APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

1.3 APLICACIONES DEL MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES PARA RESOLVER LA ECUACIÓN DIFERENCIAL QUE MODELA UN SISTEMA FÍSICO

En los problemas 1 al 12 establezca la ecuación diferencial que representa la situación física planteada y resuélvala por el método de separación de variables, introduciendo las condiciones de contorno para obtener el modelo matemático del escenario.

1. Cuando un rayo de luz pasa a través de una sustancia transparente su intensidad I disminuye en forma proporcional a $I(t)$, en donde t representa el espesor del medio expresado en pies. En agua de mar la intensidad a 3 pies bajo la superficie es 25% de la intensidad inicial I_0 del rayo incidente. ¿Cuál es la intensidad del rayo a 15 pies bajo la superficie?

Solución

Los datos que se tiene son

$$I_0 = 100\% \qquad t = 0$$
$$I_3 = 25\% \qquad t = 3$$
$$I_{15} = ? \qquad t = 15$$

y la ecuación diferencial del problema es

$$\frac{dI}{dt} = KI$$

Aplicando en esta ecuación el método de separación de variables se obtiene que

$$\frac{dI}{I} = Kdt \quad \Rightarrow \quad \ln I = Kt + C \quad \Rightarrow \quad e^{\ln I} = e^{Kt+C} = ce^{Kt} \quad \Rightarrow \quad I(t) = ce^{Kt}$$

Sustituyendo aquí la condición inicial se encuentra que

$$I(t) = I_0 e^{Kt}$$

Sustituyendo en esta ecuación la condición de frontera se obtiene que

$$.25 = I_0 e^{3K} \quad \Rightarrow \quad K = \ln .25 / 3 = -0.4620$$

Sustituyendo el valor de K resulta que

$$I(t) = I_0 e^{-0.4620t}$$

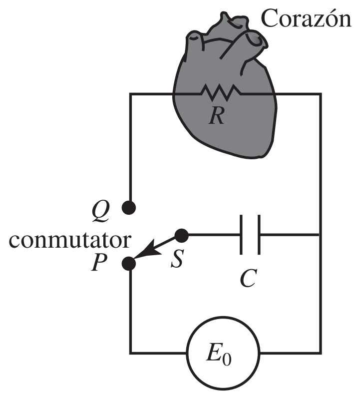
y de aquí se tiene que

$$I(15) = e^{-.4620(15)} = .00097800086$$

Por tanto, la intensidad del rayo a 15 pies bajo la superficie es

$$I(15) \cong \ 0.1\%$$

2. Un marcapasos esquematizado consta de una pila eléctrica, un pequeño capacitor y el corazón, que funciona como resistencia en el circuito. Cuando el conmutador S se conecta a P, el capacitor (o condensador) se carga; cuando S está conectado a Q, el capacitor se descarga enviando un estímulo eléctrico al corazón. Durante este lapso la tensión eléctrica aplicada al corazón está dada por



$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{RC}E; \qquad t_1 < t < t_2$$

en donde R y C son constantes. Determinar $E(t)$ si $E(t_1)=E_0$, la fuerza electromotriz de la pila. Desde luego la conmutación (el cambio de conexión del conmutador) es periódica, a fin de simular el ritmo cardiaco natural y producir el estímulo del corazón.

Los datos que se tienen son

$$\frac{dE}{dt}=-\frac{1}{RC}E\ ; \qquad t_1<t<t_2,$$

$$E(t)=?$$

$$E(t_1)=E_0$$

Solución

Separando variables se obtiene que

$$\int \frac{dE}{E}=-\int \frac{1}{RC}dt \quad \Rightarrow \quad E=e^{\left(-\frac{t}{RC}+c_1\right)}$$

$$\Rightarrow \quad E=c_2e^{-\frac{t}{RC}}$$

Sustituyendo la condición inicial se obtiene que

$$E_0=c_2e^{-\frac{t_1}{RC}} \quad \Rightarrow \quad \frac{E_0}{e^{-\frac{t_1}{RC}}}=c_2 \quad \Rightarrow \quad E=\frac{E_0}{e^{-\frac{t_1}{RC}}}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\Rightarrow \quad E=E_0e^{-\frac{t_1}{RC}}e^{\frac{t_1}{RC}}$$

Por tanto la solución particular es

$$E(t)=E_0e^{\frac{-(t-t_1)}{RC}}$$

3. En cierto modelo que representa la variación de la población *P(t)* de una comunidad se supone que

$$\frac{dP}{dt}=\frac{dB}{dt}-\frac{dD}{dt}$$

en donde *dB/dt* y *dD/dt* son las tasas de natalidad y de mortalidad, respectivamente.

a) Determinar *P(t)* si

$$\frac{dB}{dt}=k_1P \qquad \text{y} \qquad \frac{dD}{dt}=k_2P$$

b) Analizar los casos $k_1>k_2$, $k_1=k_2$ y $k_1<k_2$

Solución

a) Sustituyendo $\frac{dB}{dt} = k_1 P$ y $\frac{dD}{dt} = k_2 P$ en $\frac{dP}{dt} = \frac{dB}{dt} - \frac{dD}{dt}$ se tiene que

$$\frac{dP}{dt} = k_1 P - k_2 P \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dP}{(k_1 - k_2)P} = dt$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(k_1 - k_2)} \int \frac{(k_1 - k_2)dP}{(k_1 - k_2)P} = \int dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(k_1 - k_2)} \ln(k_1 - k_2)P = t + c$$

$$\Rightarrow \quad (k_1 - k_2)P = e^{(k_1 - k_2)t} \times e^{(k_1 - k_2)c} \qquad \Rightarrow \quad P = \frac{k\, e^{(k_1 - k_2)t}}{(k_1 - k_2)}$$

Haciendo $C = \frac{k}{(k_1 - k_2)}$ con $k = e^{(k_1 - k_2)c}$ se tiene que

$$P = C\, e^{(k_1 - k_2)t}$$

Tomando en cuenta que para $t = 0$ se tiene que $P = P_0$ entonces $C = P_0$ y la solución viene dada por

$$P = P_0 e^{(k_1 - k_2)t}$$

b) Para el caso $k_1 > k_2$ se tiene que la población crece en forma exponencial y se concluye que la natalidad es mayor que la mortalidad.

