b + \cos b) + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Cuando $b \to \infty$, $e^{-b} \to 0$, mientras que $|\operatorname{sen} b + \cos b| \le 2$, luego $I = 1/2$.

PROBLEMA 12.10

Calcular $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} x^n e^{-x} \, dx$, para $n \in \mathbb{N}$.

Solución

Integrando por partes, obtenemos que

$$\int x^n e^{-x} \, dx = -x^n e^{-x} + n \int x^{n-1} e^{-x} \, dx.$$

Recordando además que $\displaystyle\lim_{b\to\infty} b^n e^{-b} = 0$, resulta:

$$I_n = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x^n e^{-x} \, dx = \lim_{b\to\infty} -b^n e^{-b} + n \lim_{b\to\infty} \int_0^b x^{n-1} e^{-x} \, dx = n \cdot I_{n-1}.$$

Procediendo por recurrencia, se llega a que $I_n = n(n-1) I_{n-2} = \cdots = n! \cdot I_0$ y como $I_0 = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \, dx = 1$, obtenemos que $I_n = n!$

PROBLEMA 12.11

Hallar $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$.

Solución

Por definición de integral impropia, tenemos:

$$I = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{\operatorname{arc\,tg}(x/2)}{2}\right]_0^b = \frac{\pi}{4}.$$

PROBLEMA 12.12

Calcular la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx.$

Solución

Por definición de integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to\infty}}\int_A^B \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx.$$

Resolvemos en primer lugar la integral indefinida para lo cual aplicamos el método de integración por fracciones simples. Como

$$\int \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx = \frac{1}{8}\left[\ln\sqrt{\frac{x^2+9}{x^2+1}} + \operatorname{arc\,tg} x + \frac{7}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3}\right],$$

la integral propuesta valdrá

$$I = \frac{1}{8}\left[\ln 1 + \frac{\pi}{2} + \frac{7}{3}\cdot\frac{\pi}{2} - \ln 1 + \frac{\pi}{2} + \frac{7}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\right] = \frac{5\pi}{12}.$$

PROBLEMA 12.13

Demostrar que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^m}$ *es convergente, para todo* $m \in \mathbb{N}$.

Solución

En efecto, si hacemos el cambio de variable $x = \operatorname{tg} t$, $dx = \sec^2 t\,dt$, los límites de integración son ahora $t = 0$ (correspondiente a $x = 0$) y $t = \pi/2$ (cuando $x = \infty$). La integral queda ahora

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 t\,dt}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^m} = \int_0^{\pi/2} \sec^{2-2m} t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-2} t\,dt,$$

la cual es evidentemente convergente para m natural.

PROBLEMA 12.14

Determinar el valor de C para que sea convergente la integral impropia $\int_1^{\infty}\left(\frac{x}{2x^2+2C}-\frac{C}{x+1}\right)dx$. Hallar el valor de dicha integral.

Solución

Si escribimos la función integrando como cociente de polinomios,

$$\frac{x}{2x^2+2C}-\frac{C}{x+1}=\frac{x^2+x-2Cx^2-2C^2}{(2x^2+2C)(x+1)}=\frac{(1-2C)x^2+x-2C^2}{(2x^2+2C)(x+1)},$$

observamos que el denominador tiene grado 3. Para que la integral sea convergente, el grado del numerador debe ser menor que 2. De aquí se deduce que $1-2C=0$, es decir $C=1/2$.

Para este valor, la integral queda:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\left[\frac{x}{2x^2+1}-\frac{1/2}{x+1}\right]dx &= \lim_{b\to\infty}\left(\int_1^b \frac{x}{2x^2+1}\,dx-\int_1^b\frac{1/2}{x+1}\,dx\right)\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{4}\ln(2x^2+1)-\frac{1}{2}\ln(x+1)\right]_1^b\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{4}\ln(2b^2+1)-\frac{1}{4}\ln 3-\frac{1}{2}\ln(b+1)+\frac{1}{2}\ln 2\right]\\ &= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{4}\cdot\ln\frac{4(2b^2+1)}{3(b+1)^2}=\frac{1}{4}\cdot\ln\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

PROBLEMA 12.15

Hallar los valores de los parámetros a y b para que

$$\int_1^{\infty}\left(\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right)dx=1.$$

Solución

Al igual que en el problema anterior, escribimos el integrando como una fracción para comparar los grados del numerador y denominador. Como

$$\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1=\frac{(b-a)x+a}{x(2x+a)},$$

la integral será convergente cuando $b - a = 0$, es decir $a = b$.

En este caso, si integramos por fracciones simples, obtenemos que

$$\begin{aligned} I &= \int_1^\infty \left(\frac{2x^2 + bx + a}{x(2x+a)} - 1 \right) dx = \lim_{k \to \infty} \left[\ln \left| \frac{x}{2x+a} \right| \right]_1^k \\ &= \lim_{k \to \infty} \ln \frac{k}{2k+a} - \ln \frac{1}{2+a} = \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2+a}. \end{aligned}$$

Como debe ser $1 = \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2+a}$, resulta que $a = b = 2e - 2$.

PROBLEMA 12.16

Estudiar la convergencia de la integral $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\, dx$.

Solución

Resolvemos la integral indefinida por partes haciendo $u = \ln x$ y $dv = dx/x^2$. Así $du = dx/x$, $v = -1/x$ y:

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{1 + \ln x}{x}.$$

La integral impropia queda entonces:

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \lim_{b \to \infty} \left[-\frac{1 + \ln x}{x} \right]_1^b = \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1 + \ln b}{b} + 1 \right) = 1,$$

pues $\lim_{b \to \infty} \ln b / b = 0$ (se puede aplicar por ejemplo la regla de L'Hôpital).

Otra posibilidad, en la que no se calcula directamente la integral, es utilizar el criterio de comparación. Debido a que:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x / x^2}{1/x^{3/2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^{1/2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{(1/2)x^{-1/2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x^{1/2}} = 0,$$

e $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\, dx$ es convergente, se deduce la convergencia de la integral propuesta.

PROBLEMA 12.17

Estudiar la convergencia de la integral $\int_1^\infty \frac{x^2 + 3x + 1}{x^4 + x^3 + \sqrt{x}}\, dx$.

Solución

En primer lugar observamos que la función integrando es positiva en el intervalo de integración. Como la diferencia de grados entre el denominador y el numerador es 2, comparamos el integrando con la función $1/x^2$. Debido a que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+3x+1}{x^4+x^3+\sqrt{x}}}{1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4+3x^3+x^2}{x^4+x^3+\sqrt{x}} = 1,$$

y la integral impropia $\int_1^\infty dx/x^2$ es convergente, la integral propuesta también es convergente.

PROBLEMA 12.18

Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x+1}+5}$.

Solución

Análogamente al problema anterior, la función es positiva en el intervalo $[1,\infty)$. Además, cuando $x\to\infty$, es un infinitésimo del mismo orden que $1/x$, es decir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2x+\sqrt[3]{x+1}+5}}{1/x} = 1/2.$$

Como $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ es divergente, la integral propuesta también lo será.

PROBLEMA 12.19

Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$.

Solución

La convergencia de la integral dada equivale a la convergencia de la integral

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$ porque, en el intervalo $[0,1]$, el integrando es acotado y la integral es propia.

Como la función integrando es positiva en el intervalo de integración, podemos aplicar el criterio de comparación. Así tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x/\sqrt{x^4+1}}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}} = 1,$$

pues el grado del numerador coincide con el grado del denominador. Como la integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ es divergente, también es divergente la integral propuesta.

PROBLEMA 12.20

Investigar la convergencia de la integral $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

Solución

Como el integrando es positivo aplicamos el criterio de comparación por paso al límite. Cuando $x \to \infty$, tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^3(1+1/x^3)}} = \frac{1}{x^{3/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+1/x^3}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Como la integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ es convergente, la integral propuesta también lo será.

PROBLEMA 12.21

Estudiar la convergencia de la integral $\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$.

