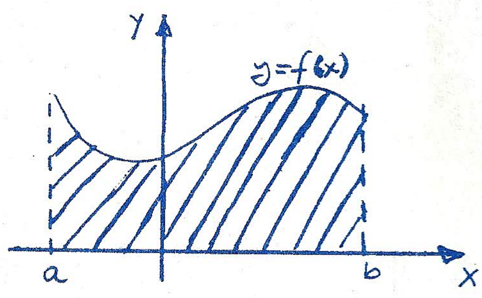
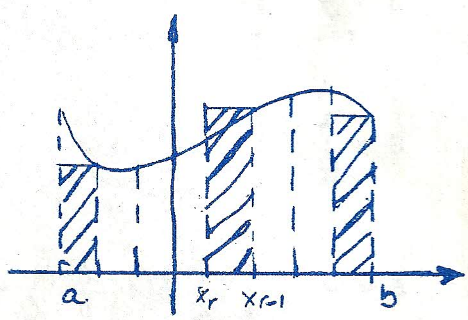
La Integral definida :

1.- Introducción :

La integral definida viene a llenar la necesidad de definir los conceptos geométricos como área de una figura plana encerrada por curvas y rectas, o volúmen de un cuerpo de revolución y su superficie, y también conceptos físicos como trabajo realizado por una fuerza variable, centro de masa, etc. Y es que el concepto de área, por ejemplo, deja de ser el producto de magnitudes como para el caso del rectángulo y triángulo; cuando se habla del área del circulo, ello porque proviene de un concepto más amplio y teórico como lo es el de integral.

Para motivar, una definición, abordemos el problema de "Calcular el área" de una región plana acotada por : La curva $y = f(x)$; ($f(x)$ función positiva); las rectas $x = a$; $x = b$ y el eje Ox.





Se consideran los siguientes pasos :

a) Hagamos un partisión de $[a, b]$

$$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_{r-1} < x_r < \ldots\ldots < x_n = b$$

en n partes iguales de magnitud $\Delta_r x = x_r - x_{r-1} = \dfrac{b-a}{n}$

b) En cada sub-intervalo $[x_{r-1}, x_n]$ escogemos un punto intermedio ξ_r que puede ser el extremo derecho o sea $\xi_r = a + r\left(\dfrac{b-a}{n}\right)$: $r = 1, 2, 3, \ldots, n$.

c) Por cada sub-intervalo de construye un rectángulo de base $\Delta_r x$ y altura $f(\xi_r)$ cuya area sera

$$A_r = f\left(a + r\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)\cdot\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

y cuya suma $S = \sum_{r=1}^{n} f\left(a + r\left(\frac{b-a}{n}\right)\cdot\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$, llamada suma intermedia de Riemann, parece una buena aproximación del área buscada sobre todo si n crece indefinidamente o $\Delta_r x$ tiende a cero, luego :

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} f\left(a + r\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Si la región está acotada por $y = 2x^2 + 3$ entre $x = 1$ y $x = 3$, tendremos :

$$a = 1\ ;\ b = 3;\ b - a = 2 \Rightarrow$$

$$S = \sum_{r=1}^{n} f\left(1 + r\left(\frac{2}{n}\right)\right)\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$S = \sum_{r=1}^{n} \left[2\left(1 + r\left(\frac{2}{n}\right)\right)^2 + 3\right]\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$S = \sum_{r=1}^{n} \left[5 + \frac{8r}{n} + \frac{8r^2}{n^2}\right]\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$S = \frac{2}{n}\left(\sum_{r=1}^{n} 5 + \frac{8}{n}\sum_{r=1}^{n} r + \frac{8}{n^2}\sum r^2\right)$$

$$S = \frac{2}{n}\left(5n + \frac{8}{n}\ \frac{n(n+1)}{2} + \frac{8}{n^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\right)$$

$$S = 10 + 8\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 16\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{6}$$

luego :

$$\lim_{n\to\infty} \sum f\left(1 + r\left(\frac{2}{n}\right)\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 18 + 8\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{8}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= 10 + 8 + \frac{16}{3}$$

$$= 23^{1/3}$$

2.- Definición de Integral :

Retornando al plano teórico, obordemos la definición de una integral definida.

DEFINICION :

Sea f (x) una función definida, continua en [a, b]. Se llama la integral definida de la función, en el intervalo dado, al número real I definido por :

$$I = \lim_{n \to \infty} \sum_{r} f(\xi_r) \Delta_r x, \quad \text{donde :}$$

$\xi_r \in [x_{r-1}, x_r]$; $\Delta_r x = x_r - x_{r-1}$ y que denotaremos

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

OBSERVACION :

1.- Si $\xi_r = a + r\left(\frac{b-a}{n}\right)$; $\Delta_r x = \frac{b-a}{n}$ es decir la partisión comprende sub-intervalos de magnitudes $\left(\frac{b-a}{n}\right)$ y el punto elegido ξ_r corresponde al extremo derecho de cada sub-intervalo, entonces :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} f\left(a + r\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

2.- En la expresión : $\int_a^b f(x)\, dx$; f(x) es el integrando, a el extremo inferior y b el extremo superior.

3.- Si f (x) > 0 en [a, b] podemos definir.

DEFINICION :

El área A de la región acotada por y = f(x) las rectas x = a; x = b y el eje 0x, se define por :

$$A = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Además :

DEFINICION :

Si f(x) es una fuerza continua; se define el trabajo realizado por ella sobre una partícula que se desplaza por el eje 0x desde x = a a, x = b como :

$$W = \int_a^b f(x)\, dx$$

PROPIEDADES

Atendiendo a la definición como lim de una suma intermedia, se tiene casi de inmediato.

1.- $\int_a^b r\, dx = r\,(b - a)$

2.- $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$

3.- $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

4.- Si $f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_c^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx$

y Si $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \geq 0$

5.- $\int_a^b f(x)\, dx = - \int_b^a f(x)\, dx$. Esto porque

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^a f(x)\, dx = \int_a^a f(x)\, dx = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx = - \int_b^a f(x)\, dx$$

6.- Si $M = \text{máx } f(x)$ y $m = \text{mín } f(x)$ en $[a,b]$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

7.- $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

8.- Si $f(x)$ par en $[-a, a] \Rightarrow$

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ Puesto que :

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$. En

$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$; hacemos $\quad x = -u$; $dx = -du$

$x = -a \Rightarrow u = a$

$x = 0 \Rightarrow u = 0$ luego

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(-u)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx$$

9.- Si $f(x)$ impar en $[a, a] \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ ¡tarea!

Ejemplos :

1.- Calcular con la definición :

$$\int_0^2 (x^3 - 2x^2)\,dx$$

SOLUCION :

Siendo $a = 0$; $b = 2$; $b - a = 2$

$$\int_0^2 (x^3 - 2x^2)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} f\left[0 + r\left(\frac{2}{n}\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{1}^{n} \left[\left(r \frac{2}{n} \right)^3 - 2 \left(r \frac{2}{n} \right)^2 \right] \left(\frac{2}{n} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{1}^{n} \left(\frac{8}{n^3} r^3 - \frac{8}{n^2} r^2 \right) \frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{1}^{n} \frac{16}{n^3} \left(\frac{r^3}{n} - r^2 \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{16}{n^4} \sum_{1}^{n} r^3 - \frac{16}{n^3} \sum_{1}^{n} r^2$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{16}{n^4} \left(\frac{n\,(n+1)}{2} \right)^2 - \frac{16}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \lim_{n \to \infty} 4 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 - \frac{8}{3} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right)$$

$$= 4 - \frac{16}{3}$$

$$= 4/3_{//}$$

2.- **Expresar como una integral** : $\lim_{n \to \infty} \dfrac{1^p + 2^p + 3^p \ldots\ldots + n^p}{n^{p+1}}$: $p \neq -1$

SOLUCION :

Como $\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} f \left(a + r \left(\frac{b-a}{n} \right) \right) \left(\frac{b-a}{n} \right)$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{r^p}{n^p} \right) \frac{1}{n} \quad ; \quad \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \quad : a = 0$$

$= \int_0^1 x^p \, dx$ ¡El calculo de la integral queda pendiente!

3.- El teorema Fundamental del Calculo :

TEOREMA :

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y $F(x)$ una primitiva entonces :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

DEMOSTRACION :

Sea $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt : a \le x \le b \Rightarrow$

$$G(a) = 0 \quad y \quad G(b) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Si $a < x < x + h \le b \Rightarrow$

$$G(x+h) - G(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

$$= \int_a^{x+h} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$ Pero por definición :

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} f\left[x + r\,\frac{h}{n}\right]\left(\frac{h}{n}\right) \therefore$$

$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} f\left[x + r\left(\frac{h}{n}\right)\right]\frac{1}{n}$$

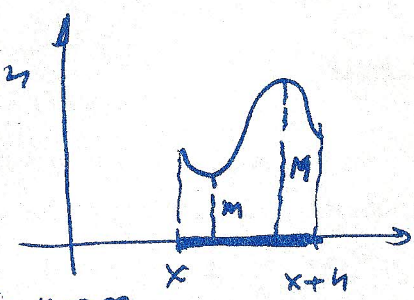
Por otra parte en $[x, x + h]$; Si $m(h) = \text{mín } f(x)$, $M(h) = \text{máx } f(x) \Rightarrow$

Para una partision:

$$m(h) \le f\left(x + k\left(\tfrac{h}{n}\right)\right) \le M(h) \; ; \; k = 1, 2, \ldots, n$$

luego Sumando en k

$$n \cdot m(h) \le \sum_k f\left(x + k\left(\tfrac{h}{n}\right)\right) \le n \cdot M(h) \quad ó$$



$$m(h) \le \sum_k f\left(x + k\left(\tfrac{h}{n}\right)\right) \cdot \frac{1}{n} \le M(h) \quad \therefore \text{ Si } n \to \infty$$

$$m(h) \le \frac{G(x+h) - G(x)}{h} \le M(h) \qquad \text{Si } h \to 0 \quad m(h) \to f(x) ; M(h) \to f(x)$$

$f(x) = G'(x) \Rightarrow G(x)$ es primitiva de $f(x)$: luego $F(x) - G(x) = c$. Si $x = a$: $F(a) - G(a) = c$ ó $F(a) = c$ pues $G(a) = 0$. Si $x = b$: $F(b) - G(b) = F(a)$ ó $G(b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$ //

OBSERVACION :

Téngase la precaución de verificar que f(x) es continua en [a, b] para aplicar el teorema.