En el caso $k_1 = k_2$ se tiene que la población es igual a la población inicial.

Finalmente en el caso $k_1 < k_2$ resulta que la población decrece, es decir, la tasa de mortalidad es mayor que la tasa de natalidad.

4. El número de supermercados *C(t)* en todo el país que usan un sistema de control por computadora de los horarios de salida se describe por medio del problema de valor inicial

$$\frac{dC}{dt} = C(1 - 0.0005C); \qquad t > 0; \qquad C(0) = 1$$

¿Cuántos supermercados estarán usando dicho sistema cuando $t = 10$? ¿Cuántas empresas se estima que adoptarán el nuevo procedimiento en el futuro?

Solución

A partir de la ecuación diferencial del problema se tiene que

$$\frac{dC}{C(1 - 0.0005C)} = dt \tag{A}$$

Usando fracciones parciales resulta que

$$\frac{1}{C(1-0.0005C)}=\frac{A}{C}+\frac{B}{1-0.0005C} \tag{B}$$

$$\Rightarrow \quad 1=A \qquad B=\frac{1}{2000}$$

Sustituyendo las constantes A y B en la ecuación (B) se obtiene que

$$\frac{1}{C(1-0.0005C)}=\frac{1}{C}+\frac{1/2000}{1-0.0005C}$$

y usando esta ecuación en la ecuación (A) resulta que

$$\int\frac{dC}{C}+\frac{1}{2000}\int\frac{dC}{1-0.0005C}=\int dt$$

Integrando se obtiene que

$$\ln|C|-\ln|1-0.0005C|=t+K \quad \Rightarrow \quad \frac{C}{1-0.0005C}=e^{t+K}$$

$$\Rightarrow \quad C=Ke^{t}(1-0.0005C)$$

Sustituyendo la condición inicial $C(0)=1$ se obtiene que

$$\frac{1}{1-0.0005}=K$$

Sustituyendo el valor de K en la solución general resulta que

$$\frac{C}{1-0.0005C}=\frac{1}{1-0.0005}e^{t}$$

Para $t=10$ el número de supermercados que estarán usando dicho sistema es

$$\frac{C}{1-0.0005C}=\frac{1}{1-0.0005}e^{10} \quad \Rightarrow \quad C=\frac{22\,037.4845}{12.0187}=1\,833.59\cong 1\,834$$

Para $t=20$ el número de supermercados que estarán usando dicho sistema es

$$\frac{C}{1-0.0005C}=\frac{e^{20}}{.9995}=485\,407\,899.4 \quad \Rightarrow \quad C=\frac{485\,407\,899.4}{242\,705}=1\,999.99$$

Para $t=100$ el número de supermercados que estarán usando dicho sistema es

$$\frac{C}{1-0.0005C}=\frac{e^{100}}{.9995}=2.689*10^{43} \quad \Rightarrow \quad C=\frac{2.7*10^{43}}{1.3*10^{40}}=2\,076.92$$

Para $t = 150$ el número de supermercados que estarán usando dicho sistema es

$$\frac{C}{1-0.0005C} = \frac{e^{150}}{.9995} = 1.4 * 10^{65} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1.4 * 10^{65}}{7 * 10^{61}} = 2000$$

Para $t = 200$ el número de supermercados que estarán usando dicho sistema es

$$\frac{C}{1-0.0005C} = \frac{e^{200}}{.9995} = 7 * 10^{86} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{7 * 10^{86}}{3.6 * 10^{83}} = 1\,944$$

En base a los resultados anteriores se concluye que la cantidad de empresas que se estima que adoptarán el nuevo procedimiento en el futuro es de 2000, aproximadamente.

5. El número de personas *N(t)* de una comunidad que verán cierto aviso publicitario se rige por la ecuación logística. Inicialmente $N(0) = N_0 = 500$ y se observa que $N(1) = 1000$. Si se predice que el número límite de personas de la comunidad que verán el aviso es 50 000, determine *N(t)*.
Los datos que se tienen son

$$N(0) = N_0 = 500$$

$$N(1) = 1000$$

$$N(t) = 50\,000$$

La incógnita es $N(t)$, esto es, el número de personas que verán el aviso en un instante cualquiera.

Solución

La ecuación logística del problema es

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2$$

cuya solución es

$$\frac{dN}{N(a-bN)} = dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a}\ln|N| - \frac{1}{a}\ln|a-bN| = t + c$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left|\frac{N}{a-bN}\right| = at + ac \quad \Rightarrow \quad \frac{N}{a-bN} = c_1 e^{at}$$

y de aquí se obtiene que

$$N(t) = \frac{ac_1 e^{at}}{1 + bc_1 e^{at}} = \frac{ac_1}{bc_1 + e^{-at}}$$

Si $N(0) = N_0$, $N_0 \neq a/b$, se obtiene que $c_1 = N_0/(a - bN_0)$ y de este modo, después de sustituir y simplificar, la solución es

$$N(t) = \frac{aN_0}{bN_0 + (a - bN_0)e^{-at}}$$

Sustituyendo aquí la condición inicial se comprueba que la solución es correcta, pero se necesitan dos condiciones de frontera para determinar *a* y *b*, y sólo se cuenta con

$$N(1) = 1000$$

$$N(t) = 50\ 000$$

Por otro lado, la solución de la ecuación no lineal $dN/dt = aN - bN^2$, mediante Maple 7 es

```
> ode:=diff(N(t),t)-a*N(t)=-b*(N(t))^2;
> bernoullisol(ode,N(t);
```

$$ode := \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{N}(t)\right) - a\mathrm{N}(t) = -b\mathrm{N}(t)^2$$

$$\{\mathrm{N(t)} = \frac{a1}{b1 + \mathrm{e}^{(-2at)}\_C1a}\}$$

Esta solución no conduce a un resultado favorable en cuanto al tiempo que se necesita para que *N* personas vean el aviso.