Solución

Comparamos el integrando con la función $y = 1/x$. Tenemos así:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{(a^2+x^2)^{3/2}}}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3 \cdot (a^2/x^2+1)^{3/2}} = 1.$$

Como $\int_0^\infty \frac{dx}{x}$ es divergente, también lo es la integral propuesta.

PROBLEMA 12.22

Estudiar la convergencia de la integral $\int_3^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^6+1}}$.

Solución

Comparando los grados del numerador y denominador, obtenemos que $g(x) = 1/x^2$ es un infinitésimo equivalente a la función integrando cuando $x \to \infty$.

Como además $\displaystyle\int_3^\infty \frac{dx}{x^2}$ es convergente, por el criterio de comparación deducimos que la integral propuesta es también convergente.

PROBLEMA 12.23

Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Solución

En primer lugar descomponemos la integral en tres sumandos. Además, debido a la simetría de la función integrando, podemos escribir:

$$I = \int_{-\infty}^{-1} e^{-x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx + \int_{1}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx + 2\int_{1}^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Para estudiar la convergencia de esta última integral impropia, como la función integrando es positiva, aplicamos el criterio de comparación. Tenemos por un lado que se verifica la acotación $e^{-x^2} \le e^{-x}$, $\forall x \ge 1$, y por otro lado que

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-b} + e^{-1}\right) = e^{-1}.$$

Esto indica que la integral propuesta es convergente.

PROBLEMA 12.24

Investigar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{2^x}\,dx$.

Solución

Debido a que 2^x es un infinito de orden superior a x^3, es decir $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2^x} = 0$, aplicaremos el criterio de comparación por paso al límite con la función $g(x) = 1/2^x$. Ahora bien, como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3/2^x}{1/2^x} = \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty,$$

e $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{2^x}$ converge, el criterio no puede aplicarse con esta función.

Si tomamos una función un poco mayor que g, como $h(x) = (2/3)^x$, tenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3/2^x}{(2/3)^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(4/3)^x} = 0,$$

y además

$$\int_0^\infty (2/3)^x\, dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{(2/3)^x}{\ln 2/3}\right]_0^b = -\frac{1}{\ln 2/3}.$$

El citado criterio de comparación indica pues que la integral propuesta es convergente.

PROBLEMA 12.25

Determinar si la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{3^x}\, dx$ *converge o no.*

Solución

El integrando es no negativo y decreciente en $[1, \infty)$. Recordamos que, de acuerdo con el criterio de la integral para series infinitas, si f es una función no creciente y no negativa en $[1, \infty)$, entonces $\displaystyle\int_1^\infty f$ y $\displaystyle\sum_{n\ge 1} f(n)$ convergen ambas o divergen ambas.

En este caso la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\ge 1} \frac{\sqrt{n}}{3^n}$ se puede determinar por el criterio de la raíz. Tenemos así:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}/3^{n+1}}{\sqrt{n}/3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot \sqrt{n+1}}{3^{n+1} \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{3} < 1,$$

de modo que la serie converge, con lo que también la integral dada converge.

PROBLEMA 12.26

Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1}\, dx.$

Solución

Aunque la función no está definida en $x = 0$, como $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{e^x - 1} = 1$, la función está acotada para $x > 0$ y la integral no es impropia en $x = 0$. El carácter de esta integral es el mismo que el de la serie asociada $\displaystyle\sum \frac{n}{e^n - 1}$.

Aplicando el criterio de Pringsheim, como $\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{n}{e^n - 1} = 0$ y $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente, también lo es la serie anterior.

PROBLEMA 12.27

Estudiar la convergencia de la integral $\int_0^{\infty} \frac{4x^3 + 2x + 1}{e^x}\,dx$.

Solución

Debido a que la función integrando es positiva en el intervalo de integración y tiende a cero cuando $x \to \infty$, reducimos el estudio de la convergencia de la integral al de la serie asociada $\sum_{n\geq 0} \frac{4n^3 + 2n + 1}{e^n}$. Por el criterio de la raíz,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4n^3 + 2n + 1}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} 1/e < 1.$$

Entonces la integral es convergente.

PROBLEMA 12.28

Estudiar el carácter de la integral $I = \int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{e^x}\,dx$.

Solución

Como la función integrando es no negativa en el intervalo de integración, estudiaremos el carácter de la serie asociada $\sum \frac{\ln(1+n)}{e^n}$.

Aplicando el criterio del cociente tenemos:

$$\lim \frac{\frac{\ln(n+2)}{e^{n+1}}}{\frac{\ln(n+1)}{e^n}} = \lim \frac{\ln(n+2)}{e\ln(n+1)} = \frac{1}{e} < 1,$$

lo que indica que la serie es convergente y, en consecuencia, también es convergente la integral propuesta.

PROBLEMA 12.29

Estudiar el carácter de la integral $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{1 + x^2 \operatorname{sen}^2 x}$.

Solución

Como la serie asociada a la integral impropia es $\sum \dfrac{n}{1+n^2 \operatorname{sen}^2 n}$, la cual es equivalente a la serie $\sum \dfrac{1}{n}$ y esta es divergente, también será divergente la integral dada.

PROBLEMA 12.30

Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} kx}{e^{x^2}}\, dx$.

Solución

Como la función integrando cambia de signo, estudiamos la convergencia absoluta. La serie asociada a la integral es $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{|\operatorname{sen} kn|}{e^{n^2}}$ que es convergente pues $\dfrac{|\operatorname{sen} kn|}{e^{n^2}} \leq \dfrac{1}{e^{n^2}}$ y, por el criterio de la raíz,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{e^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n} = 0 < 1.$$

Lo anterior indica que la integral dada es absolutamente convergente.

PROBLEMA 12.31

Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\, dx$, *para* $\alpha > 0$.

Solución

Como la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ tiene primitiva $F(x) = -\cos x$ acotada y la función $g(x) = 1/x^\alpha$ es derivable y decreciente, con $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, por el criterio de Dirichlet (4) se deduce que la integral es convergente.

PROBLEMA 12.32

Estudiar el carácter de la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\, dx$.

Solución

Como el integrando no es una función positiva en el intervalo de integración, debemos estudiar la convergencia absoluta. Como $|\cos x| \le 1,\ \forall x$, tenemos que $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \le \dfrac{1}{x^2}$ de donde $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx \le \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$, la cual es convergente. Se deduce por el criterio de comparación que la integral propuesta es absolutamente convergente.

Como regla general podemos afirmar que, si en la expresión $\displaystyle\int_1^\infty \frac{f(x)}{x^n}\,dx$ el numerador está acotado, la integral impropia converge absolutamente si lo hace $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^n}$.

PROBLEMA 12.33

Probar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ *converge condicionalmente.*

Solución

Aunque la función no esté definida en $x = 0$, está acotada pues $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Por tanto la convergencia de la integral dada equivale a la convergencia de la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$. Como vimos en el problema 12.31, esta integral es convergente.

Sin embargo, $\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx$ diverge pues, como $|\operatorname{sen} x| \ge \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, tenemos que

$$\int_1^\infty \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx \ge \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}\,dx.$$

De las dos últimas integrales, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ diverge y $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ converge, pues, integrando por partes,

$$\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\right]_1^b + \int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x^2}\,dx = \frac{-\operatorname{sen} 2}{2} + \int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x^2}\,dx,$$

y esta última integral converge absolutamente como se deduce por la acotación $\left|\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2x^2}\right| \le \dfrac{1}{2x^2}$.

De lo anterior se deduce que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ converge condicionalmente.

PROBLEMA 12.34

Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x}\, dx.$

Solución

La integral es impropia por tener un límite de integración infinito. Aunque además la función no está definida en $x = 0$, como $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x} = 0$, la integral no es impropia en $x = 0$.

Para estudiar la convergencia utilizamos la fórmula $\operatorname{sen}^3 x = \dfrac{3\operatorname{sen} x}{4} - \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{4}$. Entonces

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x}\, dx = \frac{3}{4}\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx - \frac{3}{4}\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\, dx,$$

y cada uno de los sumandos es convergente como vimos en el problema anterior. Entonces su suma será también convergente.