2.- Calcular : $\int_0^{12} x^3 \sqrt{x^2 + 25}\, dx$

SOLUCION :

$F(x) = \int x^3 \sqrt{x^2 + 25}\, dx$; hacemos $x^2 + 25 = u^2 \Rightarrow 2x\, dx = 2\, u\, du$

$$\int x^3 \sqrt{x^2 + 25}\, dx = \int x^2 \sqrt{x^2 + 25}\, x\, dx$$

$$= \int (u^2 - 25)\, u^2\, du$$

$$= \int (u^4 - 25u^2\, du$$

$$= \frac{u^5}{5} - \frac{25\, u^3}{3}$$

$$= \left[\frac{1}{5} (x^2 + 25)^{5/2} - \frac{25}{3} (x^2 + 25)^{3/2} \right]$$

$$F(12) - F(0) = \left[\frac{1}{5} (169)^{5/2} - \frac{25}{3} (169)^{3/2}\right] - \left[\frac{1}{5} (25)^{5/2} - \frac{25}{3} (25)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{1}{5} \left[(13)^5 - \frac{25}{3} (13)^2\right] - \left[\frac{1}{5} (5)^5 - \frac{25}{3} (5)^3\right].$$

3.- Calcular : $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{u^2 + 1}\, u\, du$

SOLUCION :

Si hacemos $u^2 + 1 = t \Rightarrow u\, du = \frac{dt}{2}$ luego llevando el cambio a los límites de integración : $u = 0 \Rightarrow t = 1$ ^ $u = \sqrt{3} \Rightarrow t = 4$ luego

$$\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{u^2 + 1}\, u\, du = \frac{1}{2} \int_1^4 \sqrt{t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \; t^{3/2} \Big/_{1}^{4} = \frac{1}{3} \; (4^{3/2} - 1^{3/2})_{//}$$

De haber hecho lo mismo en el ejemplo anterior tendríamos :

Como $x^2 + 25 = u^2$; $\quad x = 0 \Rightarrow u = 5$

$y = 12 \Rightarrow u = 13 \therefore$

$$\int_0^{12} x^3 \sqrt{x^2 + 25} \; dx = \int_5^{13} (u^4 - 25 u^2) \; du$$

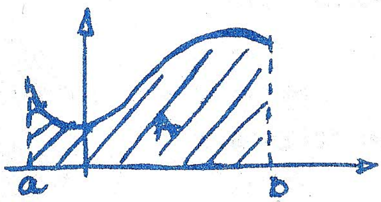
4.- Aplicaciones de la Integral definida

a) Calculo de Area

i) Area bajo una curva :

Ya se vio que para la región acotada por $y = f(x)$; $f(x) \geq 0$; $x = a$; $x = b$; $y = 0$; teniamos

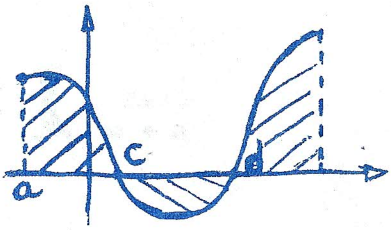
$$A = \int_a^b f(x) \, dx$$



Para el caso de la fig.; en $[c, d]$, $f(x) < 0$ luego :

$$A_1 = \int_a^c f(x) \, dx$$

$$A_2 = - \int_c^d f(x) \, dx$$



$A_3 = \int_d^b f(x) \, dx$. El area total será :

$$A = \int_a^c f(x) \, dx - \int_c^d f(x) \, dx + \int_d^b f(x) \, dx$$

queda dado entonces que aquí

$$A \neq \int_a^b f(x) \, dx \, .$$

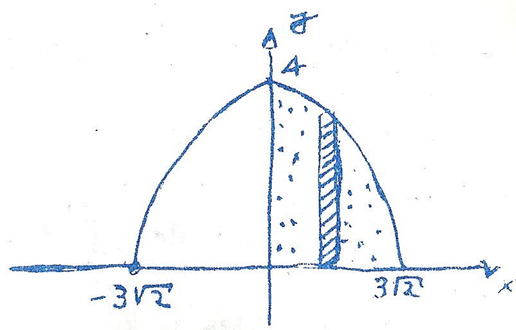
Ejemplo :

1.- Calcular el area encerrada por la curva :

$y = 4 - \frac{2}{9} x^2$ y el eje $0x$

SOLUCION :

a) Grafico e intersecciones :



$y = 0 \Rightarrow x = \pm\, 3\sqrt{2}$

$x = 0 \Rightarrow y = 4$

$$A = \int_{-3\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} \left(4 - \frac{2}{9}\,x^2\right) dx$$

$$A = 4x - \frac{2}{27}\,x^3 \Bigg/_{-3\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} = 12\sqrt{2} - \frac{2}{27}\,(3\sqrt{2})^3 - \left[(-12\sqrt{2} + \frac{2}{27}\,(3\sqrt{2})^3\right]$$

$$= 24\sqrt{2} - \frac{4}{27}\,(3\sqrt{2})^3 = 16\sqrt{2} \;//$$

OBSERVACION :

Si aplicamos la definición para calcular la mitad de la región tendríamos :

$$\frac{1}{2}\;A = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} f\left(0 + r\left(\frac{3\sqrt{2}}{n}\right)\right)\left(\frac{3\sqrt{2}}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \left(4 - \frac{2}{9}\left(\frac{3\,r\sqrt{2}}{n}\right)^2\right)\cdot\left(\frac{3\sqrt{2}}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \left(4 - 4\,\frac{r^2}{n^2}\right)\left(\frac{3\sqrt{2}}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{12\sqrt{2}}{n}\left(1 - \frac{r^2}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{12\sqrt{2}}{n}\left[n - \frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right]$$

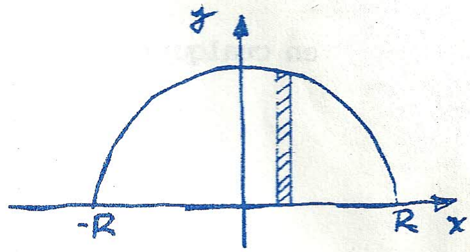
$$= \lim_{n\to\infty} 12\sqrt{2}\left[1 - \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}\right] = \frac{24\sqrt{2}}{3}$$

$\therefore\; A = 16\sqrt{2}$

Esto es con el propósito de observar que el área se obtiene sumando pequeñísimas franjas de alturas f(x) y ancho Δx; desde el extremo izquierdo $x = 0$ al derecho $x = 3\sqrt{2}$ como un verdadero barrido.

2.- Calcular el área de la circunferencia de radio R.

<u>SOLUCION</u> :



Tenemos $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$
luego :

$$A = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

si hacemos $x = R \text{ sen } t \Rightarrow dx = R \text{ Cos } t\, dt$

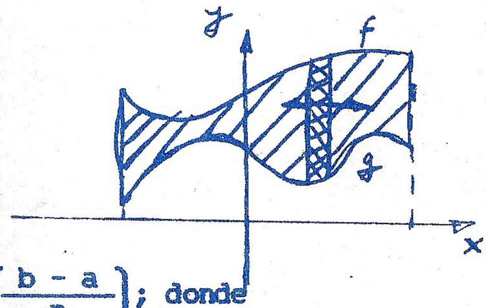
$$x = 0 \Rightarrow t = 0$$
$$x = R \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$A = -4\int_0^{\pi/2} R^2 \text{Cos}^2 t\, dt = -\frac{4R^2}{2}(t + \text{Sen } t \text{ Cos } t)\Big/_0^{\pi/2}$$

$= \pi R^2$ (¿Porqué el signo -?)

ii) <u>Area entre curvas</u> :

Considerando la fig. buscaremos una expresión para el área. Planteada como limite de una suma intermedia ; tendríamos



$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} (f - g)\left[a + r\left(\frac{b-a}{n}\right)\right]\left[\frac{b-a}{n}\right]; \text{ donde}$$

$A_r = (f - g)\left[a + r\left(\frac{b-a}{n}\right)\right]\left[\frac{b-a}{n}\right]$ es un elemento fundamental de área, las que deben sumarse y llevarla al límite.

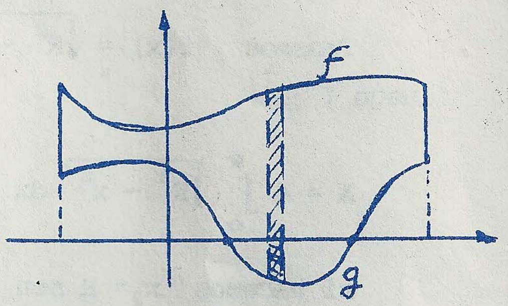
Por lo tanto :

$$A = \int_a^b (f - g)\ (x)\ dx$$

Esta fórmula sigue siendo válida cuando una o ambas funciones cambian el signo en [a, b]. Puesto que :

$$A_r = (f - g)\left(a + r\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

en cualquier circunstancia



Aún más esta conclusión es congruente en la idea intuitiva que el área se logra sumando las pequeñas franjas y luego se lleva al límite.

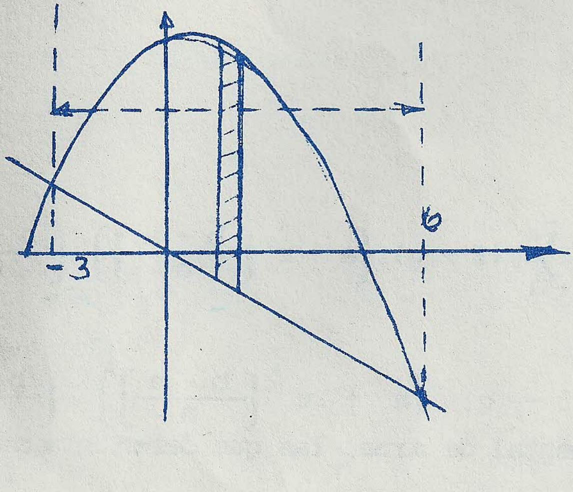
EJEMPLOS :

1.- Calcular el área encerrada entre la parábola : $2x^2 + 9y = 36$ y la recta $2x + 3y = 0$.

SOLUCION :

a) Gráfico e intersecciones :

$$y = 4 - \frac{2}{9}x^2 \ \cap\ y = -\frac{2}{3}x \rightarrow \qquad x_1 = 6, \quad x_2 = -3$$



b) Calculo del área :

$$A = \int_{-3}^{6} \left\{ \left[4 - \frac{2}{9} x^2 \right] - \left[- \frac{2}{3} x \right] \right\} dx$$

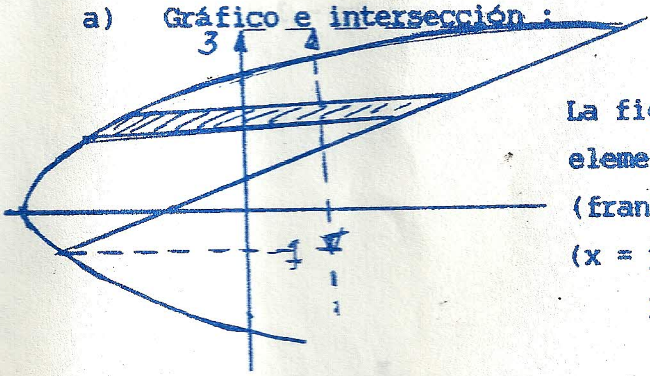
$$= 4x + \frac{x^2}{3} - \frac{2}{27} x^3 \Big/_{-3}^{6} = 27_{//}$$

2.- Encontrar el área encerrada por :

$$y^2 = x + 4 \ ; \ x - 2y + 1 = 0$$

<u>SOLUCION</u> :

a) Gráfico e intersección :



La figura induce a considerar los elementos fundamentales de área (franjas) en forma horizontal.

$$(x = y^2 - 4) \cap (x = 2y - 1)$$

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow y_1 = 3$$

$$y_2 = -3$$

b) Calculo del área :

$$A = \int_{-1}^{3} \left\{ (2y - 1) - (y^2 - 4) \right\} dy$$

$$A = y^2 - \frac{y^3}{3} + 3y \Big/_{1}^{3} = 10\,^2/_3$$

3.- Calcular el área encerrada por : $y = x^2 - x^4$ y el eje 0x.