Ahora, si

```
> ode:=diff(N(t),t)-2*N(t)=-2*(N(t))^2;
> bernoullisol(ode,N(t);
```

$$ode := \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{N}(t)\right) - 2\mathrm{N}(t) = -2\mathrm{N}(t)^2$$

$$\{\mathrm{N}(t) = \frac{1}{1 + e^{(-2t)}\_C1}\}$$

Como para la ecuación logística se tiene la restricción de que $a > 0$ y $b > 0$, entonces se puede observar que se tomó $a = 2$ y $b = 2$, en el software mencionado, obteniéndose la solución general

$$N(t) = \frac{1}{1 + C_1 e^{-2t}}$$

Sustituyendo la condición inicial se obtiene el valor de la constante C_1 y, por tanto, la solución general se transforma en

$$N(t) = \frac{1}{1 + (499/500)e^{-2t}}$$

Cualquiera de los intentos fallidos permiten observar que la solución de $dN/dt = aN - bN^2$ está acotada cuando $t \to \infty$. También se sabe que $-bN^2, b > 0$, se interpreta como la "inhibición" y que a es mucho mayor que b en la mayoría de las aplicaciones. A continuación se determina el valor de a y b.

Sustituyendo $N_0 = 500$ en la solución general $N(t) = \dfrac{aN_0}{bN_0 + (a - bN_0)e^{-at}}$ se tiene que

$$N(t) = \frac{500a}{500b + (a - 500b)e^{-at}}$$

Sustituyendo la primera condición de frontera $N(1) = 1000$, se obtiene que

$$b = \frac{5a(1 - 2e^{-a})}{5000(1 - e^{-a})}$$

La segunda condición de frontera es $N(\infty) = 50\,000$ y de aquí se concluye que el valor de a es mayor 50 000 veces que b, lo que prueba lo dicho antes.

Por otro lado, la ecuación diferencial $dN/dt = aN$ no es un modelo muy fiel de la población cuando ésta es muy grande. Sin embargo, se considera que el número límite de 50 000 es una población pequeña, por lo que se plantea determinar el tiempo en que esa población límite verá el aviso.

En este caso la ecuación diferencial del problema es

$$\frac{dN}{dt} = aN$$

Separando variables e integrando se obtiene que

$$\frac{dN}{aN} = dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a}\int \frac{dN}{N} = \int dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a}\ln N = t + c$$

Sustituyendo las condiciones inicial y de frontera se obtienen las siguientes dos ecuaciones simultáneas igualadas a una misma constante

$$\frac{1}{a}\ln 500 = c$$

$$\frac{1}{a}\ln 1000 - 1 = c$$

Igualando estas ecuaciones se tiene que

$$\frac{1}{a}\ln 500 = \frac{1}{a}\ln 1000 - 1 \qquad \Rightarrow \qquad a = .693$$

Como $N(1) = 1000$ se obtiene que

$$c = 8.968 = \frac{1}{.693}\ln(1000) = 1 + c$$

por lo que $N(t)$ en un instante cualquiera es

$$N^{\frac{1}{.639}} = 8.963e^{t}$$

Si $N = 50\,000$ se encuentra el tiempo límite para el cual esto sucede

$$50\,000^{\frac{1}{.639}} = 8.963e^{t} \qquad \Rightarrow \qquad t = \ln 672\,860.29$$

Por tanto, $t = 13.42$ es el instante en que 50 000 personas verán el aviso publicitario.

6. La población $P(t)$ de un suburbio en una gran ciudad en un instante cualquiera se rige por el problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = P(10^{-1} - 10^{-7}P) \qquad\qquad P(0) = 5000$$

en donde t se expresa en meses. ¿Cuál es el valor limite de la población? ¿Cuándo igualará la población la mitad de ese valor límite?

Solución

Separando variables e integrando se tiene que

$$\int \frac{dP}{P(10^{-1} - 10^{-7}P)} = \int dt$$

Utilizando la fórmula $\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + c$ se tiene que

$$\frac{1}{10^{-1}}\ln\left|\frac{P}{10^{-1} - 10^{-7}P}\right| = t + c \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{10^{-1} - 10^{-7}P} = e^{t}e^{c}$$

Por tanto, la solución general es

$$\frac{P}{10^{-1} - 10^{-7}P} = ce^{t}$$

Sustituyendo la condición $P(0) = 5000$ se obtiene que

$$\frac{5000}{10^{-1} - 10^{-7}(5000)} = ce^{0} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{5000}{10^{-1} - 10^{-7}(5000)} = 5025.125$$

Sustituyendo el valor de c y suponiendo que t = 100, se obtiene el número de habitantes

$$\frac{P}{10^{-1} - 10^{-7}P} = 5025.125e^{100} \quad \Rightarrow \quad P = 999\,991 \text{ habitantes}$$

Sustituyendo el valor de c y suponiendo que t = 200 se obtiene el número de habitantes

$$P = 999\,689.64 \text{ habitantes}$$

Esto quiere decir que murieron más de los que nacieron.