B. INTEGRALES IMPROPIAS DE SEGUNDA ESPECIE.

Si una función $y = f(x)$ no está acotada en un intervalo $[a, b]$, no tiene sentido el concepto de integral definida de f en $[a, b]$. Esta situación da lugar a las integrales impropias de segunda especie; para definirlas, distinguimos los siguientes casos:

a) Si f es integrable en $[a, r]$, $\forall r < b$, y $\displaystyle\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$, definimos

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{r\to b^-} \int_a^r f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx.$$

b) Si f es integrable en $[s, b]$, $\forall s > a$, y $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, definimos

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{s\to a^+} \int_s^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\, dx.$$

c) Si existe $c \in (a,b)$ tal que f es integrable en $[a,r] \cup [s,b]$, $\forall r < c,\ s > c$ y $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$, definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{r\to c^-} \int_a^r f(x)\,dx + \lim_{s\to c^+} \int_s^b f(x)\,dx.$$

Al igual que para las integrales impropias de primera especie, se dice que una integral es convergente si existe el límite o límites que las definen.

Las propiedades 1 a 5 enunciadas para las integrales impropias de primera especie son válidas también aquí con las modificaciones obvias. También los criterios de convergencia son análogos a los allí indicados pues existe un paralelismo entre ambos tipos de integrales impropias. Así, en el primer caso, si $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$, al hacer el cambio de variable $b - x = 1/t$, se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{1/(b-a)}^{\infty} g(t)\,dt,$$

y resulta una integral impropia de primera especie.

Escribiremos a continuación los criterios específicos para el caso a) aclarando nuevamente que los demás pueden plantearse de forma similar.

(1) **Criterio de comparación.** Si f y g son funciones continuas en $[a,r]$, $\forall r < b$ y $0 \le f(x) \le g(x)$, $\forall x \in [a,r]$, entonces

$$\int_a^b g(x)\,dx \text{ converge} \implies \int_a^b f(x)\,dx \text{ converge.}$$

(2) **Comparación por paso al límite.** Sean f y g continuas y no negativas en $[a,r]$, $\forall r < b$.

a) Si $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lambda \neq 0,\ \lambda$ finito, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ converge} \iff \int_a^b g(x)\,dx \text{ converge.}$$

b) Si $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, entonces

$$\int_a^b g(x)\,dx \text{ converge} \implies \int_a^b f(x)\,dx \text{ converge.}$$

Como aplicación, es común considerar el criterio de comparación con la función $g(x) = 1/(b-x)^\alpha$ pues $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx$ converge si $\alpha < 1$ y diverge si $\alpha \ge 1$ (ver problema 12.35). Entonces tenemos:

(3) Sea f una función continua y no negativa en $[a,r]$, $\forall r<b$.

a) Si $\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^\alpha f(x)=\lambda\neq 0,\ \lambda$ finito, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ converge } \iff \alpha<1.$$

b) Si $\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^\alpha f(x)=0$ y $\alpha<1$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

c) Si $\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^\alpha f(x)=\infty$ y $\alpha\geq 1$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

En los siguientes ejercicios se muestran también casos en que una integral debe descomponerse como integral impropia de primera y segunda especie.

PROBLEMA 12.35

Resolver $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, con $\alpha\in\mathbb{R}$, donde $a<b$.

Solución

Distinguiremos los siguientes casos:

- Si $\alpha=1$, por definición de integral impropia,

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{dx}{b-x} &= \lim_{r\to b^-}\int_a^r \frac{dx}{b-x}=\lim_{r\to b^-}\big[-\ln(b-x)\big]_a^r\\ &= \lim_{r\to b^-}[-\ln(b-r)+\ln(b-a)]=\infty.\end{aligned}$$

- Si $\alpha\neq 1$,

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} &= \lim_{r\to b^-}\int_a^r \frac{dx}{(b-x)^\alpha}=\lim_{r\to b^-}\left[-\frac{(b-x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_a^r\\ &= \lim_{r\to b^-}\left[\frac{(b-a)^{-\alpha+1}-(b-r)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]=\begin{cases}\infty & \text{si } -\alpha+1<0\\ \frac{(b-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \text{si } -\alpha+1>0.\end{cases}\end{aligned}$$

En definitiva, la integral propuesta es convergente cuando $\alpha<1$ y divergente cuando $\alpha\geq 1$.

PROBLEMA 12.36

Calcular $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{3/2}}$ donde $a<b$.

Solución

Como la función no está acotada en $x = a$, hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{3/2}} &= \lim_{c \to a^+} \int_c^b \frac{dx}{(x-a)^{3/2}} = \lim_{c \to a^+} \left[\frac{-2}{\sqrt{x-a}} \right]_c^b \\ &= \lim_{c \to a^+} \left[\frac{-2}{\sqrt{b-a}} + \frac{2}{\sqrt{c-a}} \right] = \infty. \end{aligned}$$

PROBLEMA 12.37

Calcular $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Solución

El integrando presenta una discontinuidad esencial en $x = 3$. Resulta entonces:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \big[\operatorname{arc\,sen} x/3 \big]_0^{3-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \operatorname{arc\,sen} \frac{3-\varepsilon}{3} = \operatorname{arc\,sen} 1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 12.38

Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(2+x)}}$.

Solución

El integrando $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x)(2+x)}}$ es no negativo y $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \infty$. Tomando $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, tenemos:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{2+x}} = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0.$$

Por tanto, la integral dada converge si y sólo si converge la integral de g. Ahora bien,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b \to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b \to 1^-} \big[-2\sqrt{1-x} \big]_0^b = 2,$$

luego la integral dada es convergente.

PROBLEMA 12.39

Investigar si es convergente la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Solución

La función integrando tiene una discontinuidad en $x = 1$. Comparamos la integral propuesta con la de $1/(1-x)^\alpha$ con α apropiado. Debido a que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1/\sqrt{1-x^4}}{1/(1-x)^\alpha} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(1-x)^\alpha}{\sqrt{1-x^4}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(1-x)^\alpha}{(1-x)^{1/2}\sqrt{(1+x)(1+x^2)}} = 1/2,$$

cuando $\alpha = 1/2$ y además $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/2}}\, dx$ es convergente, del criterio de comparación se deduce la convergencia de la integral propuesta.

PROBLEMA 12.40

Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{4-x^2}}$.

Solución

Aplicamos el criterio de comparación con la integral convergente $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(2-x)^{1/2}}$.
Como

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{4-x^2}}}{\frac{1}{(2-x)^{1/2}}} = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(1+x^2)(2+x)^{1/2}} = \frac{1}{10},$$

la integral es convergente.

PROBLEMA 12.41

Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)^n}}$.

Solución

La integral es impropia porque el integrando tiende a infinito cuando $x \to 1$. Hacemos el cambio de variable $x^3 = t$, $dx = \dfrac{dt}{3t^{2/3}}$. La integral se escribe ahora como $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{3t^{2/3}\sqrt{(1-t)^n}}$. A primera vista parece que se ha complicado la integral pues ahora es impropia para los dos extremos del intervalo. Dividimos éste en dos sumandos:

$$I = \int_0^{1/2} \frac{dt}{3t^{2/3}\sqrt{(1-t)^n}} + \int_{1/2}^1 \frac{dt}{3t^{2/3}\sqrt{(1-t)^n}}.$$

El primer sumando es convergente pues la integral es equivalente a $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^{2/3}}$ que sabemos es convergente. El segundo sumando, al estar acotado $1/t^{2/3}$ en todo el intervalo, será convergente cuando $n/2 < 1$, es decir $n < 2$.

Otro método más sencillo sería descomponer $1 - x^3$ de la siguiente forma $1 - x^3 = (x^2 + x + 1)(1 - x)$. La integral queda entonces

$$I = \int_0^1 \frac{\frac{dx}{\sqrt{(x^2+x+1)^n}}}{(1-x)^{n/2}}.$$

Como el numerador está acotado en todo el intervalo y el grado del denominador es $n/2$, la integral será convergente cuando $n/2 < 1$.