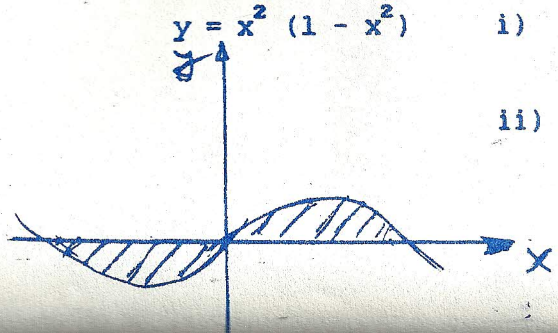
<u>SOLUCION</u> :

a) Gráfico :

$$y = x^2 (1 - x^2)$$

i) Se trata de una función par corta al eje x en $x = 0 \wedge x = \pm 1$.

ii) $1 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x > 1 \vee x < -1 \Rightarrow f(x) < 0$



b) Calculo :

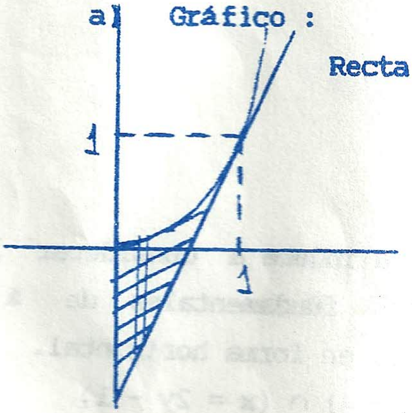
$$A = 2\int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{2x^5}{5}\Big/_0^1 = 2/3 - 2/5_{//}$$

4.- Hallar el área encerrada por :

$y = x^2$; $x = 0$ y la recta tangente a ella en (1, 1)

<u>SOLUCION</u> :

a) Gráfico :



Recta tangente : $y - y_\circ = y'(x_\circ)(x - x_\circ) \Rightarrow$

$y - 1 = 2(x - 1)$ ó

$y = 2x - 1$

b) Area :

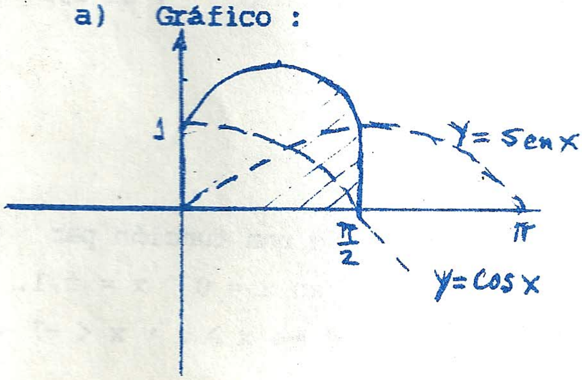
$$A = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)\,dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x\Big/_0^1 = \frac{1}{3}$$

5.- Calcular el área que encierran :

$f(x) = \text{Cos}x + \text{Sen}\,x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$

<u>SOLUCION</u> :

a) Gráfico :



b) Area :

$$A = \int_0^{\pi/2} (\text{Sen } x + \text{Cos } x)\, dx = -\text{Cos } x + \text{Sen } x \Big/_0^{\pi/2}$$

$$A = 1 + 1 = 2_{//}$$

<u>OBSERVACION</u> :

La forma paramétrica para la curva $y = f(x)$ está dada por

$x = x\,(t)$

$y = y\,(t) \qquad t_o < t < t_1$

luego

$$A = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{t_o}^{t_1} y\,(t) \cdot x'\,(t)\, dt$$

<u>EJEMPLOS</u> :

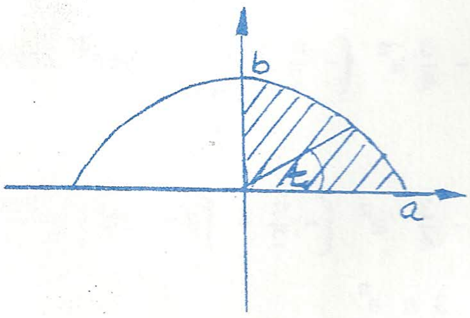
6.- Si la elipse está dada parametricamente por :

$x = a \text{ Cos } t$

$y = b \text{ Sen } t \qquad o \leq t \leq 2\pi$

calcular su área interior

<u>SOLUCION</u> :



$$A = 4 \int_{\pi/2}^{0} (b \text{ Sen } t) \cdot (-a \text{ Sen } t)\, dt$$

$$A = 4\, ab \int_0^{\pi/2} \text{Sen}^2\, t\, dt$$

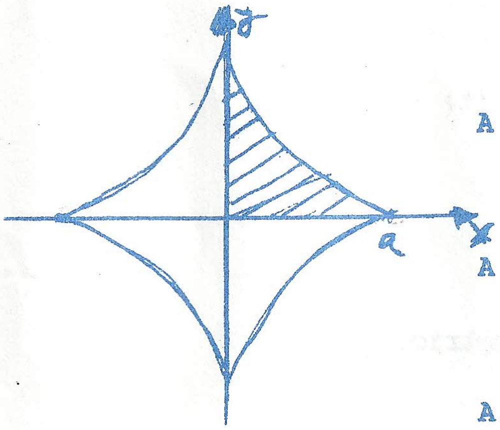
$$= 4\, ab\, \frac{1}{2} \left(t - \text{Sen } t \text{ Cos } t \Big/_0^{\pi/2}\right)$$

$$= \pi ab$$

7.- Hallar el área interior de la astroide

$$x = a \operatorname{Cos}^3 t$$
$$y = a \operatorname{Sen}^3 t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

<u>SOLUCION</u> :



$$A = -4 \int_0^{\pi/2} (a \operatorname{Sen}^3 t)(3a \operatorname{Cos}^2 t(- \operatorname{Sen} t))\, dt$$

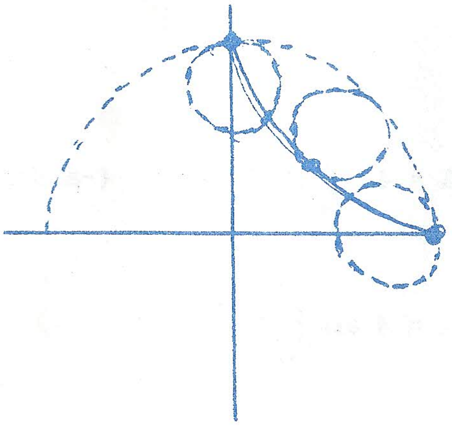
$$A = -12\, a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \operatorname{Sen}^4 t \operatorname{Cos}^2 t\, dt$$

$$A = \frac{3}{2} a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (1-2 \operatorname{Cos}2\, t + \operatorname{Cos}^2 2t)(1+\operatorname{Cos} 2t)\, dt$$

$$A = -\frac{3}{2} a^2 \int_{\pi/2}^{0} (1 - \operatorname{Cos} 2t - \operatorname{Cos}^2 2t + \operatorname{Cos}^3 2t) dt$$

$$A = -\frac{3}{4} a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (1 + \operatorname{Cos}2t - \operatorname{Cos}^2 2t + \operatorname{Cos}^3 2t)(2dt)$$

$$A = -\frac{3}{4} a^2 \left(2t+\operatorname{Sen}2t - \frac{1}{2}(2t+\operatorname{Sen}2t+\operatorname{Cos}2t)\right|_{\pi/2}^{0} +$$



$$\int_{\pi/2}^{0} \operatorname{Cos}^2 2t\, (\operatorname{Cos}2t\, dt)$$

$$A = -\frac{3}{4} a^2 \left[-\frac{\pi}{2} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (1 - \operatorname{Sen}^2 2t)\, d(\operatorname{Sen} 2t)\right]$$

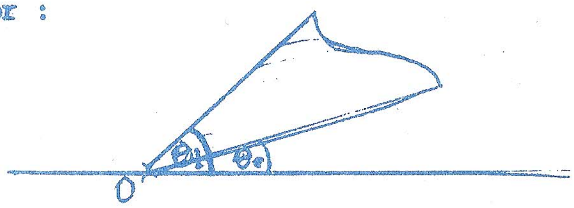
$$A = -\frac{3}{4} a^2 \left[-\frac{\pi}{2} + \left[\operatorname{Sen} 2t - \frac{\operatorname{Sen}^3 2t}{3}\right|_{\pi/2}^{0}\right]$$

$$A = \frac{3\pi a^2}{8} //$$

<u>OBSERVACION</u> :

La forma polar de una curva $\rho = \rho\ (\theta)$ $\quad \theta_0 < \theta < \theta_1$
determina una región cuya área está dada por :

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho^2\ (\theta)\ d\theta$$



Para lograrlo basta con señalar que el elemento fundamental de área está dado por

$$A_r = \frac{1}{2} \rho \, \Delta \theta \, \rho$$

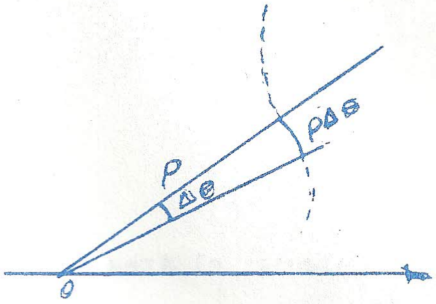
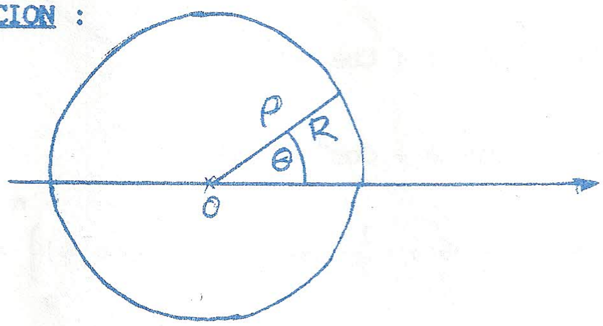


figura que se asimila a un triángulo rectángulo de base ρ y altura un arco de circunferencia de longitud $\rho \, \Delta \, \theta$ asimilable a la altura. Cuando $\Delta\theta$ es pequeño, luego sumado y llevado al límite se logra la fórmula señalada.

Ejercicios :

1.- Calcular el área interior del circulo : $\rho = R : 0 \leq \theta \leq 2\pi$

SOLUCION :



$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^2 \, d\theta = \pi R^2 //$$

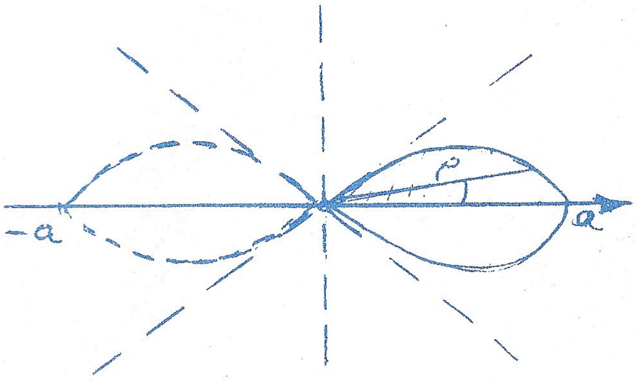
2.- Hallar el área interior a la lemniscata

$$\rho^2 = a^2 \operatorname{Cos} 2\theta$$

SOLUCION :

a) Construcción

θ	ρ
0	a
$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$
$\frac{3\pi}{4}$	0
π	a



b) Calculo : $A = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\theta \, d\theta$

$$= a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta \, d(2\theta) = a^2 \operatorname{Sen} 2\theta \Big/_0^{\pi/4} = a^2 //$$

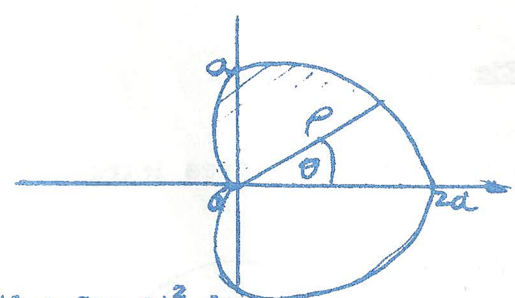
3.- Calcular el área encerrada por la Cardioide :

$$\rho = a\,(1 + \cos \theta)$$

SOLUCION :

a) Contrucción :