Suponiendo que t =150 se tiene que $P = 1\,000\,005$ habitantes. Se concluye que esta es la población límite.

Para obtener cuándo la población igualará la mitad de ese valor límite, se plantea lo siguiente

$$P = \frac{P}{2} = \frac{1\,000\,005}{2} = 500\,002.5 \text{ personas}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{500\,003}{10^{-1} - 10^{-7}(500\,003)} = 5025.125e^{t}$$

$$\Rightarrow \quad t = 52.9 \text{ meses}$$

7. Obtener la solución de la ecuación logística modificada

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP)(1 - cP^{-1}) \qquad a,\ b,\ c > 0$$

Solución

Utilizando Maple 7 se obtiene que

```
> with(DEtools):
> ode := diff(P(t),t) = P(t)*((a-b*P(t))*(1-c*P(t)^(-1)));
exactsol( ode, P(t) );
```

$$ode := \frac{\partial}{\partial t} P(t) = P(t)\,(a - b\,P(t))\left(1 - \frac{c}{P(t)}\right)$$

$$\left\{ P(t) = \frac{\dfrac{\mathbf{e}^{(t\,a)}\,\mathbf{e}^{(\_C1\,a)}\,a}{\mathbf{e}^{(t\,b\,c)}\,\mathbf{e}^{(\_C1\,b\,c)}} - c}{-1 + \dfrac{b\,\mathbf{e}^{(t\,a)}\,\mathbf{e}^{(\_C1\,a)}}{\mathbf{e}^{(t\,b\,c)}\,\mathbf{e}^{(\_C1\,b\,c)}}} \right\}$$

```
> simplify({P(t) =
(1/exp(t*b*c)*exp(t*a)/exp(_C1*b*c)*exp(_C1*a)*a-c)/(-
1+b/exp(t*b*c)*exp(t*a)/exp(_C1*b*c)*exp(_C1*a))});`
```

$$\left\{ P(t) = \frac{a\,\mathbf{e}^{((t+\_C1)(-b\,c+a))} - c}{-1 + b\,\mathbf{e}^{((t+\_C1)(-b\,c+a))}} \right\}$$

8. Dos sustancias químicas A y B se combinan para formar una sustancia química C. La reacción que resulta entre las dos sustancias químicas es tal que por cada gramo de A se usan 4 g de B. Se observa que se forman 30 g del compuesto C en 10 min. Determine la cantidad de C en un instante cualquiera si la rapidez de la reacción es proporcional al producto de las cantidades de A y B restantes y si en un principio hay 50 g de A y 32 g de B.
¿Qué cantidad de compuesto C hay después de 15 min? Interprete la solución cuando $t \to \infty$.

Solución

Sea $x(t)$ el número de gramos de compuesto C presentes en un instante cualquiera. Claramente se sabe que $x(0) = 0$ y $x(10) = 30$.

Suponiendo que hay 2 gramos de compuesto C habrá *a* gramos de *A* y *b* gramos de B. Por tanto, $a + b = 2$, $b = 4a$. En tal caso se tiene que utilizar $a = \frac{2}{5}$ gramos de sustancia A y $b = \frac{8}{5}$ gramos de B. Para *x* gramos de C se deberán emplear $\frac{x}{5}$ gramos de A y $\frac{4}{5}x$ gramos de B.

Las cantidades restantes de A y B en un instante cualquiera son $50 - \frac{x}{5}$ y $32 - \frac{4}{5}x$. La rapidez con que el compuesto químico C se forma satisface la ecuación

$$\frac{dx}{dt} \alpha \left(50 - \frac{x}{5}\right)\left(32 - \frac{4}{5}x\right)$$

Se factorizan 1/5 del primer término y 4/5 del segundo, luego se introduce la constante de proporcionalidad

$$\frac{dx}{dt} = k(250 - x)(40 - x)$$

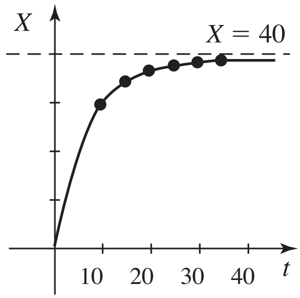
Aplicando separación de variables se obtiene que

$$\frac{dx}{(250 - x)(40 - x)} = kdt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1/120}{250 - x}dx + \frac{1/120}{40 - x}dx = kdt$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left[\frac{250 - x}{40 - x}\right] = 210kt + c_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{250 - x}{40 - x} = c_2 e^{210kt}$$

Aplicando la condición $x(0) = 0$ se obtiene que $c_2 = 25/4$. Sabiendo que x = 30 para t =10 se tiene que

$$210k = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{88}{25}\right) = 0.1258$$



(*a*)

t(min)	x(g)
10	30 (medido)
15	34.78
20	37.25
25	38.54
30	39.22
35	39.59

(*b*)

Fig. 3.1.