PROBLEMA 12.42

Demostrar que $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2}$ *no existe.*

Solución

El integrando presenta una discontinuidad esencial en $x = 1$, valor comprendido entre los límites de integración. Descomponemos la integral en dos sumandos y resulta:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\varepsilon'\to 0^+} \int_{1+\varepsilon'}^4 \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{-1}{x-1}\right]_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon'\to 0^+} \left[\frac{-1}{x-1}\right]_{1+\varepsilon'}^4 \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) + \lim_{\varepsilon'\to 0^+} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{\varepsilon'}\right) = \infty. \end{aligned}$$

Si no se hubiera tenido en cuenta el punto de discontinuidad, obtendríamos equivocadamente el resultado:

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2} = \left[-\frac{1}{x-1}\right]_0^4 = -\frac{4}{3}$$

pues además no es posible que la integral de una función positiva sea negativa.

PROBLEMA 12.43

Estudiar la convergencia de la integral $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Solución

Como la función no está acotada en $x = 0$, descomponemos la integral en suma:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

Cada uno de los sumandos es convergente pues tiene la forma $\displaystyle\int_{0}^{a} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ con $\alpha < 1$. De ello se deduce que la integral es convergente.

El valor de la integral sería el mismo si no se tuviera en cuenta la discontinuidad esencial en $x = 0$, pero no sería correcto el proceso seguido.

PROBLEMA 12.44

Hallar $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

Solución

Como el integrando presenta una discontinuidad en $x = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{0}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \lim_{\varepsilon'\to 0^+} \int_{1+\varepsilon'}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{3}{2}\left[(x-1)^{2/3}\right]_{0}^{1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon'\to 0^+} \frac{3}{2}\left[(x-1)^{2/3}\right]_{1+\varepsilon'}^{4} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{3}{2}[(-\varepsilon)^{2/3} - 1] + \lim_{\varepsilon'\to 0^+} \frac{3}{2}[\sqrt[3]{9} - (\varepsilon')^{2/3}] = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{9} - 1\right).
\end{aligned}$$

PROBLEMA 12.45

Determinar el carácter de la integral $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{(3-x)(x-2)}}$.

Solución

La integral es impropia porque el integrando tiende a infinito en los dos extremos del intervalo. Separamos la integral en dos sumandos y tenemos:

$$I = \int_2^{2,5} \frac{dx}{\sqrt{(3-x)(x-2)}} + \int_{2,5}^3 \frac{dx}{\sqrt{(3-x)(x-2)}}.$$

Aplicaremos el criterio de comparación para estudiar la convergencia de cada integral. En el caso de que $2 \le x \le 2{,}5$, deducimos que

$$\begin{aligned}(3-x)(x-2) \ge (x-2)/2 \quad &\Longrightarrow \quad \sqrt{(3-x)(x-2)} \ge \frac{(x-2)^{1/2}}{\sqrt{2}} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{(3-x)(x-2)}} \le \frac{\sqrt{2}}{(x-2)^{1/2}}.\end{aligned}$$

Como además $\displaystyle\int_2^{2,5} \frac{\sqrt{2}}{(x-2)^{1/2}}\,dx$ es convergente, también lo será el primer sumando de la integral dada.

Procediendo análogamente con el segundo sumando obtenemos que, si $2{,}5 < x < 3$,

$$\frac{1}{\sqrt{(3-x)(x-2)}} \le \frac{\sqrt{2}}{(3-x)^{1/2}}$$

y sabemos también que $\displaystyle\int_{2,5}^3 \frac{\sqrt{2}}{(3-x)^{1/2}}\,dx$ es convergente.

En definitiva obtenemos que la integral propuesta es convergente.

PROBLEMA 12.46

Determinar la naturaleza de la integral $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}}$.

Solución

Como la integral es impropia en los dos extremos de integración, la dividimos en dos sumandos. Así escribimos

$$I = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}} + \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}} = \int_0^{1/2} \frac{\frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}}}{x^{1/2}} + \int_{1/2}^1 \frac{\frac{dx}{x^{1/2}}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Los numeradores están acotados en los intervalos correspondientes. Por tanto la primera integral tiene el mismo carácter que $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^{1/2}}$ que sabemos es convergente. Con respecto a la segunda integral podemos factorizar el denominador y escribir $\int_{1/2}^{1} \frac{\frac{dx}{x^{1/2}}}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{1/2}^{1} \frac{\frac{dx}{x^{1/2}}}{(1-x)^{1/2}(1+x)^{1/2}}$. Esta integral es equivalente en cuanto a su carácter a la integral $\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{(1-x)^{1/2}}$ que es también convergente.

En definitiva, la integral dada es convergente.

PROBLEMA 12.47

Hallar $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\, dx$.

Solución

El integrando presenta una discontinuidad en $x = \pi/2$, de modo que

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{\pi/2-\varepsilon} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \Big[-2(1-\operatorname{sen} x)^{1/2}\Big]_0^{\pi/2-\varepsilon} \\ &= -2 \lim_{\varepsilon\to 0^+} \{[1-\operatorname{sen}(\pi/2-\varepsilon)]^{1/2} - 1\} = 2. \end{aligned}$$

PROBLEMA 12.48

Calcular la integral $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$.

Solución

Esta integral es impropia porque el integrando no está acotado en $x = 0$. Si realizamos la integral indefinida por partes, tenemos:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{a\to 0^+} \left(2\sqrt{x}\ln x\Big]_a^1 - \int_a^1 \frac{2\sqrt{x}}{x}\, dx \right) \\ &= \lim_{a\to 0^+} \Big[2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}\Big]_a^1 = -4 - \lim_{a\to 0^+} (2\sqrt{a}\ln a - 4\sqrt{a}) \\ &= -4 - \lim_{a\to 0^+} \frac{2\ln a}{a^{-1/2}} = -4 - \lim_{a\to 0^+} \frac{2/a}{(-1/2)a^{-3/2}} = -4. \end{aligned}$$

PROBLEMA 12.49

Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Solución

Por definición de integral impropia, tenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \lim_{B\to 1^-}\int_0^B \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= \lim_{B\to 1^-}\left[\frac{(\operatorname{arc\,sen} x)^2}{2}\right]_0^B = \frac{(\pi/2)^2}{2} = \frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

PROBLEMA 12.50

Determinar los valores de m *para que* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x^m}\,dx$ *sea convergente.*

Solución

Debido a la equivalencia $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ si $x \to 0$, entonces $\dfrac{1-\cos x}{x^m} \sim \dfrac{1}{2x^{m-2}}$ y las dos integrales $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x^m}\,dx$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2x^{m-2}}\,dx$ tienen el mismo carácter (convergen o divergen a la vez). De aquí se deduce que la integral es convergente cuando $m-2<1$, o bien $m<3$, y divergente cuando $m \ge 3$.

PROBLEMA 12.51

Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx$.

Solución

Como la función no está acotada en $x=0$ ni en $x=1$, descomponemos la integral en dos sumandos así:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx = \int_0^\alpha \frac{\ln x}{1-x}\,dx + \int_\alpha^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx, \text{ con } 0<\alpha<1.$$

Aplicamos el criterio de comparación para estudiar la convergencia de cada una de las integrales. Debido a que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln x}{1-x}}{1/x^{1/2}} = 0$$

y que $\displaystyle\int_0^\alpha \frac{dx}{x^{1/2}}$ es convergente, el primer sumando es convergente.

Análogamente, como

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{\ln x}{1-x}}{1/\sqrt{1-x}} = 0$$

y $\displaystyle\int_\alpha^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ es convergente, el segundo sumando es también convergente. De lo anterior se deduce que la integral propuesta es convergente.

PROBLEMA 12.52

Determinar la naturaleza de la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}\,dx}{x^a \ln x}$ según los *valores de* $a > 0$.