θ	ρ
0	2a
$\frac{\pi}{2}$	a
π	0



b) Calculo : $A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} a^2 (1 + \cos \theta)^2 \, d\theta$

$$= a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta$$

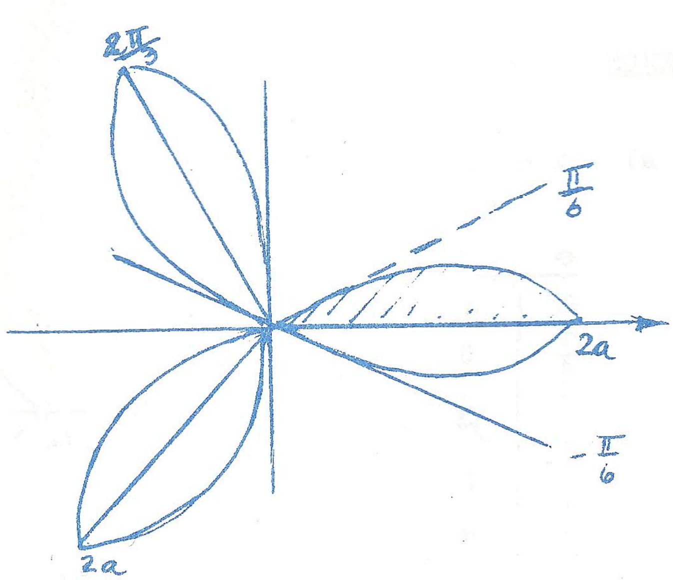
$$= a^2 \left[\theta + 2 \operatorname{Sen}\theta + \frac{1}{2}(\theta + \operatorname{Sen}\theta \cos\theta)\right]_0^{\pi} = \frac{3\pi a^2}{2}$$

4.- Hallar el área de una de las hojas del trebol : $\rho = 2a \cos 3\theta$

SOLUCION :

a) Construcción :

θ	ρ
0	2a
$\frac{\pi}{6}$	0
$\frac{\pi}{3}$	-2a
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{2\pi}{3}$	2a
π	-2a



b) Calculo : $A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} 4\, a^2 \, Cos^2 \, 3\, \theta \, d\theta$

$$A = \frac{4a^3}{3} \int_0^{\pi/6} Cos^2 \, 3\theta \; d\,(3\theta)$$

$$A = \frac{4a^3}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(3\theta + Sen\, 3\theta \; Cos\, 3\theta\right) \Big|_0^{\pi/6}$$

$$A = \frac{2a^3}{3} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$A = \frac{\pi \; a^3}{3} \; //$$

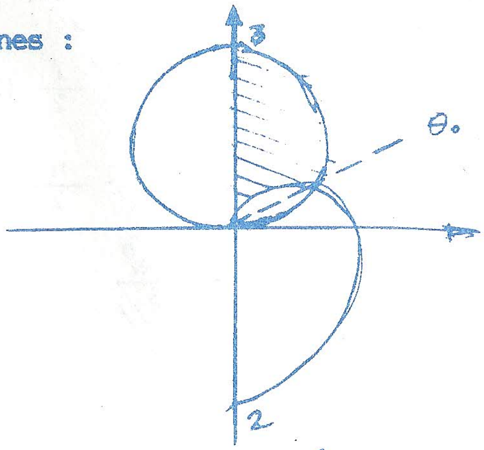
5.- Calcular el área exterior a la Cardioide $\rho = 1 - \text{Sen}\ \theta$ interior al circulo $\rho = 3\ \text{Sen}\ \theta$.

<u>SOLUCION</u> :

a) Gráfico e intersecciones :

θ	ρ
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	1
$\frac{3\pi}{2}$	2

$\rho = 1 - \text{Sen}\ \theta$



θ	ρ
0	0
$\frac{\pi}{2}$	3
π	0

$\rho = 3\ \text{Sen}\ \theta$

$$\rho = 1 - \text{Sen}\ \theta = 3\ \text{Sen}\ \theta \Rightarrow \text{Sen}\ \theta = \frac{1}{4}$$

$$\theta_o = \text{Arc Sen}\ \frac{1}{4}$$

b) Calculos :

$$A = 2\left\{\frac{1}{2}\int_{\theta_o}^{\pi/2} 9\ \text{Sen}^2\ \theta\ d\theta - \frac{1}{2}\int_{\theta_o}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \text{Sen}\ \theta)^2\ d\theta\right\}$$

$$A = \left\{\int_{\theta_o}^{\pi/2} (8\ \text{Sen}^2\ \theta + 2\ \text{Sen}\ \theta - 1)\ d\theta\right.$$

$$A = 4\ (\theta - \text{Sen}\ \theta\ \text{Cos}\ \theta) - 2\ \text{Cos}\ \theta - \theta \Big/_{\theta_o}^{\pi/2}$$

$$A = \frac{3\pi}{2} - 3\ \theta_o - 4\ \text{Sen}\ \theta_o\ \text{Cos}\ \theta_o - 2\ \text{Cos}\ \theta_o$$

$$A = \frac{3\pi}{2} - 3\ \text{Arc Sen}\ \frac{1}{4} - \text{Cos}\left[\text{Arc Sen}\ \frac{1}{4}\right] - 2\ \text{Cos}\left[\text{Arc Sen}\ \frac{1}{4}\right]$$

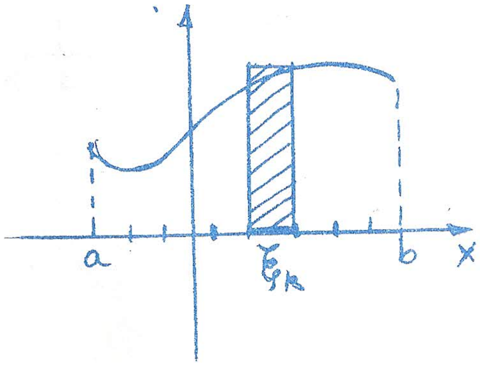
$$A = \frac{3\pi}{2} - 3\ \text{Arc Sen}\ \frac{1}{4} - 3\sqrt{1 - \frac{1}{16}}$$

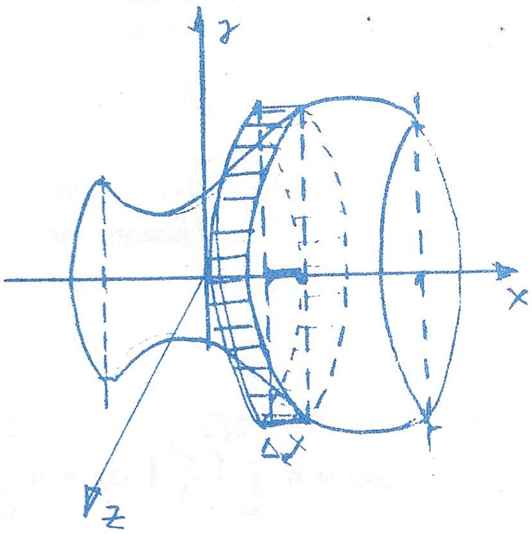
$$A = \frac{3\pi}{2} - 3\ \text{Arc Sen}\ \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{15}\ //$$

B) <u>Volúmen de Rotación</u> :

Es el que se logra al hacer rotar una región plana en torno de un eje coordenado o una recta paralela a uno de ellos.

La fórmula para evaluarlo se logra haciendo similares consideraciones que para el calculo del área, en el sentido de definir un "elemento fundamental" de volúmen, cuya suma se lleva al limite cuando el número de ellos crece indefinidamente, es decir :





a) Hacemos partisión de $[a,b]$ en n partes iguales de largo $\dfrac{b-a}{n}$

b) Como en la fig.; el área se hace girar en torno del eje OX y el elemento fundamental de volúmen es el Cilindro recto circular de radio $f\ (\xi_k)$

ó $f\left[a + k\ \left(\dfrac{b-a}{n}\right)\right]$ y

altura $\Delta_k\ x = \dfrac{b-a}{n}$.

c) $V_k = \pi\ f^2\ (\xi_k) \cdot \Delta_k\ x$, cuya suma es una suma intermedia :

$$\sum_k V_k = \pi \sum_{k=1}^{n} f^2\ (\xi_k)\ \Delta_k x.$$

luego si $n \to \infty$ tendremos:

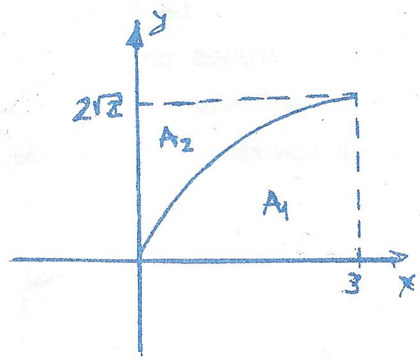
$$V = \pi \int_a^b f^2\ (x)\ dx$$

Para las otras situaciones, cuando el eje de giro, es otro, es más claro observarlo en el siguiente ejemplo :

Ejemplo :

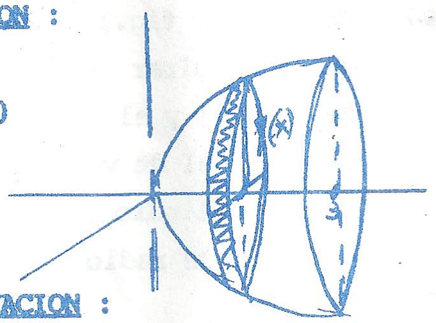
1.- Sea $y^2 = 4x$, las rectas $x = 3$; $y = 2\sqrt{3}$ que definen las areas A_1, A_2. Determinar el volúmen por rotación cuando :

a) A_1 gira en torno del eje ex
b) A_2 gira en torno del eje 0y
c) A_1 gira en torno del eje 0y
d) A_2 gira en torno del eje0x
e) A_1 gira en torno $x = 3$
f) A_2 gira en torno $y = 2\sqrt{3}$
g) A_1 gira en torno $y = 2\sqrt{3}$
h) A_2 gira en torno $x = 3$



SOLUCION :

a)

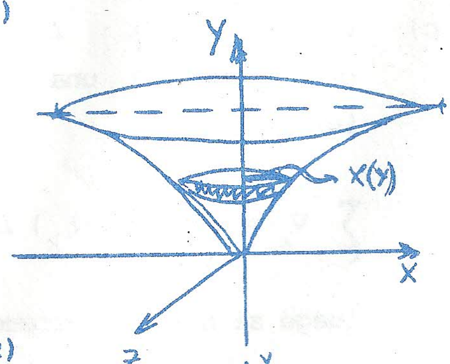


$$V = \pi \int_0^3 y^2(x)\, dx = \pi \int_0^3 4x\, dx = 18\,\pi$$

OBSERVACION :

Aqui el elemento fundamental, como lo señala la fig.; es un cilindro o tajada circular del radio $y(x) = 4x$ que se suman en dirección del eje de giro desde 0 a 3.