Sustituyendo el valor de k resulta que

$$x(t) = 1000\,\frac{1 - e^{0.1258t}}{25 - 4e^{0.1258t}}$$

En la Fig. 3.1 se muestra que $x \to 40$ cuando t $\to \infty$. Esto significa que se forman 40 gramos de compuesto C y que quedan

$$50 - \frac{1}{5}(40) = 42g \text{ de sustancia A}$$

$$32 - \frac{4}{5}(40) = 0g \text{ de sustancia B}$$

9. La altura del nivel h del agua que fluye de un orificio en el fondo de un tanque cilíndrico está dada por

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_2}{A_1}\sqrt{2gh}, g = 32\, {}^{pie}\!/_{s^2}$$

en donde A_1 y A_2 son las áreas de las secciones transversales del tanque y el orificio, respectivamente. Resuelva la ecuación si el nivel inicial del agua está a 20 pies y $A_1 = 50\,pie^2$ y $A_2 = {}^1\!/_4\, pie^2$. ¿Cuánto demora el tanque en vaciarse?
Se tiene los datos

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_2}{A_1}\sqrt{2gh}$$

$$g = 32\, {}^{pie}\!/_{s^2}$$

$$A_1 = 50 pie^2$$
$$A_2 = \frac{1}{4} pie^2$$
$$h(0) = 20 pie$$

Solución

Separando variables e integrando se tiene que

$$\int \frac{dh}{\sqrt{h}} = \int -\frac{1}{25}dt \qquad \Rightarrow \qquad 2\sqrt{h} = -\frac{1}{25}t + c$$

Sustituyendo la condición $h(0) = 20$ se tiene que $c = 2\sqrt{20}$ y la solución viene dada por

$$2\sqrt{h} = -\frac{1}{25}t + 2\sqrt{20}$$

10. Suponga que un alumno es portador del virus de la gripe y regresa a su escuela, donde hay 1000 estudiantes. Si se supone que la rapidez con que se propaga el virus es proporcional no sólo a la cantidad x de alumnos infectados sino también a la cantidad de alumnos no infectados, determine la cantidad de alumnos infectados treinta días después si se observa que a los cuatro días $x(4)=50$.

Solución

Suponiendo que nadie sale de la escuela se tiene que

$$\frac{dx}{dt} = kx(1000 - x), \qquad\qquad x(0) = 1$$

Sustituyendo $a = 1000k$ y $b = k$ en la ecuación $x(t) = \dfrac{ax_0}{bx_0 + (a - bx_0)e^{-at}}$ se tiene que

$$x(t) = \frac{1000k}{k + 999e^{-1000kt}} = \frac{1000}{k + 999ke^{-1000kt}}$$

Sustituyendo la condición $x(4)=50$ se obtiene el valor de la constante k y se obtiene que

$$x(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0.9906t}}$$

Por tanto, en 30 días el número de alumnos infectados será

$$x(30) = \frac{1000}{1 + 999e^{-29.718}} = 1000 \text{ alumnos.}$$

11. La población de una pequeña ciudad crece, en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional a la cantidad de habitantes en dicho instante. Su población inicial de 500 aumenta 15% en 10 años. ¿Cuál será la población dentro de 30 años?

Solución

Se tienen los datos

$$N_0 = 500$$
$$N(0) = N_0$$

y la ecuación del problema es

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

Separando variables e integrando se tiene que

$$\int \frac{dN}{N} = k\int dt \qquad \Rightarrow \qquad \ln|N| = kt + c$$

Entonces la solución general viene dada por

$$N = ce^{kt}$$

Aplicando aquí las condiciones iniciales resulta que $500 = c$ y a partir de la condición de frontera $N(10) = 575$ se obtiene que

$$575 = 500e^{10k} \qquad \Rightarrow \qquad k = 0.01\,397$$

Para $N(30)$ resulta que

$$N = 500e^{-0.01\,397(30)} \qquad \Rightarrow \qquad N = 760$$

12. Cuando un objeto absorbe calor del medio que lo rodea se obtiene la fórmula $\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es de 20 °C, se deja caer en un recipiente con agua hirviendo. Calcule el tiempo que dicha barra demorará en alcanzar los 90 °C. Si se sabe que su temperatura aumentó 2 °C en 1 segundo, ¿cuánto se tardará la barra en alcanzar los 98 °C?

Solución

La ecuación de este problema es

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$$

y también se tienen los datos

$$T_{inicial} = 20°C$$

$$T_{agua\_hirviendo} = 100°C$$

$$T = 90°C$$

$$T = 98°C$$

Separando variables e integrando se obtiene que

$$\int \frac{dT}{T - T_0} = \int kdt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dT}{T - 100} = \int kdt$$

$$\Rightarrow \quad \ln|T - 100| = kt + c_1 \quad \Rightarrow \quad T - 100 = c_2 e^{kt}$$

Sustituyendo la condición inicial dada, $T(0) = 20$ resulta que

$$20 = 100 + c_2 e^{k(0)} \quad \Rightarrow \quad c_2 = -80$$

Sustituyendo c_2 en la solución general se obtiene que

$$T = 100 - 80e^{kt}$$

Tomando en cuenta la condición $T(1) = 22$ se tiene que

$$22 = 100 - 80e^{k(1)} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln(.975)}{2} = -.025\ 317\ 807$$

Por tanto, la solución particular de este problema es

$$T(t) = 100 - 80e^{-.025\ 317\ 807t}$$

y para $T = 90°C$ resulta que

$$90 = 100 - 80ee^{-.025\ 317\ 807t} \quad \Rightarrow \quad t = 82.13 \text{ seg}$$

En un tiempo de 82.13 segundos la barra de metal alcanzará los 90 °C. Para $T = 90$ °C , el tiempo es

$$98 = 100 - 80e^{-.025\ 317\ 807t} \quad \Rightarrow \quad t = 145.70$$

En un tiempo de 145.70 segundos la barra de metal alcanzará los 98°C.

1.4 APLICACIÓN DEL MÉTODO DEL FACTOR INTEGRANTE PARA RESOLVER LA ECUACIÓN DIFERENCIAL QUE MODELA UN SISTEMA FÍSICO

En los problemas del 1 al 12 plantee la ecuación diferencial que representa la situación física implicada, y resuélvala por el método del factor integrante bajo las condiciones de contorno para determinar el modelo matemático representativo del escenario.