Solución

Como la función integrando no está definida en $x = 0$ ni en $x = 1$, descomponemos la integral en dos sumandos

$$I = \int_0^{1/2} \frac{\sqrt{1-x}\,dx}{x^a \ln x} + \int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1-x}\,dx}{x^a \ln x} = I_1 + I_2.$$

En la segunda integral hacemos el cambio de variable $z = 1 - x$, con lo que

$$I_2 = \int_0^{1/2} \frac{\sqrt{z}\,dz}{(1-z)^a \ln(1-z)}.$$

Debido a la equivalencia de infinitésimos $\ln(1-z) \sim -z$ cuando $z \to 0$, podemos comparar la integral con $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{-\sqrt{z}\,dz}{z} = \int_0^{1/2} \frac{-dz}{\sqrt{z}}$ y esta última es convergente.

Estudiamos ahora el primer sumando, que es una integral impropia en $x = 0$ porque

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}}{x^a \ln x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{-a}}{\ln x} = \lim_{x\to 0} \frac{-ax^{-a-1}}{1/x} = \infty.$$

Compararemos la integral con $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^b}$ que es convergente si $b < 1$ y divergente si $b \geq 1$. Calculando el límite del cociente, obtenemos:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-x}/x^a \ln x}{1/x^b} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{b-a}}{\ln x} = \begin{cases} 0 & \text{si } b \geq a \\ \infty & \text{si } b < a. \end{cases}$$

De este modo, si $a < 1$, elegimos $b = a$, en cuyo caso el límite del cociente es cero y la integral I_1 es convergente. Por otra parte, si $a > 1$, elegimos $b = 1$ lo que hace que el límite del cociente sea infinito y la integral sea divergente.

Estudiaremos por último el caso $a = 1$. Como $\int_0^{1/2} \frac{\sqrt{1-x}}{x \ln x}\, dx$ tiene el mismo carácter que $\int_0^{1/2} \frac{1}{x \ln x}\, dx$ pues $\sqrt{1-x}$ está acotada en $(0, 1/2)$, y además

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x \ln x}\, dx = \lim_{a\to 0^+} \big[\ln|\ln x|\big]_a^{1/2} = \infty,$$

la integral es también divergente.

En definitiva, obtenemos que la integral propuesta es convergente cuando $a < 1$ y divergente cuando $a \geq 1$.

PROBLEMA 12.53

Estudiar el carácter de la integral $I = \int_0^1 x^3\, e^{1/x}\, dx$.

Solución

Si hacemos el cambio de variable $x = 1/t$, resulta la integral $I = \int_1^\infty \frac{e^t}{t^5}\, dt$.

Ahora bien, como la sucesión de término general $a_n = \frac{e^n}{n^5}$ es divergente, $(\lim a_n = \infty)$, la serie $\sum a_n$ es divergente. Por el criterio de la serie asociada, la integral impropia I es también divergente.

PROBLEMA 12.54

Estudiar la convergencia de la integral $\int_0^\pi \frac{dx}{1-\cos x}$.

Solución

El denominador se anula cuando $x = 0$; por tanto el integrando no está acotado en $x = 0$. Debido a la equivalencia $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, resulta que la integral propuesta tiene el mismo carácter que $\int_0^{\pi} \frac{dx}{x^2}$. Como ésta es divergente, también lo es la integral propuesta.

PROBLEMA 12.55

Estudiar la convergencia de la integral $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x + x^4}}\, dx$.

Solución

Descomponemos la integral en dos sumandos como

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x + x^4}}\, dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x + x^4}}\, dx.$$

Así tenemos dos integrales impropias: la primera es de segunda especie pues la función no está acotada en $x = 0$ y la segunda de primera especie, pues el intervalo de integración es infinito. Aplicamos el criterio de comparación en ambos casos. Por una parte,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1/\sqrt{x + x^4}}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1 + x^3}} = 1$$

e $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ es convergente.

Por otra parte,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1/\sqrt{x + x^4}}{1/x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x + x^4}} = 1$$

e $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ es convergente. Como ambas integrales son convergentes, también lo será la suma de ambas.

PROBLEMA 12.56

Estudiar la convergencia de la integral $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$.

Solución

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \infty$, la integral es impropia en ambos extremos de integración. Calculando directamente la integral, obtenemos:

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx &= -2e^{-\sqrt{x}} \Longrightarrow \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\substack{A\to 0^+\\ B\to\infty}} \left[-2e^{-\sqrt{x}}\right]_A^B \\ &= \lim_{\substack{A\to 0^+\\ B\to\infty}} \left[-2e^{-\sqrt{B}} + 2e^{-\sqrt{A}}\right] = 2.\end{aligned}$$

PROBLEMA 12.57

Determinar los valores de a *para los cuales es convergente la integral* $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$.

Solución

Por una parte el intervalo de integración es infinito y por otra, en el caso de que $a - 1 < 0$, el integrando no está acotado en $x = 0$. Debemos pues descomponer la integral en dos sumandos

$$I = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx + \int_1^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx.$$

La primera integral tiene el mismo carácter que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-a}}$, la cual es convergente cuando $1 - a < 1$, es decir $a > 0$.

Con respecto al segundo sumando, debido a la equivalencia $1+x \sim x$, cuando $x \to \infty$, la integral es equivalente a $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^{a-1}}{x}\,dx = \int_1^\infty x^{a-2}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^{2-a}}\,dx$, la cual es convergente si $2 - a > 1$, o bien $a < 1$.

En definitiva, las dos condiciones indican que la integral propuesta es convergente cuando $0 < a < 1$ y divergente en caso contrario.

PROBLEMA 12.58

Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}-1}{x^\alpha}\,dx$ *según los distintos valores de* α.

Solución

Debido a que la función integrando no está acotada en $x = 0$ cuando $\alpha > 1$, descomponemos la integral en dos sumandos

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - 1}{x^\alpha}\, dx = \int_0^1 \frac{e^{-x} - 1}{x^\alpha}\, dx + \int_1^\infty \frac{e^{-x} - 1}{x^\alpha}\, dx,$$

y estudiamos la convergencia de cada uno de ellos. En el primer sumando, como $e^{-x} - 1 \sim -x$ si $x \to 0$, entonces $\left|\frac{e^{-x} - 1}{x^\alpha}\right| \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}$, de modo que la integral es convergente si $\alpha - 1 < 1$ y divergente si $\alpha - 1 \geq 1$.

Para el segundo sumando, como $\lim_{x\to\infty} \left|\frac{e^{-x} - 1}{x^\alpha}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^\alpha}$, la convergencia equivale a la de la integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$. Por tanto, converge si $\alpha > 1$ y diverge si $\alpha \leq 1$.

Como la integral propuesta es convergente cuando lo sean ambos sumandos, tenemos que es convergente cuando $\alpha \in (1, 2)$ y divergente en el resto.

PROBLEMA 12.59

Probar que la integral impropia $\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{e^t - 1}\, dt$ *converge si* $\alpha > 1$ *y diverge si* $\alpha \leq 1$.

Solución

Descomponemos la integral en dos sumandos como

$$\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{e^t - 1}\, dt = \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{e^t - 1}\, dt + \int_1^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{e^t - 1}\, dt,$$

y estudiamos la convergencia de cada uno de ellos.

El primer sumando corresponde a una integral impropia de segunda especie. Debido a la equivalencia $e^t - 1 \sim t$ cuando $t \to 0$, resulta que $\frac{t^{\alpha-1}}{e^t - 1} \sim \frac{1}{t^{2-\alpha}}$. Esto indica que la integral converge cuando $2 - \alpha < 1$, es decir $\alpha > 1$, y diverge cuando $\alpha \leq 1$.

El segundo sumando es siempre convergente como se deduce al compararlo con la integral convergente $\int_1^\infty \frac{dt}{t^2}$. En efecto:

$$\lim_{t\to\infty} t^2 \cdot \frac{t^{\alpha-1}}{e^t - 1} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{\alpha+1}}{e^t - 1} = 0.$$

La integral propuesta es por tanto convergente cuando $\alpha > 1$.