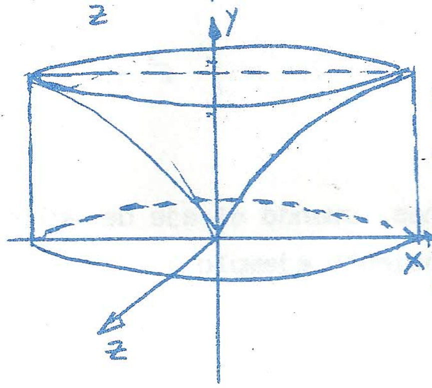
b)



$$V = \pi \int_0^{2\sqrt{3}} x^2(y)\, dy = \pi \int_0^{2\sqrt{3}} \left(\frac{y^2}{4}\right) dy = \pi \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{y^4}{16}\, dy$$

$$= \pi\, \frac{y^5}{80} = \frac{\pi(2\sqrt{3})^5}{80} = \frac{18\,\pi\,\sqrt{3}}{5}$$

c)



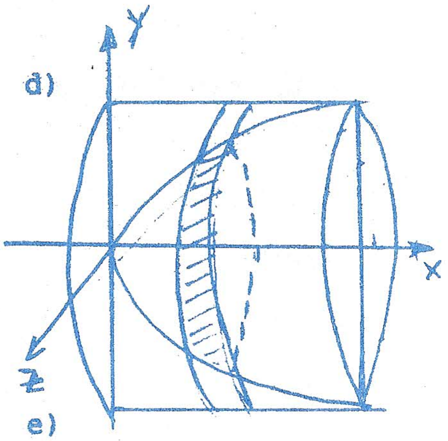
$V = V_1 - V_2$

$V_1 =$ cilindro ; $\pi \cdot 3^2\, 2\sqrt{3} = 18\,\pi\,\sqrt{3}$

$V_2 = A_2$ girando sobre eje 0y : $\frac{18}{5}\,\pi\,\sqrt{3}$

$V = \pi\,\sqrt{3}\left[18 - \frac{18}{5}\right] = \frac{72}{5}\,\pi\,\sqrt{3}$ //

d)



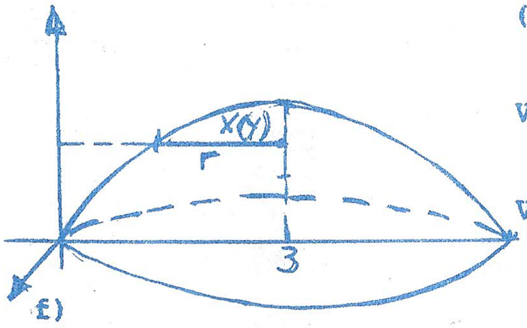
$$V = V_1 - V_2$$

$$V_1 = \pi\,(2\sqrt{3})^2 \cdot 3$$

$$V_2 = 18\,\pi \;:$$

$$V = \pi\,(36 - 8) = 18\,\pi_{//}$$

e)

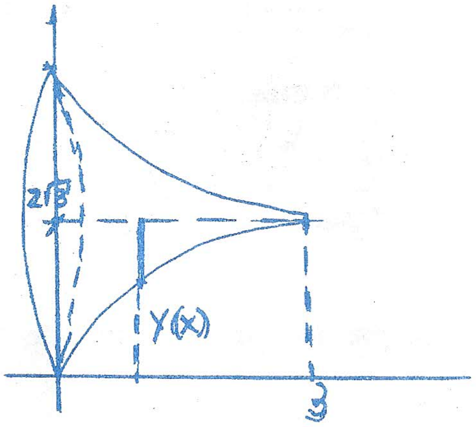


$(3 - x\,(y))$: radio de giro (variable)

$$V = \pi \int_0^{2\sqrt{3}} (3 - y^2/4)\,dy$$

$$V = \pi \int_0^{2\sqrt{3}} \left[9 - \frac{3y^2}{2} + \frac{y^4}{16}\right] dy = \frac{43}{5}\,\pi\,\sqrt{3}$$

f)



$(2\sqrt{3} - y\,(x))$ radio de giro

$$V = \pi \int_0^3 (2\sqrt{3} - 2\sqrt{x})^2\,dx$$

$$V = 4\pi \int_0^3 (3 - 2\,\sqrt{3x} + x\,)\,dx$$

$$V = 4\pi \left[3\,x - 2\sqrt{3} \cdot x^{3/2}\,\frac{2}{3} + x^2 \right]_0^3$$

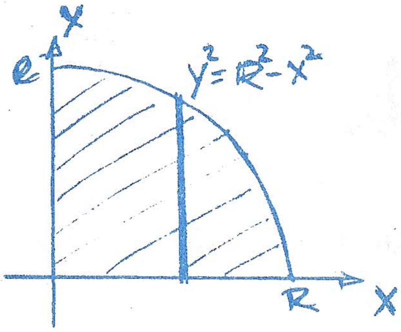
$$V = 4\pi \left[9 - \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot 3\,\sqrt{3} + 9\right]$$

$$V = 24\,\pi_{//}$$

2.- Calcular el volúmen de la esfera de radio R.

SOLUCION :

girando el cuarto de un circulo se tendra :



$$V = 2\pi \int_0^r y^2\,(x)\,dx$$

$$V = 2\pi \int_0^r (R^2 - x^2)\,dx$$

$$V = 2\pi \left[R^2\,x - \frac{x^3}{3}\right]_0^R$$

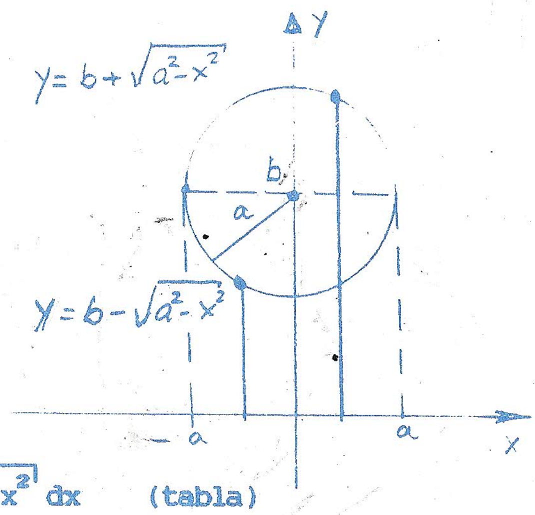
$$V = 2\pi \left[R^3 - \frac{R^3}{3}\right] = \frac{4\pi\,R^3}{3}_{//}$$

3.- Calcular el volúmen del toro; que se forma por la rotación del circulo :

$$x^2 + (y - b)^2 = a^2 \ ; \quad a \leq b$$

en torno del eje x.

SOLUCION :



Debemos restar dos volumenes :

$$V = V_1 - V_2$$

$$V_1 = \pi \int_{-a}^{a} \left[b + \sqrt{a^2 - x^2} \right]^2 dx$$

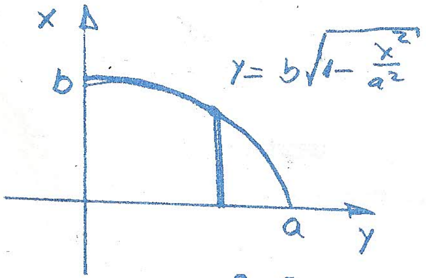
$$V_2 = \pi \int_{-a}^{a} \left[b - \sqrt{a^2 - x^2} \right]^2 dx$$

$$V = \pi \int_{-a}^{a} 4b \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 4\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \qquad \text{(tabla)}$$

$$V = 4\pi\, b \cdot \frac{1}{2} \left[x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \text{ Arc Sen } + \frac{x}{a} \right|_{-a}^{a} = 2\pi^2\, a^2 b \; //$$

4.- Hallar el volúmen del elipsoide, generado por la rotación de la elipse : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ Sobre el eje 0x

SOLUCION :

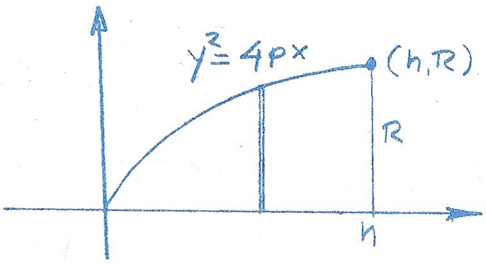


$$V = 2\pi \int_{0}^{a} b^2 \left[1 - \frac{x^2}{a^2} \right] dx$$

$$V = \frac{2\pi\, b^2}{a^2} \int_{0}^{a} (a^2 - x^2)\, dx = \frac{2\pi b^2}{a^2} \left[a^2\, x - \frac{x^3}{3} \right|_{0}^{a} = \frac{4\pi}{3}\, ab^2$$

5.- Calcular el volúmen del paraboloide de revolución de radio R y altura h.

SOLUCION :



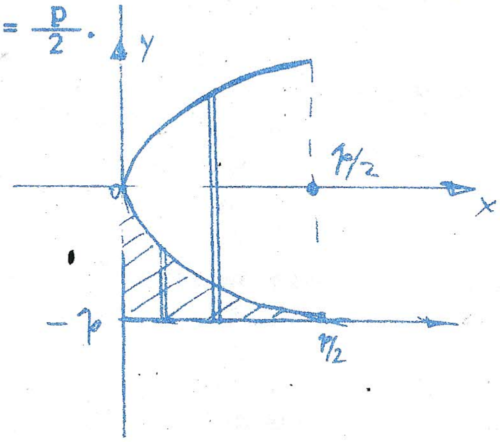
$y^2 = 4px$: el punto (h, R) está en la parábola ⇒

$R^2 = 4ph \therefore 4p = \dfrac{R^2}{h}$ ⇒

$y^2 = \dfrac{R^2}{h}\,x$, es la parábola que genera el cuerpo señalado.

6.- Hallar el volúmen del cuerpo generado por la rotación en torno de la recta $y = -p$ de la figura limitada por la parábola $y^2 = 2px$ y la recta $x = \dfrac{p}{2}$.

SOLUCION :



Para esto podemos trasladar la parábola de modo que el eje 0x coincida con la recta $y = -p$. Asi queda

$$(y - p)^2 = 2p\,x \quad ó$$
$$y = p \pm \sqrt{2p\,x}$$

$$V = V_1 - V_2$$

$$V_1 = \pi \int_0^{p/2} (p + \sqrt{2px}\,)^2\, dx$$

$$V_2 = \pi \int_0^{p/2} (p - \sqrt{2px}\,)^2\, dx$$

$$V = \pi \int_0^{p/2} 4p\,\sqrt{2px}\; dx = \frac{4}{3}\,\pi\, p^3 //$$

OBSERVACION :

Si la curva que limita la región está dada en coordenadas paramétricas :

$$y = f(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x\ (t) \\ \quad\quad\quad\quad t_0 \le t \le t_1 \\ y = y\ (t) \end{cases} \qquad \text{Entonces}$$

$$V = \pi \int_{x_0}^{x_1} y^2\ (x)\ dx = \int_{t_0}^{t_1} y^2\ (t)\ x'\ (t)\ dt$$

si el eje de giro es el eje Ox

Ejemplo :

1.- Hallar el volúmen que genera la rotación del arco de cicloide :

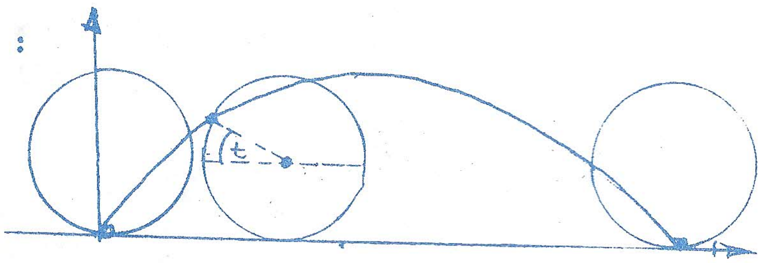
$$x = a(t - \text{Sen}t)$$

$$0 \le t \le 2\pi$$

$$y = a(1 - \text{Cos}t)$$

girando en torno del eje Ox.