1. Un tanque contiene 200 litros de agua en el cual se disuelven 30 gramos de sal. Una salmuera que contiene 1 gramo de sal por litro se bombea al tanque con una intensidad de 4 litros/minuto; el agua adecuadamente mezclada se bombea hacia afuera con la misma rapidez. a) Calcule el número de gramos $A(t)$ de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera. b) ¿Cuánta sal habrá en el tanque al cabo de un tiempo infinito?

Solución

Se tiene que

$$R_1 = 4\frac{litro}{\min} * \frac{1\,gramo}{1\,litro} = 4\,gr/\min$$

$$R_2 = 4\frac{litro}{\min} * A(t)\,gramos = \frac{4A}{200}\,\frac{gramos}{\min} = \frac{A(t)\,gr}{50\min}$$

La ecuación de este problema es

$$\frac{dA}{dt} + \frac{1}{50}A = 4$$

y el factor integrante es

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{50}dt} = e^{\frac{t}{50}}$$

Por tanto, se tiene que

$$\int d\left[e^{\frac{1}{50}t}A\right] = \int 4e^{\frac{1}{50}t}dt \quad \Rightarrow \quad A = 200 + ce^{-\frac{1}{50}t}$$

Sustituyendo aquí la condición $t = 0$, $A = 30$ se tiene que $c = -170$ y, por tanto, la solución

$$A = 200 - 170e^{-t/50}$$

que da la cantidad de sal en un instante cualquiera. Por otro lado, para $t \to \infty$ se obtiene que

$$A = 200 - 170e^{-\infty} = 200$$

Por tanto, existen 200 gramos de sal en un tiempo infinitamente grande.

2. Se bombea cerveza con un contenido de 6% de alcohol por galón a un tanque que inicialmente contiene 400 gal de cerveza con 3% de alcohol. La cerveza se bombea hacia el interior con una rapidez de 3 gal/min, en tanto que el líquido mezclado se extrae con una rapidez de 4 gal/min. Obtenga en número $A(t)$ de galones de alcohol que hay en el tanque en un instante cualquiera. ¿Cuál es el porcentaje de alcohol que hay en el tanque después de 60 minutos? ¿Cuánto demorará el tanque en vaciarse?

Solución

Si la solución se extrae con una rapidez de 4 gal/min, entonces la solución se vacía con una rapidez de

$$(3-4)\frac{gal}{\min}=-\frac{gal}{\min}$$

Después de t minutos hay $400-t$ galones de cerveza con un porcentaje A de alcohol en el tanque. En tal caso la rapidez con la que la cerveza sale es

$$\left(\frac{4gal}{\min}\right)\left(\frac{A}{400-t}\right)\frac{alcohol}{gal}=\frac{4A}{400-t}\frac{alcohol}{\min}$$

También se tiene que

$$\begin{pmatrix}\text{Variación del \% de}\\ \text{alcohol}\\ \text{respecto al tiempo}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Rapidez con que entra}\\ \text{la cerveza con 6\% de}\\ \text{alcohol}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{Rapidez con que sale}\\ \text{la cerveza con A\%}\\ \text{de alcohol}\end{pmatrix}$$

Por tanto, la ecuación de este problema es

$$\frac{dA}{dt}=\left(\frac{3gal}{\min}\right)\left(\frac{0.6\,alcohol}{gal}\right)-\left(\frac{4A}{400-t}\frac{alcohol}{\min}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dA}{dt}=0.18-\frac{4A}{400-t}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dA}{dt}+\frac{4A}{400-t}=0.18 \qquad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt}+\frac{4}{400-t}(A)\,dt=0.18dt$$

El factor integrante de esta ecuación es

$$\mu(x)=e^{\int\frac{4dt}{(400-t)}}=\frac{1}{(400-t)^4}$$

Sustituyendo el factor integrante en la ecuación diferencial del problema se obtiene la solución general

$$\int d\left(\frac{A}{(400-t)^4}\right)=0.18\int\frac{dt}{(400-t)^4} \qquad \Rightarrow \quad \frac{A}{(400-t)^4}=\frac{0.06}{(400-t)^3}+c$$

$$\Rightarrow \quad A(t)=0.06(400-t)+c(400-t)^4$$

La condición inicial es que en $t=0$ se tiene $A(t)=0.03\,alcohol/galón$, y de aquí

$$0.03=0.06(400-t)+c(400)^4 \qquad \Rightarrow \quad c=\frac{0.03-24}{(400)^4}=-9.36\times10^{-10}$$

Por tanto, la solución es

$$A(t)=0.06(400-t)-9.36\times10^{-10}(400-t)^{4}$$

Esta ecuación representa la cantidad de alcohol en el tanque a cualquier tiempo. Por otro lado, el porcentaje de alcohol en el tanque a los 60 minutos es

$$A(t)=0.06(400-60)-9.36\times10^{-10}(400-60)^{4} \quad \Rightarrow \quad A(t)=7.89\%$$

El depósito tiene inicialmente 400 galones de cerveza la cual se extrae a una rapidez de 4 galones por minuto, pero le bombean cerveza a su interior con una rapidez de 3 galones por minuto. Por tanto $(3-4)\,gal/\min=-1\,gal/\min$. Por tanto, el tiempo que tarda en salir todo el contenido de cerveza es igual a: $\dfrac{400\,gal}{1\,gal/\min}=400\min$, lo cual se puede comprobar al sustituir este dato en la solución general, la cual queda como $A(t)=0$. Entonces el tiempo que tarda en vaciarse el tanque es $t=400\min$.