PROBLEMA 12.60

Se define la función $\Gamma(x)$ como:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

a) Probar que converge para $x > 0$ y diverge para $x \le 0$.

b) Probar que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ para $x > 0$.

c) De lo anterior, deducir que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para cualquier n natural.

Solución

a) Vamos a separar el estudio en tres casos:

- $x \ge 1$: La integral es impropia de primera especie pues la función está acotada. Aplicamos el criterio de comparación con $\int_1^\infty \frac{dt}{t^2}$, que es convergente:

$$\lim_{t\to\infty} t^2 \cdot t^{x-1} e^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{2+x-1}}{e^t} = 0,$$

como se deduce al aplicar la regla de L'Hôpital sucesivas veces (el denominador es un infinito de orden superior al del numerador). Esto indica que la integral impropia es convergente.

- $0 < x < 1$: En este caso la integral también es impropia de segunda especie pues en $x = 0$ la función no está acotada. Descomponemos la integral como

$$\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt + \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

El segundo sumando es convergente (se procede como en el caso anterior); para estudiar la convergencia del primer sumando aplicamos de nuevo el criterio de comparación con $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ donde elegimos cualquier α que cumpla $1 > \alpha > 1 - x$. Debido a que

$$\lim_{t\to 0^+} t^\alpha \cdot t^{x-1} e^{-t} = \lim_{t\to 0^+} t^{\alpha+x-1} = 0,$$

y a que $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ es convergente, también la integral propuesta es convergente.

- $x \le 0$: De nuevo tenemos una integral impropia de segunda especie. Aplicamos el criterio de comparación con $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$, haciendo $\alpha = 1-x \geq 1$. Resulta:

$$\lim_{t\to 0^+} t^\alpha \cdot t^{x-1}e^{-t} = \lim_{t\to 0^+} e^{-t} = 1$$

y, como $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ es divergente, también lo es la integral propuesta.

b) Aplicando el método de integración por partes,

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b t^x e^{-t}\,dt = \lim_{b\to\infty} \big[-t^x e^{-t}\big]_0^b + \lim_{b\to\infty} x \int_0^b t^{x-1}e^{-t}\,dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{b^x}{e^b} + x\Gamma(x) = x\Gamma(x).
\end{aligned}$$

c) Aplicando el apartado b) sucesivas veces, tenemos:

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = \dots = (n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1\cdot \Gamma(1).$$

Como además $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$, deducimos que $\Gamma(n) = (n-1)!$

C. APLICACIONES AL CÁLCULO DE ÁREAS Y VOLÚMENES.

El concepto de integral impropia permite también aplicarlo al cálculo de áreas y volúmenes de regiones no acotadas. Como veremos en los problemas siguientes, es posible que regiones no acotadas tengan áreas o volúmenes finitos, lo cual será debido a la convergencia de las integrales que las definen.

PROBLEMA 12.61

Resolver $\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arc\,tg} t)^2\,dt}{\sqrt{x^2+1}}$.

Solución

La integral del numerador es divergente porque $\lim\limits_{t\to\infty}(\operatorname{arc\,tg} t)^2 = \pi^2/4 \neq 0$. Como el límite del denominador también es infinito, tenemos una indeterminación ∞/∞. Aplicando la regla de L'Hôpital,

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arc\,tg} t)^2\, dt}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{x/\sqrt{x^2+1}} = \frac{\pi^2/4}{1} = \pi^2/4.$$

PROBLEMA 12.62

Resolver $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2}\, dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\, dt}$.

Solución

Como las integrales $\displaystyle\int_0^\infty e^{t^2}\, dt$ y $\displaystyle\int_0^\infty e^{2t^2}\, dt$ son divergentes (los integrandos son funciones que no están acotadas en $(0,\infty)$), tenemos una indeterminación del tipo ∞/∞. Aplicando por dos veces la regla de L'Hôpital, resulta:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\, dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\, dt} = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{x^2}\int_0^x e^{t^2}\, dt}{e^{2x^2}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2\int_0^x e^{t^2}\, dt}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} 1/x = 0. \end{aligned}$$

PROBLEMA 12.63

Sea F la función definida en todo $\mathbb{R}$ por $F(x) = \displaystyle\int_1^{1+x^2} \frac{e^t}{t}\, dt$.

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de F.

b) Probar que $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \infty$.

Solución

a) Como la función integrando $f(x) = e^x/x$ es continua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, será integrable en cualquier intervalo que no contenga al cero. Esto implica que F es continua en $\mathbb{R}$ pues, al ser $1+x^2 > 0$, cualquier punto del intervalo $[1, 1+x^2]$ es positivo. Además es también derivable en todo $\mathbb{R}$, siendo

$$f'(x) = \frac{e^{1+x^2}}{1+x^2} \cdot 2x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Como $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \int_1^\infty \frac{e^t}{t}\, dt$, debemos estudiar la convergencia de esta integral impropia.

Debido a que $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{e^t}{t} = \infty$, la función integrando no está acotada, de modo que la integral es divergente. Tenemos en definitiva que

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = +\infty.$$

PROBLEMA 12.64

Demostrar la acotación

$$\frac{e^{-x^2}}{2x\left(1+\frac{1}{2x^2}\right)} \leq \int_x^\infty e^{-t^2}\, dt \leq \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

Solución

Integramos en primer lugar por partes, haciendo $u = \frac{1}{2t}$ y $dv = 2te^{-t^2}dt$. Así:

$$\begin{aligned} \int_x^\infty e^{-t^2}\, dt &= \int_x^\infty \frac{1}{2t} \cdot 2te^{-t^2}\, dt = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-1}{2t} \cdot e^{-t^2}\right]_x^b - \int_x^\infty \frac{1}{2t^2} \cdot e^{-t^2}\, dt \\ &\Longrightarrow \int_x^\infty \left(1+\frac{1}{2t^2}\right) \cdot e^{-t^2}\, dt = \frac{e^{-x^2}}{2x}. \end{aligned}$$

Como $x \leq t$, $1+\frac{1}{2t^2} \leq 1+\frac{1}{2x^2}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} &\frac{e^{-x^2}}{2x} = \int_x^\infty \left(1+\frac{1}{2t^2}\right) \cdot e^{-t^2}\, dt \leq \int_x^\infty \left(1+\frac{1}{2x^2}\right) \cdot e^{-t^2}\, dt \\ \Longrightarrow &\int_x^\infty e^{-t^2}\, dt \geq \frac{e^{-x^2}}{2x\left(1+\frac{1}{2x^2}\right)} \text{ y también } \int_x^\infty e^{-t^2}\, dt \leq \frac{e^{-x^2}}{2x}. \end{aligned}$$

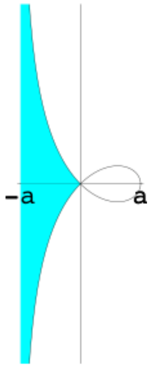
Observación. Esta acotación permite estimar el error que se comete al despreciar el área situada bajo la curva $y = e^{-x^2}$ para valores grandes de x.

PROBLEMA 12.65

Hallar el área comprendida entre la estrofoide $y^2(a+x) = x^2(a-x)$ y su asíntota.

Solución

En forma explícita, la ecuación es $y = \pm x\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$ y su asíntota es la recta $x = -a$.