SOLUCION :



$$V = \pi \int_0^{2\pi} a^2\ 1 - \text{Cos}\ t)^2\ a\ (1 - \text{Cos}\ t)\ dt$$

$$= \pi\ a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \text{Cos}\ t)^3\ dt$$

$$= \pi\ a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\ \text{Cos}\ t + 3\ \text{Cos}^2\ t - \text{Cos}^3\ t)\ dt$$

$$= 5\ a^3\ \pi^2.$$

2.- Calcular el volúmen de la esfera.

$$x = R \cos t \qquad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{girando en torno del eje } 0x$$

$$y = R \operatorname{Sen} t$$

$$V = 2\pi \int_{\pi/2}^{0} y^2 (t)\, dx\, (t)$$

$$V = -2\pi \int_{0}^{\pi/2} (R^2 \operatorname{Sen}^2 t)\, (- \operatorname{Sen} t)\, dt$$

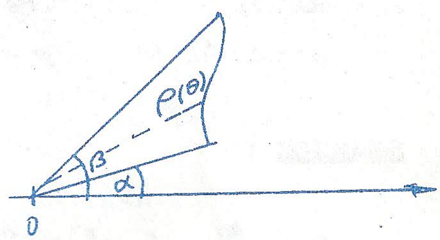
$$V = + 2\pi R^3 \int_{0}^{\pi/2} \operatorname{Sen}^3 t\, dt$$

$$V = + 2\pi R^3 \left[\frac{\cos^3 t}{3} - \cos t \Big/_{0}^{\pi/2} \right]$$

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

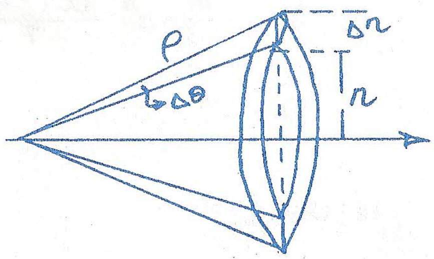
OBSERVACION :

Si la región plana está acotada por una curva dada en polares
$\rho = \rho\,(\theta) \qquad \alpha \leq \theta \leq \rho$



que gira en torno del eje polar.

Por tratarse de un cuerpo de forma casi cónica para un ángulo pequeño, tomamos como "elemento fundamental" de volumen un cono circular hueco.



$$\Delta V = \frac{1}{3} \pi \rho \left[(r + \Delta r)^2 - r^2 \right]$$

$$= \frac{1}{3} \pi \rho \left[2r\, \Delta r + (\Delta r)^2 \right]$$

$$= \frac{2}{3} \pi \rho\, r\, \Delta r \; : \; \Delta r \quad 0 \quad y \quad r = \rho \operatorname{Sen} \theta$$

$$\Delta r = \rho\, \Delta\, \theta$$

$\Delta V = \frac{2\pi}{3} \rho^3 \operatorname{Sen} \theta\, \Delta\, \theta;$ sumando y llevando al limite

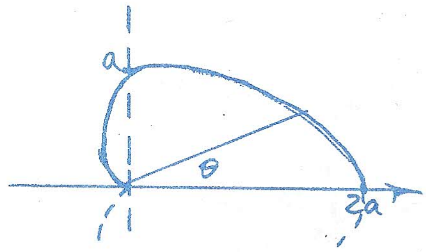
$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\rho} \rho^3 \operatorname{Sen} \theta\, d\theta$$

Ejemplo :

1.- Hallar el volúmen del cuerpo que resulta de la rotación de la cardioide :

$$\rho = a\,(1 + \text{Cos}\,\theta)$$

en torno al eje polar.



SOLUCION :

$$V = \frac{2\pi}{3}\, a^3 \int_0^{\pi} (1 + \text{Cos}\,\theta)^3\, \text{Sen}\,\theta\, d\theta$$

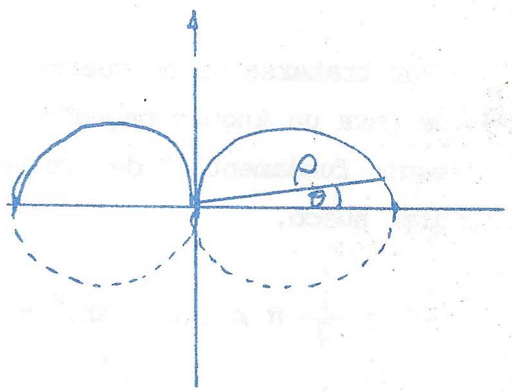
$$V = -\frac{2\pi\, a^3}{3} \int_0^{\pi} (1 + \text{Cos}\,\theta)^3\, (d\,\text{Cos}\,\theta)$$

$$V = -\frac{2\pi\, a^3}{3} \left[\frac{(1 + \text{Cos}\,\theta)^4}{4}\right]_0^{\pi}$$

$$V = -\frac{2\pi\, a^3}{3} \left[-\frac{2^4}{4}\right] = \frac{8\pi\, a^3}{3}$$

2.- Hallar el volúmen del cuerpo generado por la rotación, sobre el eje polar de $\rho = a\,\text{Cos}^2\,\theta$

SOLUCION :



$$V = \frac{4\pi}{3} \int_0^{\pi/2} a^3\, \text{Cos}^6\,\theta\, \text{Sen}\,\theta\, d\theta$$

$$V = \frac{4\pi}{3}\, a^3 \left.\frac{\text{Cos}^7\,\theta}{7}\right|_0^{\pi/2}$$

$$V = \frac{4\pi\, a^3}{21}$$

OBSERVACION :

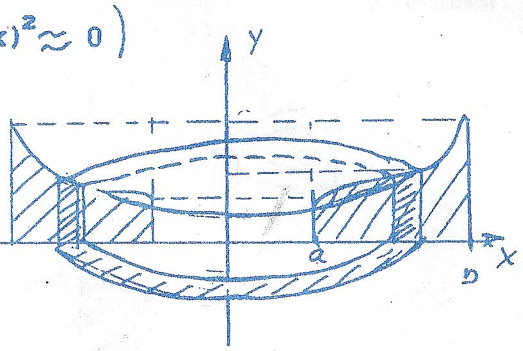
Para calcular el volúmen de un cuerpo generado por la rotación de la región encerrada por $y = f(x)$; $y = c$; $y = d$, en torno al eje y

Tenemos una modalidad alternativa a la conocida

$$V = \pi \int_c^d x^2\,(y)\, dy$$

y la diferencia está en que se suma en dirección del eje 0x y los alementos fundamentales de volúmen son cilindros huecos como en la fig. y cuyo volúmen es :

$$\Delta V = (\pi\ (x + \Delta x)^2 - \pi\ x^2)\ y \quad . \quad \left((\Delta x)^2 \approx 0\right)$$



$$\Delta V = 2\pi\ x\ \Delta\ x\ y$$

sumando y llevando al limite

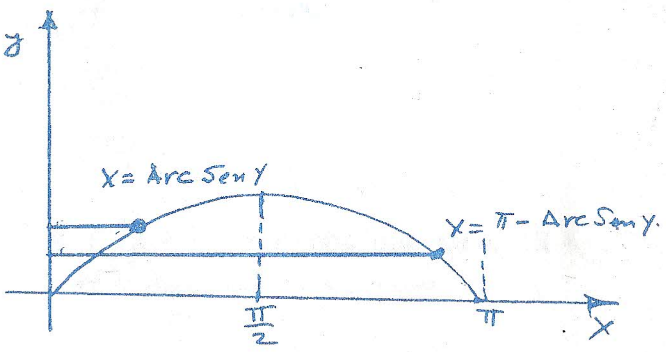
$$V = 2\pi \int_a^b xy\ dx \quad ó$$

$$V = 2\pi \int_a^b x\ f\ (x)\ dx$$

Ejemplo :

1.- Hallar el volúmen que se genera por la rotación de una onda $y = \text{Sen}\ x$ cuando gira en torno del eje y.

<u>SOLUCION</u> :



$$V = 2\pi \int_0^{\pi} x\ \text{Sen}\ x\ dx$$

$$= 2\pi\ (\text{Sen}\ x - x\ \text{Cos}\ x \Big|_0^{\pi} = 2\pi^2$$

En cambio la forma anterior resulta

$$V = \pi \int_0^1 [(\pi - \text{Arc Sen}\ y)^2 - (\text{Arc Sen}\ y)^2]\ dy$$

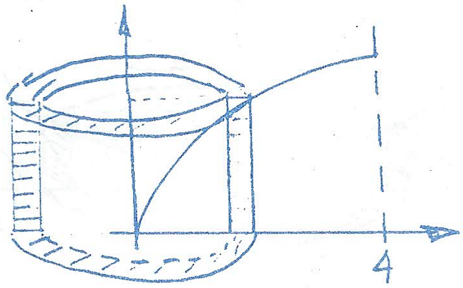
$$= \pi^2 \int_0^1 (\pi - 2\ \text{Arc Sen}\ y)\ dy$$

$$= \pi^3 - 2\pi^2 \left\{y\ \text{Arc Sen}\ y + \sqrt{1 - y^2}\right\}_0 \Big|^1$$

$$= 2\pi^2 \quad (\text{¡más laborioso!})$$

2.- Calcular el volúmen por rotación en el eje y de la región acotada por $y = \sqrt{x}$; $x = 4$; $y = 0$.

SOLUCION :



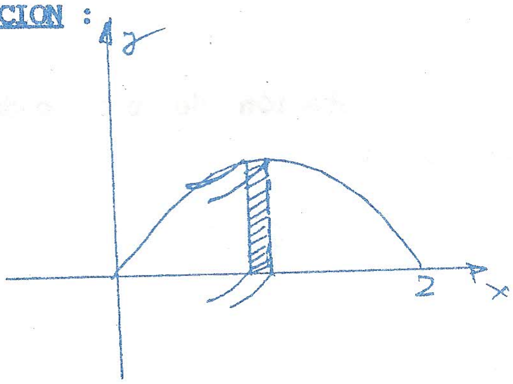
$$V = 2\pi \int_0^4 x\, f(x)\, dx$$

$$V = 2\pi \int_0^4 x^{3/2}\, dx = \frac{4\pi}{5}\, x^{5/2} \Big|_0^4$$

$$V = \frac{128\pi}{5} \,//$$

3.- Calcular el volúmen por rotación sobre el eje 0y de la región acotada por $y = x(2 - x)$; $y = 0$.

SOLUCION :



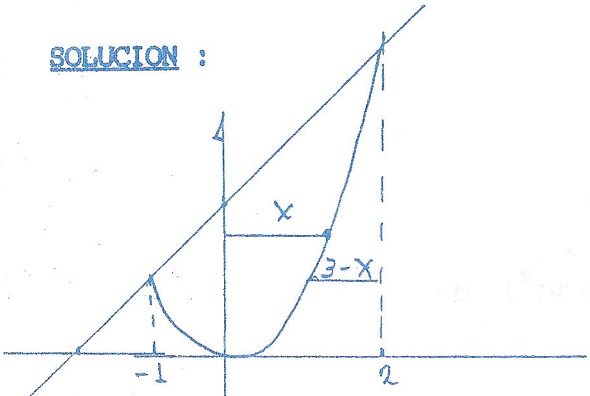
$$V = 2\pi \int_0^2 x\,(2x - x^2)\, dx$$

$$V = 2\pi \int_0^2 (2x^2 - x^3)\, dx$$

$$V = \frac{8\pi}{3} \,//$$

4.- El area acotada por $y = x^2$; $y = x + 2$ gira en torno de la recta $x = 3$. Evaluar el volúmen.