3. La rapidez con que un medicamento se disemina en el flujo sanguíneo se rige por la ecuación diferencial

$$\frac{dX}{dt}=A-BX$$

en donde A y B son constantes positivas. La función $X(t)$ describe la concentración del fármaco en el flujo sanguíneo en un instante t cualquiera. Determinar el valor límite de $X(t)$ cuando $t\to\infty$. ¿Cuánto demora la concentración en alcanzar la mitad de este valor límite? Suponga que $X(0)=0$.

Solución

Se tiene la ecuación diferencial

$$\frac{dX}{dt}+BX=A$$

y el factor integrante de ésta es

$$\mu(x)=e^{\int Bdt}=e^{Bt}$$

Por tanto, la solución general es

$$\int d\left(e^{Bt}X\right)=\int A\,e^{Bt}dt \quad \Rightarrow \quad X(t)=\frac{A}{B}+ce^{-Bt}$$

Si $X(0)=0$ entonces se tiene que

$$0=\frac{A}{B}+ce^{0} \qquad \Rightarrow \qquad c=-\frac{A}{B}$$

Por tanto, la solución general es

$$X(t)=\frac{A}{B}-\frac{A}{B}e^{-Bt}$$

y para $t\to\infty$ resulta que $X(t)=\dfrac{A}{B}$.

¿Cuánto tarda la concentración en alcanzar la mitad de este valor límite? Esto es

$$X(t)=\frac{1}{2}\frac{A}{B} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{A}{B}=\frac{A}{B}-\frac{A}{B}e^{-Bt} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln e^{-Bt}$$

Resolviendo esta ecuación con Maple 7 se tiene que el tiempo que tarda la concentración en alcanzar la mitad de este valor límite es

$$t=.6\,931\,471\,806\frac{1}{B}$$

Otra forma de obtener este resultado es mediante el método de coeficientes indeterminados. El procedimiento es el siguiente.

Primero se resuelve la ecuación diferencial homogénea

$$m_1+B=0$$

$$m_1=-B$$

$$X_c=c_1e^{-Bt}$$

Luego se resuelve la ecuación no homogénea

$$D(A)=0$$

$$m_2=0$$

$$X_p=c_2e^{0t}=c_2$$

Por tanto, la solución general es

$$X=X_c+X_p=c_1e^{-Bt}+c_2$$

Si $X(0)=0$ entonces $c_1=-c_2$ y, por tanto,

$$X=X_c+X_p=c_1e^{-Bt}+-c_1=c_1\left(e^{-Bt}-1\right)$$

Para $t \to \infty$ se tiene que

$$X(t) = c_1\left(e^{-B\infty} - 1\right) = -c_1$$

El tiempo que demora la concentración en alcanzar la mitad de este valor límite es

$$X(t) = \frac{-c_1}{2} = \frac{c_2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}c_2 = -c_2 e^{-Bt} + c_2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{-0.6931}{-B}$$

Por tanto, el tiempo que tarda en alcanzar la mitad es $t = \dfrac{0.6931}{B}$.

NOTA. Como se puede observar, el método de coeficientes indeterminados también funciona cuando se aplica en ecuaciones diferenciales de primer orden.

4. En marzo de 1976 la población mundial llegó a los 4 mil millones. Una revista predijo que con una tasa media anual de 1.8% la población mundial sería de 8 mil millones en 45 años más. ¿Cómo se compara este valor con el predicho por el modelo que dice que la rapidez de crecimiento en un instante es proporcional a la población presente?

Solución

La ecuación diferencial de este problema es

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

La condición inicial es $N(t_0) = N_0$ y la condición de frontera es $N(45) = 2N_0$.
El factor integrante de la ecuación diferencial es

$$\mu(t) = e^{\int -kdt} = e^{-kt}$$

y, por tanto, se tiene que

$$\int d\left[e^{-kt} \times N\right] = \int e^{-kt}(0)dt \quad \Rightarrow \quad Ne^{-kt} = C \quad \Rightarrow \quad N = Ce^{kt}$$

Aplicando las condiciones iniciales se tiene que $4\ 000\ 000\ 000 = C$ y, por tanto,

$$N = 4 \times 10^9 e^{kt}$$

Sustituyendo las condiciones de frontera se obtiene que

$$N(45) = 8\ 000\ 000\ 000 \quad \Rightarrow \quad 8 \times 10^9 = 4 \times 10^9 e^{45k}$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{.69\ 314}{45} = 0.01\ 540\ 311$$

Finalmente la solución viene dada por

$$N = 4 \times 10^9 e^{0.015\,403t}$$

Por tanto, la población mundial sería de 8 mil millones en 45 años más.

$$N = 4 \times 10^9 e^{0.015\,403(45)} \quad \Rightarrow \quad N = 7\,999\,942\,556 \text{ habitantes.}$$

5. Un cultivo tiene una cantidad inicial P_0 de bacterias. Cuando $t = 1$ h, la cantidad medida de bacterias presentes $P(t)$ es $\frac{3}{2}P_0$. Si la rapidez de crecimiento es proporcional a la cantidad de bacterias presentes $P(t)$ en el momento *t*, calcule el tiempo necesario para triplicar la cantidad inicial de microorganismos.

Solución

La ecuación diferencial de este problema es

$$\frac{dP}{dt} - kP = 0$$

y el factor integrante es

$$\mu(t) = e^{\int -kdt} = e^{-kt}$$

La solución de la ecuación es

$$\int d\left[e^{-kt} * P\right] = \int e^{-kt}(0)dt \quad \Rightarrow \quad P(t) = ce^{-kt}$$

Cuando $t = 0$ se tiene que $P_0 = ce^0 = c$ y, por tanto, cuando $t = 1$

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

Como $P(1) = \frac{3}{2}P_0$ se tiene que

$$\frac{3}{2}P_0 = P_0 e^k \quad \Rightarrow \quad k = \ln\left|\frac{3}{2}\right| = 0.4055 \quad \Rightarrow \quad P(t) = P_0 e^{0.4055t}$$

Para establecer el momento en que se triplica la cantidad de bacterias despejamos *t* de $3P_0 = P_0 e^{0.4055t}$ y se obtiene que $t = 2.71\ h$.