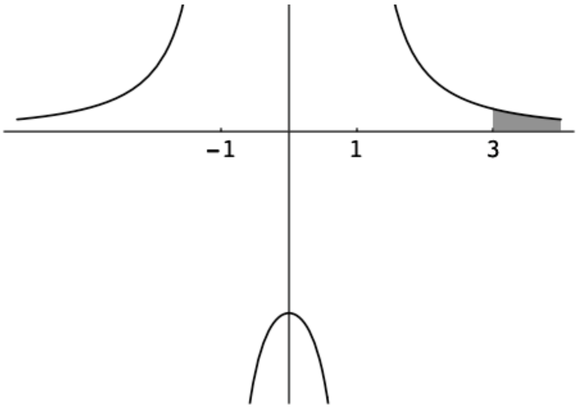
De acuerdo con la figura y teniendo en cuenta la simetría, el área es:

$$A = 2\int_{-a}^{0} x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx = 2\lim_{r\to -a^+}\int_{r}^{0} x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx = \frac{a^2(4+\pi)}{2}.$$

PROBLEMA 12.66

Hallar el área situada a la derecha de $x = 3$ y limitada por la curva $y = \dfrac{1}{x^2-1}$ y el eje X.

Solución



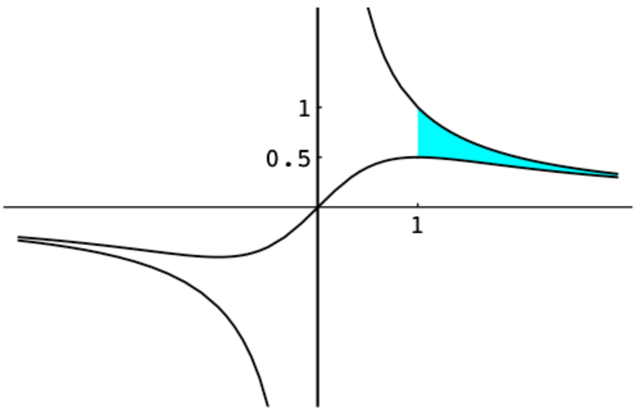
De acuerdo con la gráfica, el área viene dada por la fórmula $A = \int_3^\infty \frac{dx}{x^2-1}$ que es una integral impropia. Resolviendo la integral indefinida por el método de fracciones simples, obtenemos:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{b\to\infty} \int_3^b \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left[\ln \frac{x-1}{x+1}\right]_3^b \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \ln \frac{b-1}{b+1} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \ln \frac{1-1/b}{1+1/b} + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

PROBLEMA 12.67

Calcular el área limitada por las curvas $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{x}{1+x^2}$ *en el intervalo* $x \in [1, \infty)$.

Solución



De acuerdo con la gráfica y por definición de integral impropia, tenemos:

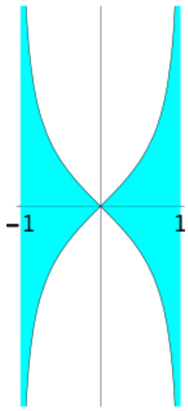
$$\begin{aligned} A &= \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\ln\frac{b}{\sqrt{1+b^2}} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \ln\sqrt{2}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 12.68

Hallar el área limitada por la curva $x^2y^2 + x^2 - y^2 = 0$ y sus asíntotas y el volumen engendrado por dicha área al girar alrededor del eje X.

Solución

a) Si despejamos la variable y, la curva se expresa como $y = \pm\sqrt{\dfrac{x^2}{1-x^2}}$ lo que indica que las asíntotas son $x = 1$ y $x = -1$.



Teniendo en cuenta que la curva es simétrica respecto a los dos ejes de coordenadas (lo que se deduce al sustituir x por $-x$ e y por $-y$), el área vendrá dada por la fórmula $A = 4\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Como el integrando presenta una discontinuidad en $x = 1$, debemos calcular

$$A = 4\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 4\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\sqrt{1-x^2}\right]_0^{1-\varepsilon} = 4\lim_{\varepsilon\to 0^+}(1-\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}) = 4.$$

b) Aprovechando de nuevo las simetrías y aplicando el método de los discos, tenemos:

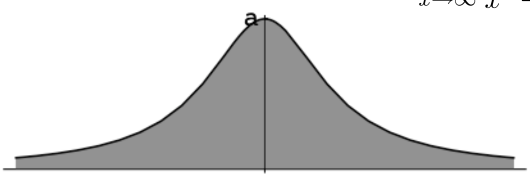
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{1} y^2\,dx = 2\pi \int_0^1 y^2\,dx = 2\pi \int_0^1 \frac{x^2}{1-x^2}\,dx \\ &= 2\pi \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x^2}{1-x^2}\,dx = 2\pi \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[-x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2}\right]_0^{1-\varepsilon} = \infty. \end{aligned}$$

PROBLEMA 12.69

Hallar el área de la región comprendida entre la curva de Agnesi $y = \dfrac{a^3}{x^2+a^2}$ y el eje de abscisas y el volumen engendrado por la misma región al girar alrededor del eje X.

Solución

El eje de abscisas es la asíntota de la curva, pues $\lim_{x\to\infty} \dfrac{a^3}{x^2+a^2} = 0$.



a) Teniendo en cuenta la simetría de la figura, el área viene dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^3}{x^2+a^2}\,dx = 2\int_0^{\infty} \frac{a}{(x/a)^2+1}\,dx = \lim_{b\to\infty} 2a^2 \int_0^b \frac{1/a}{(x/a)^2+1}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[2a^2 \operatorname{arc\,tg}(x/a)\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} 2a^2 \operatorname{arc\,tg}(b/a) = \pi a^2. \end{aligned}$$

b) Aplicando el método de los discos, el volumen se obtiene por la fórmula

$$V = \pi \int_{-\infty}^{\infty} y^2(x)\,dx = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{a^6}{(x^2+a^2)^2}\,dx.$$

Para realizar la integración aplicamos el cambio de variable $x = a \operatorname{tg} t$, con lo que $x = 0 \Longrightarrow t = 0$ y $x = \infty \Longrightarrow t = \pi/2$ y obtenemos:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\infty} \frac{a^6}{(x^2+a^2)^2}\,dx = 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{a^2}{\sec^4 t} \cdot a \sec^2 t\,dt \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} a^3 \cos^2 t\,dt = 2\pi a^3 \cdot \pi/4 = \pi^2 a^3/2. \end{aligned}$$

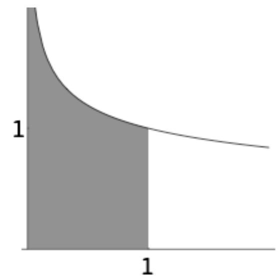
PROBLEMA 12.70

Se considera la curva $y = x^{-1/4}$ definida en $(0, 1]$.

a) Hallar el área bajo la curva.

b) Hallar el volumen del sólido obtenido al girar la curva alrededor del eje X.

Solución



a) Como la función no está acotada en $x = 0$, el área viene dada por una integral impropia:

$$A = \int_0^1 x^{-1/4}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 x^{-1/4}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \left[\frac{x^{3/4}}{3/4}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0^+} \left(\frac{4}{3} - \frac{4a^{3/4}}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

b) Análogamente al apartado anterior,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 x^{-2/4}\,dx = \pi \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 x^{-1/2}\,dx \\ &= \pi \lim_{a\to 0^+} \left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_a^1 = 2\pi \lim_{a\to 0^+} (1 - a^{1/2}) = 2\pi. \end{aligned}$$

PROBLEMA 12.71

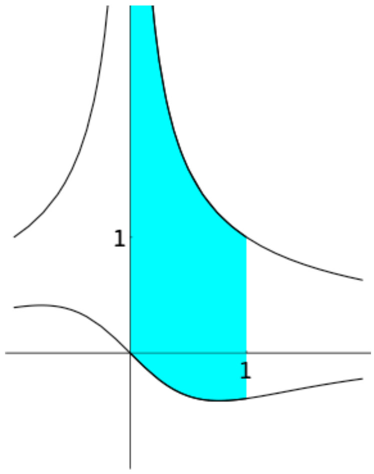
Se considera la región R limitada por las curvas $y(x^2+1)+\operatorname{arc\,tg} x = 0$ y $x^2y^3 = 1$ en el intervalo $x \in [0, 1]$.

i) Calcular el área de la región R.

ii) ¿Existe el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor del eje X?