SOLUCION :



$$V = 2\pi \int_{-1}^2 xy\,(x)\, dx$$

$$V = 2\pi \int_{-1}^2 (3 - x)\,(x + 2 - x^2)\, dx$$

$$V = 2\pi \int_{-1}^2 (x^3 - 4x^2 + x + 6)\, dx$$

$$V = 2\pi \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right|_{-1}^2$$

$$V = 22\ 1/2\ \pi \,//$$

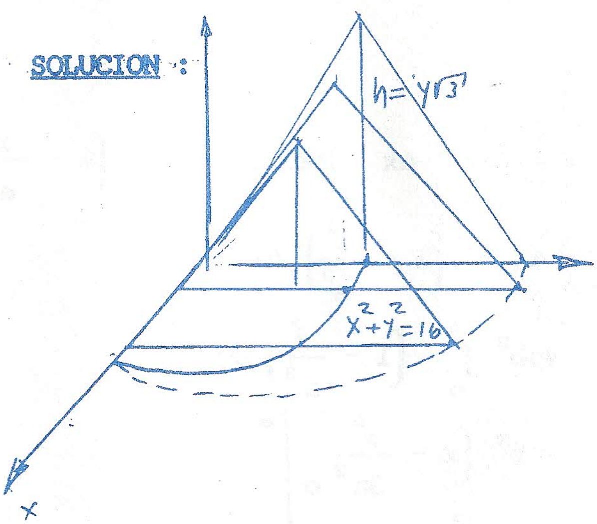
C) Volúmen de un cuerpo de seccion conocida

A diferencia de los cuerpos de revolución ; estos tienen una sección no circular ; y la idea básica para determinar su volúmen está en definir un "elemento fundamental" de volúmen que sumada y llevada al limite quedará expresado como una integral.

Ejemplos :

1.- Calcular el volúmen generado por un triángulo variable equilátero de modo que el punto medio de la base se desplaza sobre la circunsferencia $x^2 + y^2 = 16$, además un vertice está sobre el eje 0x y el plano que lo contiene es paralelo al plano (yz).

SOLUCION :



$$V_r = \frac{1}{2}(2y)(y\sqrt{3}) \cdot \Delta x \Rightarrow$$

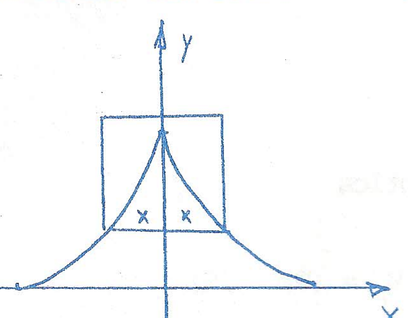
$$V = \int_0^4 y^2 \sqrt{3}\, dx$$

$$V = \int_0^4 (16 - x^2)\sqrt{3}\, dx$$

$$V = \sqrt{3}\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{128\sqrt{3}}{3}$$

2.- Sobre las cuerdas de la Astroide : $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ se contruyen cuadrados de lado igual a la cuerda y los planos que los contienen son perpendiculares al plano xy. Calcular el volúmen cuando las cuerdas son paralelas al eje ox.

SOLUCION :



$$V_r = (2x)^2 \Delta y \; ; \; x^{2/3} = a^{2/3} - y^{2/3}$$

$$V_r = 4\,(a^{2/3} - y^{2/3})\,\Delta y$$

luego

$$V = 4 \cdot 2\int_0^a (a^{2/3} - y^{2/3})^3\, dy$$

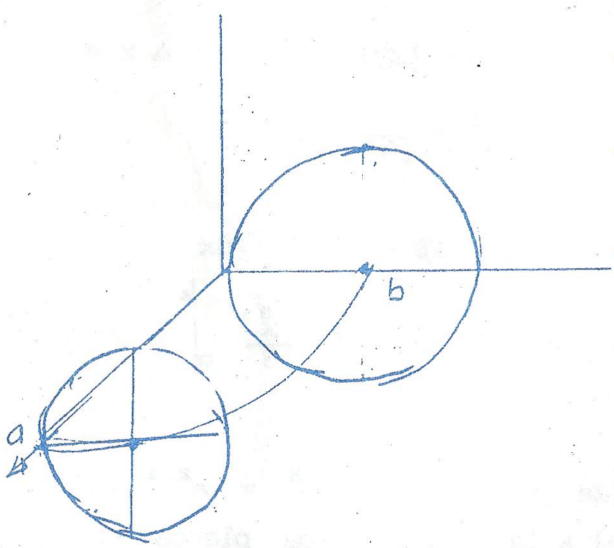
$$V = 8\int_0^a (a^2 - 3a^{4/3}\, y^{2/3} + 3\, a^{2/3}\, y^{4/3} - y^2)\, dy$$

$$V = 8\left[a^2 y - \frac{9}{5} a^{4/3} y^{5/3} + \frac{9}{7} a^{2/3} y^{7/3} - \frac{y^3}{3}\right|_0^a$$

$$V = \frac{16}{105} a^3 //$$

3.- Un circulo deformable se desplaza de forma que su centro recorre la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, el plano que lo contiene es perpendicular al plano xy; y uno de los puntos de la circunsferencia descansa sobre el eje Oy. Hallar el volúmen asi engendrado.

SOLUCION :



$$V_r = \pi\, (2y)^2\, \Delta x \quad \text{Pero} \quad y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$V_r = 4\pi\, b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Delta x \Rightarrow$$

$$V = 4\pi b^2 \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx$$

$$V = 4\pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right|_0^a$$

$$V = \frac{8\pi\, ab^2}{3} //$$

4.- Calcular el volúmen del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

SOLUCION :

Este cuerpo tiene sección eliptica

$$V_r = (PM \cdot MQ \cdot \Delta y)\, \pi$$

$$PM \Rightarrow x = 0 \therefore z = c\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$$

$$MQ \Rightarrow z = 0 \therefore x = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$$

$$V_r = \pi \, ac \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \Delta y \qquad \text{luego}$$

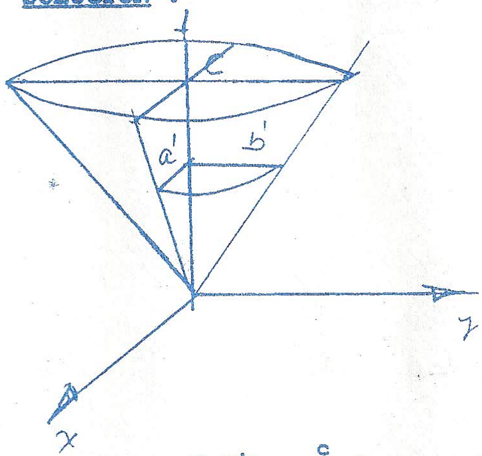
$$V = 2 \pi \, ac \int_0^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy$$

$$V = \frac{4}{3} \pi \, abc$$

5.- Calcular el volúmen del cono eliptico :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad 0 \leq z \leq c$$

SOLUCION :



$$V_r = \pi \, a' \, b' \cdot \Delta z$$

$$a' : (y = 0) \Rightarrow x = \frac{az}{c}$$

$$b' : (x + 0) \Rightarrow y = \frac{bz}{c}$$

$$V_r = \frac{\pi \, ab}{c^2} z^2 \cdot \Delta z \Rightarrow$$

$$V = \frac{\pi \, ab}{c^2} \int_0^c z^2 \, dz = \frac{\pi \, abc}{3}$$

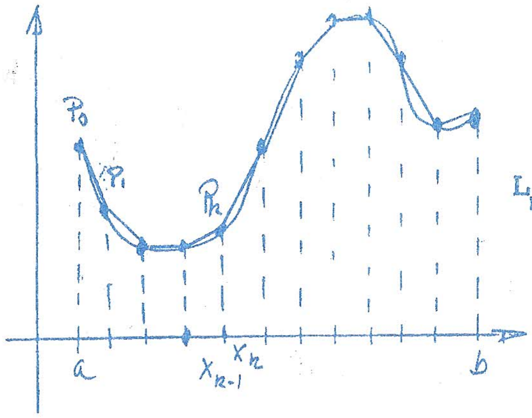
C.- Longitud de una curva :

Para lograr una expresión para la longitud de la curva $y = f(x)$ $a \leq x \leq b$; plantearemos una suma intermedia (o suma de Riemann) cuyo limite expresa una integral definida.

a) Sea $y = f(x)$ continua en $[a,b]$ y $\mathbb{P}$ una partisión de $[a,b]$ en n partes iguales de longitud $\frac{b-a}{n}$.

b) Los puntos $P_o, P_1, \ldots . P_n$ en la curva, se corresponden a los puntos de $\mathbb{P}$ y que unidas definen una poligonal de longitud.

$$L_p = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}$$



$$L_p = \sum_{1}^{n} \sqrt{(\Delta_k\, x)^2 + (f(y_k) - f(x_{k-1})^2}$$

$$= \sum_{1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f\ (x_k)}{\Delta_k\ y}\right)^2}\ \Delta_k\, x$$

Si $n \to \infty$ la poligonal tiende a la longitud de la curva.

DEFINICION :

Si f(x) continua en [a,b]. Entonces la longitud de la curva se define por :

$$L_c = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2\ (x)}\ dx_{//}$$

OBSERVACION :

Para el caso que : $x = g(y)$: $c \leq y \leq d$

$$L_c = \int_c^d \sqrt{1 + g'^2\ (y)}\ dy_{//}$$

OBSERVACION :

Si la curva está dada en forma paramétrica : $\begin{cases} x = x\ (t) \\ y = y\ (t) \end{cases}$ $t_o \leq t \leq t_1$

y como $y'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} \Rightarrow$

$$L_c = \int_{t_o}^{t_1} \sqrt{1 + \frac{y'^2\ (t)}{x'^2(t)}}\ x'\ dt \Rightarrow$$

$$L_c = \int_{t_o}^{t_1} \sqrt{x'^2\ (t) + y'^2\ (t)}\ dt_{//}$$

OBSERVACION :

Para una curva en polares $\rho = \rho(\theta)$ $\alpha \leq \theta \leq \beta$

como $x(\theta) = \rho(\theta) \operatorname{Cos} \theta$

$y(\theta) = \rho(\theta) \operatorname{Sen} \theta \Rightarrow$

$x'(\theta) = \rho' \operatorname{Cos} \theta - \rho \operatorname{Sen} \theta$

$y'(\theta) = \rho' \operatorname{Sen} \theta + \rho \operatorname{Cos} \theta \quad \therefore x'^2 + y'^2 = \rho'^2 + \rho^2$ Así

$$L_c = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\theta_{//}$$

Ejemplos :

1.- calcular la longitud de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

SOLUCION :

$$2/3\, x^{-1/3} + 2/3\, y^{-1/3}\, y' = 0 \Rightarrow y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$$

luego $$L_c = 4 \int_0^a \sqrt{1 + \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}\, dx$$

$$L_c = 4 \int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\, dx = 6a_{//}$$

2.- Calcule la longitud de la curva $y^3 = 8x^2$ $1 \leq x \leq 8$

SOLUCION :

Conviene considerar la curva en la forma $x = g(y)$, luego :

$$L_c = \int_{y_0}^{y_1} \sqrt{(1 + g'^2(y))}\, dy$$

$$16x\, x' = 3y^2 \Rightarrow x' = \frac{3y^2}{16\, x}\ ;\ 2 \leq y \leq 8$$

$$L_c = \int_2^8 \sqrt{1 + x'^2\ (y)}\ dy$$

$$L_c = \int_2^8 \sqrt{1 + \frac{9\ y^4}{16^2\ x^2}}\ dy \ : \ x^2 = y^3/_8$$

$$L_c = \int_2^8 \sqrt{1 + \frac{9}{32}\ y}\ dy$$

$$L_c = \frac{32}{9}\left(1 + \frac{9}{32}\ y\right)^{3/2} \cdot \frac{2}{3}\ \Big|_2^8$$

$$L_c = \frac{64}{27}\left[\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} - \left(\frac{25}{10}\right)^{3/2}\right]_{//}$$