Solución

i)



De acuerdo con la figura, el área viene dada por:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \left(x^{-2/3} + \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x^2+1} \right) dx = \lim_{a \to 0^+} \left[\frac{x^{1/3}}{1/3} + \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{2} \right]_a^1 \\ &= \lim_{a \to 0^+} \left(3 + \frac{(\pi/4)^2}{2} - 3a^{1/3} - \frac{(\operatorname{arc\,tg} a)^2}{2} \right) = 3 + \frac{\pi^2}{32}. \end{aligned}$$

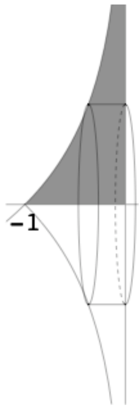
ii) El volumen pedido es el mismo que el de la región comprendida entre la curva $y = x^{-2/3}$ y el eje X en el intervalo $[0, 1]$ (basta observar que al girar esta región ya queda incluida la parte comprendida en el cuarto cuadrante). Aplicando el método de los discos,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 y^2\, dx = \pi \int_0^1 x^{-4/3}\, dx = \lim_{a \to 0^+} \pi \cdot \left[\frac{x^{-1/3}}{-1/3} \right]_a^1 \\ &= -3\pi \lim_{a \to 0^+} (1^{-1/3} - a^{-1/3}) = \infty. \end{aligned}$$

PROBLEMA 12.72

Determinar el volumen del sólido obtenido al girar la región limitada por la curva $e^{-y} = -x$ y los ejes de coordenadas alrededor del eje OX.

Solución



De acuerdo con la figura, si aplicamos el método de los tubos, la fórmula del volumen da:

$$V = 2\pi \int_0^\infty (-x) y dy = 2\pi \int_0^\infty y e^{-y} dy.$$

Como es una integral impropia debemos estudiar su convergencia. Integramos en primer lugar por partes y obtenemos:

$$\int y e^{-y} dy = -(y+1)e^{-y},$$

con lo que

$$V = \lim_{B\to\infty} 2\pi \left[-(y+1)e^{-y}\right]_0^B = \lim_{B\to\infty} -2\pi(B+1)e^{-B} + 2\pi = 2\pi.$$

D. EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Hallar $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx$.

   Resp.: $I = 1/2$.

2. Calcular $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$.

   Resp.: $I = \pi/2$.

3. Calcular $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$.

   Resp.: $I = \pi/4$.

4. ¿Para qué valores de a es convergente $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$?

   Resp.: Diverge para todo a.

5. Calcular $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{4e^x+9e^{-x}}$.

   Resp.: $I = \dfrac{\pi}{12} - \dfrac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2}{3}$.

6. Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\,dx}{x^2+2\sqrt[5]{x^4+1}}$.

   Resp.: Divergente (comparar con $\displaystyle\int_1^\infty dx/x$).

7. Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x\,dx}{(1+x^2)^2}$.

   Resp.: Convergente (comparar con $\displaystyle\int_1^\infty dx/x^\alpha$ con $1<\alpha<4$).

8. Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$.

   Resp.: Convergente (comparar con $\displaystyle\int_1^\infty dx/x^3$).

9. Estudiar la convergencia de la integral $\int_2^\infty \frac{x^2-8x-17}{x^4+4x^3+6x^2-4x-7}\,dx$.

   Resp.: Convergente (comparar con $\int_2^\infty dx/x^2$).

10. Estudiar la convergencia de la integral $\int_2^\infty \frac{3e^{3x/2}-2e^x+2e^{x/2}}{e^{2x}-2e^{3x/2}+3e^x-4e^{x/2}+2}\,dx$.

    Resp.: Convergente (comparar con $\int_2^\infty e^{-x/2}\,dx$).

11. Estudiar la convergencia y calcular la integral $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

    Resp.: $I=\pi/4$.

12. Estudiar la convergencia de la integral $\int_0^\infty f(x)\,dx$ siendo

    $$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1-x}} & \text{si } x<1\\ \frac{x-1}{1+x^3} & \text{si } x\ge 1.\end{cases}.$$

    Resp.: Convergente pues $\int_0^1 dx/\sqrt{1-x}$ es convergente y $\frac{x-1}{1+x^3}\sim\frac{1}{x^2}$ cuando $x\to\infty$.

13. Estudiar la convergencia de la integral $\int_0^\infty x\operatorname{sen}x\,dx$.

    Resp.: Divergente (la función $y=x\operatorname{sen}x$ no está acotada en $(0,\infty)$).

14. Probar que $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}\,dx=\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}x}{(1+x)^2}\,dx$ y que una de ellas converge absolutamente.

    Sugerencia: La igualdad se obtiene integrando por partes. Ver problema 12.32 para estudiar la convergencia.

15. Se considera la función $f(x)=ce^{-2x}$.

    a) Determinar el valor de c para que $\int_0^\infty f(x)\,dx=1$.

    b) Calcular $\int_0^\infty xf(x)\,dx$ con el valor de c obtenido en a).

Resp.: a) $c = 2$; b) $I = 1/2$.

16. *Probar que* $\displaystyle\int_1^\infty e^{-px}\,dx$ *es convergente si* $p > 0$ *y divergente si* $p \le 0$.

    Sugerencia: Resolver la integral.

17. *Estudiar la convergencia de la integral* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2+\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$.

    Resp.: Divergente (comparar con $\displaystyle\int_1^\infty dx/\sqrt{x}$).

18. *Demostrar que* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$ *no existe.*

    Resp.: La integral es divergente.

19. *Calcular* $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$.

    Resp.: La integral es divergente.

20. *Calcular* $\displaystyle\int_0^3 \frac{x\,dx}{(x^2-1)^{3/5}}$.

    Resp.: $5(2\sqrt[5]{2}-1)/4$.

21. *Estudiar la convergencia de la integral impropia* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-\cos x}}$.

    Resp.: Divergente (comparar con $\displaystyle\int_0^1 dx/x$).

22. *Estudiar la convergencia de* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$.

    Resp.: Convergente (comparar con $\displaystyle\int_0^1 dx/(1-x)^{1/2}$).

23. *Estudiar la convergencia de la integral* $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$.

    Resp.: Convergente (comparar con $\displaystyle\int_1^c dx/\sqrt{x-1}$ y con $\displaystyle\int_c^3 dx/\sqrt{3-x}$).

24. Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}$.

Resp.: Divergente (integración directa).

25. Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x}\, dx$.

Resp.: Convergente (integración directa).

26. Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+4x^3}$.

Resp.: Convergente (comparar con $\displaystyle\int_0^1 dx/\sqrt{x}$).

27. Demostrar que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\, dt = 0$.

Sugerencia: Aplicar la regla de L'Hôpital.

28. Calcular el área de la región limitada superiormente por la curva $xy = 1$, inferiormente por la curva $y(x^2+1) = x$ y a la izquierda de $x = 1$.

Resp.: $A = \infty$.

29. Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x = 1$, $x = 3$ por encima del eje OX.

Resp.: $A = \sqrt{8} - \ln(3+\sqrt{8})$.

30. Calcular el área de la región limitada por la curva $y^2 = \dfrac{x}{1-x^3}$ entre los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 1$.

Resp.: $A = \pi/3$.

31. Calcular el área comprendida entre $y = xe^{-x}$ y el eje X en $(0,\infty)$. ¿Cuánto vale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x}\, dx$?

Resp.: $A = 1$; $I = 0$ por ser una función impar y la integral convergente.

32. Sea $f(x) = e^{-2x}$ para todo x. Llamamos R a la región limitada por la curva y el eje X en el intervalo $[0, t]$, con $t > 0$. Calcular el área $A(t)$ de R y el volumen $V(t)$ obtenido al girar R alrededor del eje X. Interpretar los valores de $\lim_{t \to \infty} A(t)$ y $\lim_{t \to \infty} V(t)$.

Resp.: $A(t) = -\dfrac{1}{2}e^{-2t} + \dfrac{1}{2}$; $V(t) = -\dfrac{\pi}{4}e^{-4t} + \dfrac{\pi}{4}$.