3.- Calcule la longitud de la circunsferencia $\begin{aligned} x &= R\ \text{Cos}\ T \\ & \qquad 0 \leq t \leq 2\pi \\ y &= R\ \text{Sen}\ t \end{aligned}$

SOLUCION :

$$L_c = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2\ (t) + y'^2\ (t)}\ dt$$

$$L_c = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\ (\text{Sen}^2\ t + \text{Cos}^2 t)}\ dt$$

$$L_c = R \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\ R_{//}$$

4.- Calcular la longitud de un arco de ciclioide : $\begin{aligned} x &= a\ (t - \text{Sen}\ t) \\ & \qquad 0 \leq t \leq 2\pi \\ y &= a\ (1 - \text{Cos}\ t) \end{aligned}$

SOLUCION :

$$L_c = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 (1 - \text{Cos } t)^2 + a^2 \text{ Sen}^2 t} \; dt$$

$$L_c = a \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \text{Cos } t} \; dt$$

$$L_c = 2 a \int_0^{2\pi} \text{Sen } \frac{t}{2} \; dt = 8 a_{//}$$

6.- Calcular la longitud de la curva $\rho = a \text{ Sen}^3 \dfrac{\theta}{3}$

SOLUCION :

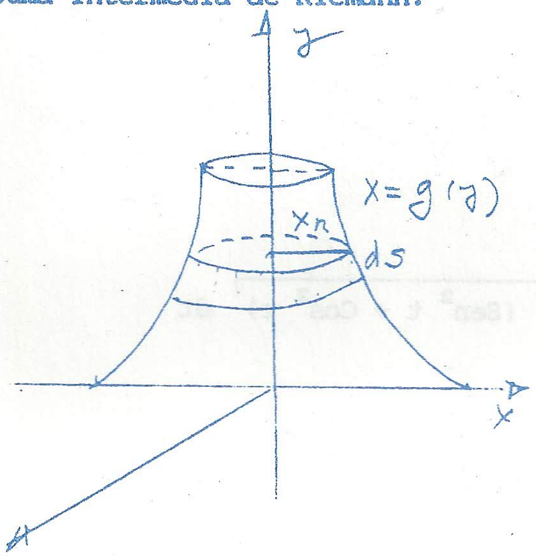
$$L_c = \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2 \text{ Sen}^6 \frac{\theta}{3} + y\, a^2 \text{ Sen}^4 \frac{\theta}{3} \text{ Cos}^2 \frac{\theta}{3}} \; d\theta$$

$$L_c = a \int_0^{3\pi} \text{Sen}^2 \frac{\theta}{3} \; d\theta = \frac{3\pi a}{2}_{//}$$

6.- Area de una Superficie de Revolucion :

Haciendo girar en torno de algun eje el área plana acotada por $y = f(x) : a \leq x \leq b$.

Se trata de hallar una expresión para el área de la superficie del cuerpo como una integral es decir como limite de una suma intermedia de Riemann.



Si consideramos, según la fig., que $x = g(y)$; Como :

$$L_c = \int_c^d \sqrt{1 + x'^2 (y)} \; dy \text{ entonces}$$

$ds = \sqrt{1 + x'^2 (y)}$ es la

diferencial de areo y un "elemento fundamental de área de superficie" es un manto de cono con ds como generatriz y radio x_k , y de área

$$\Delta A_k = 2\pi x_k ds$$

$$= 2\pi x_k (y) \sqrt{1 + x'^2 (y)} \Delta y.$$ Si $n \to \infty$ para la suma de todos estos elementos, tenemos que :

$$A(S) = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + x'^2 (y)} \; dy$$ o también

$$A(S) = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2 (x)} \; dx$$

En polares toma la forma

$$A(S) = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho \operatorname{Sen} \theta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \; d\theta$$

Ejemplo :

1.- Calcular el área de la superficie esférica, de radio R.

<u>SOLUCION</u> :

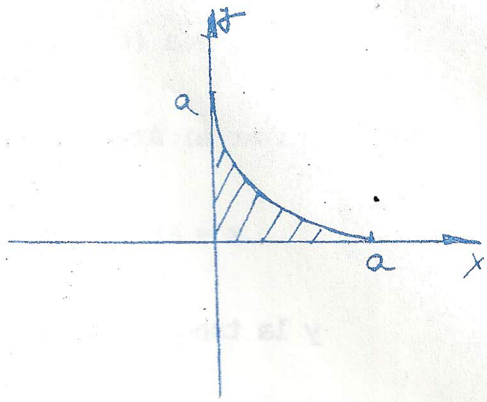
Si $x = R \operatorname{Cos} t$, $y = R \operatorname{Sen} \theta$, $0 \leq t \leq \pi$

$$A(S) = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} y (t) \cdot \sqrt{x'^2 (t) + y'^2 (t)} \; dt$$

$$A(S) = 2\pi \int_0^{2\pi} R \operatorname{Sen} t \sqrt{R^2 (\operatorname{Sen}^2 t + \operatorname{Cos}^2 t)} \; dt$$

$$A(S) = 2R^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{Sen} t \, dt = 2\pi R^2 \operatorname{Cos} t \Big|_0^{2\pi} = 4\pi R^2$$

2.- Calcular el área que genera una astride girando en torno del eje oy .



SOLUCION :

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

$$A(S) = 2 \cdot 2\pi \int_0^a x \sqrt{1 + x'^2}\ dy$$

$$A(S) = 4\pi \int_0^a \left(a^{2/3} - y^{2/3}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^{2/3}}\ dy$$

$$A(S) = 4\pi \int_0^a \left(a^{2/3} - y^{2/3}\right)^{3/2} \frac{a^{1/3}}{y^{1/3}}\ dy$$

$$A(S) = 4\pi a^{1/3} \cdot \frac{2}{5} \left(a^{2/3} - y^{2/3}\right)^{5/2} \frac{3}{2} \Bigg|_0^a$$

$$A(S) = \frac{12\pi}{5} \left(a^{5/3}\right) a^{1/3}$$

$$A(S) = \frac{12\pi}{5} a^2 //$$

Ejercicios :

1.- Calcular el área limitada por $y = \text{Ln } x$; el eje ox y la recta $x = e$.

2.- Hallar el área entre las parábolas $3y = x^2$; $y = 4 - \frac{2}{3} x^3$.

3.- Hallar el área de la región acotada por la curva de Agnesi

$$y = \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{y la parábola} \quad y = \frac{x^2}{2}$$

4.- Calcular el área de la figura limitada por :

$$y = e^x \ ; \ y = e^{-x} \ ; \ x = 1$$

5.- Hallar el área entre el eje x y un arco de la Cicloide :

$x = a\ (t - \text{Sen}t) \qquad y = a\ (1 - \text{Cos}t)$

6.- Hallar el área de la figura limitada por una onda de :

$x = at - b\ \text{Sen}t \qquad y = a - b\ \text{Cos}t \qquad 0 < b \leq a$

y la tangente a ella en sus puntos inferiores.

7.- Hallar el área de la figura limitada por el lazo del folium de Descartes.

$$x = \frac{3\ at}{1 + t^3} \quad ; \quad y = \frac{3\ at^2}{1 + t^3}$$

8.- Hallar el área limitada por la curva $\rho^2 = a^2\ \text{Sen}\ 4\ \theta$.

9.- Hallar el área limitada por el Caracol de Pascal $\rho = 2 + \text{Cos}\ \theta$.

10.- Hallar el área comprendida entre la primera y la segunda espira en la espiral de Arquímides $\rho = a\theta$.

11.- Hallar el área de una de las hojas de la curva $\rho = a\ \text{Cos}\ 2\theta$.

12.- Hallar el volúmen del cuerpo engendrado por la rotación alrededor del eje x de la región limitada por :

a) $y = 1 - x^2 \quad ; \quad x = 0 \quad ; \quad x = 1$
b) $y = x^3 \quad ; \quad x = 1 \quad ; \quad x = 2$
c) $y = \dfrac{1}{x} \quad ; \quad x = 1 \quad ; \quad x = t$

13.- Encontrar el volúmen del sólido formado por la rotación de la región acotada por :

$y = 4 - x^2 \quad ; \quad y = 3$ girando en torno de $y = -1$

14.- Hallar el volúmen del cuerpo engendrado por giro de la superficie limitada por :

$y = e^x \quad ; \quad x = 0$ e $y = 0$

15.- Hallar el volúmen del cuerpo engendrado al girar alrededor de la recta $x = a$, la parte de la parábola $y^2 = 4ax$ es interceptada por la misma recta.

16.- Hallar el volúmen del cuerpo generado al girar un arco de Cicloide en torno del eje y.

17.- Hallar el volúmen de giro de la curva anterior si al eje de giro es el eje de simetría.

18.- Hallar el volúmen de rotación de la Astroide.

$x = a \operatorname{Cos}^3 t$

$y = a \operatorname{Sen}^3 t$ en torno al eje y .

19.- Hallar el volúmen del cono elíptico recto cuya base es una elipse de semi-ejes a y b y cuya altura es h.

20.- Calcular el volúmen de un cuadrado móvil cuyo plano es perpendicular al eje x y tiene dos Vértices de la base apoyados en las parábolas

$y^2 = 16x$; $y^2 = 4x$ y tienen por lado diferencia de las dos ordenadas y se mueve de $x = 0$ a $x = 4$.

21.- Hallar el volúmen del Hiperboloide :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

22.- Hallar el volúmen del Elipsoide :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

23.- Calcular la longitud del arco de la parábola cúbica : $y^2 = x^3$ desde el origen a $x = 4$.

24.- Calcule la longitud de :

a) $f(x) = (x + 1)^{3/2}$ entre $x = 3$ y $x = 8$

b) $f(x) = \frac{2}{3}\left(x^{3/2}\right) - \frac{1}{2}\left(x^{1/2}\right)$ entre $x = 1$ y $x = 4$

c) $f(x) = \int_1^x \sqrt{t^2 - 1}$ entre $x = 1$ y $x = 3$

d) $f(x) = x^{2/3} - 1$ entre $x = 8$ y $x = 27$

25.- Hallar la longitud de la curva :

a) $y = L_n\, x$ entre $\sqrt{3}$ y $\sqrt{8}$

b) $y = e^x$ entre $(0, 1)$; $(1, 0)$

26.- Hallar la longitud de curva :

$x = a\,(2\,\mathrm{Cos}t - \mathrm{Cos}2t)$
$y = a\,(2\mathrm{Sen}t - \mathrm{Sen}2t)$

27.- Hallar la longitud de la Astroide

$x = a\,\mathrm{Cos}^3\, t$
$y = a\,\mathrm{Sen}^3\, t$

28.- Hallar la longitud total de $\rho = a\,(1 + \mathrm{Cos}\,\theta)$

29.- Hallar la longitud del arco de la espiral hiperbólica $\rho = \frac{1}{\theta}$

desde $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ a $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

30.- Hallar el área de la superficie del "huso" que resulta al girar una semi onda de la simsoide $y = \mathrm{Sec}x$ alrededor del eje x.

31.- Hallar el área de la superficie de revolución de ls Astride :

$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ alrededor del eje x.