6. Los arqueólogos utilizaron madera quemada encontrada en el sitio para fechar las pinturas prehistóricas de Lascaux, Francia. Determine la edad aproximada de un trozo de madera, si se encontró que había desaparecido el 85% del carbono 14.

Solución

La ecuación diferencial de este problema es

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

El factor integrante de esta ecuación es

$$\mu(t) = e^{-kt}$$

Integrando la ecuación diferencial dada resulta que

$$\int d\left[e^{-kt}A\right] = \int e^{-kt}(0)dt \quad \Rightarrow \quad Ae^{-kt} = c$$

Utilizando la condición $A(0) = A_0$ se obtiene que $c = A_0$ y por tanto

$$A = A_0 e^{ktt}$$

Aplicando el hecho de que la vida media (tiempo que transcurre para que se desintegre la mitad de los átomos de una muestra inicial, A_0, y se conviertan en átomos de otro elemento) es

$$A = \frac{A_0}{2} \qquad\qquad t = 5\,600 \text{ años}$$

se tiene que

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{kt} \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{1}{2}\right| = k(5\,600) \quad \Rightarrow \quad k = -.000\,123$$

Entonces resulta que la solución es

$$A = A_0 e^{-.000\,123t}$$

Como el 85.5% ya coexiste en la madera, sólo queda 14.5% de carbono 14 en ella

$$A = .145A_0 \quad \Rightarrow \quad 0.145A_0 = A_0 e^{-.000\,123(t)} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln|0.145|}{-.000\,123}$$

La edad aproximada de un trozo de madera es de $t = 15\,600.93$ años.

7. Un circuito en serie en el cual la resistencia es de 200 Ω y la capacitancia de 1×10^{-4} F se le aplica una tensión de 100 voltios. Calcule la carga $q(t)$ en el capacitor si $q(0) = 0$ y obtenga la corriente.

Solución

Se tienen los datos

$$R = 200\ \ \Omega$$
$$C = 1 \times 10^{-4}\ \ F$$
$$E(t) = 100V$$
$$q(0) = 0$$

La ecuación diferencial del problema es

$$\frac{1}{C}q(t) + R\frac{dq}{dt} = E(t)$$

Sustituyendo aquí los datos se obtiene que

$$\frac{1}{1 \times 10^{-4}}q(t) + 200\frac{dq}{dt} = 100 \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{dt} + 50q(t) = .5$$

El factor integrante es

$$\mu(t) = e^{\int 50 t dt} = e^{50t}$$

Integrando la ecuación diferencial se tiene que

$$\int d\left[q\,e^{50t}\right] = \int e^{50t}(.5)dt \quad \Rightarrow \quad q = .01 + ce^{-50t}$$

Sustituyendo la condición inicial $q(0) = 0$ se obtiene que $c = -.01$ y, por tanto,

$$q = .01 - .01e^{-50t}$$

es la carga en el capacitor. Como $i = \dfrac{dq}{dt}$ entonces

$$i = \frac{d(.01 - .01e^{-50t})}{dt}$$

Por tanto, la corriente eléctrica en cualquier instante es del orden de

$$i = \frac{1}{2}e^{-50t}$$

8. El isótopo radioactivo del plomo, Pb-209, se desintegra en un instante cualquiera con una rapidez proporcional a la cantidad presente en dicho instante y tiene una semivida de 3.3 horas. Si inicialmente hay 1 gramo de plomo ¿cuánto tiempo transcurrirá para que se desintegre el 90% de dicho elemento?

Solución

La ecuación diferencial del problema es

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

El factor integrante es

$$\mu(t) = e^{\int -kdt} = e^{-kt}$$

Integrando la ecuación diferencial se tiene que

$$\int d\left[e^{-kt} q\right] = \int e^{-kt}(0)dt \quad \Rightarrow \quad Ae^{-kt} = c$$

En un inicio se tiene que $A = A_0$ por esto $A_0 = c$ y, por tanto,

$$A = A_0 e^{kt}$$

Tomando en cuenta la semivida del isótopo se obtiene que k

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{k(3.3)} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln(0.5)}{3.3} = -0.21$$

El tiempo que transcurrirá para que se desintegre el 90% de dicho elemento se determina sustituyendo los datos conocidos en la ecuación

$$0.1 = 1e^{-0.21t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln(.1)}{-0.21} = t$$

por lo que el tiempo para que se desintegre el isótopo es de $t = 10.96$ horas aproximadamente.

9. Un gran tanque está parcialmente lleno con 100 galones de líquido, en los cuales se disuelven 10 libras de sal. Una salmuera que contiene $^1/_2$ libra de sal por galón se bombea al tanque con una rapidez de 6 galones por minuto. La solución actualmente mezclada se bombea en seguida hacia fuera con una rapidez menor de 4 galones por minuto. Determinar el número de libras de sal que hay en el tanque después de 30 minutos.

Solución

La cantidad de solución que se acumula es

$$6\frac{gal}{\min} - 4\frac{gal}{\min} = 2\frac{gal}{\min}$$

R_1 es la rapidez con que entra la sal

$$R_1 = 6\frac{gal}{\min}\times\frac{1}{2}\frac{lb}{gal} = 3\frac{lb}{\min}$$

R_2 es la rapidez con que sale la sal

$$R_2 = 4\frac{gal}{\min}\times\frac{A}{(100+2t)}\frac{lb}{gal} = \frac{4A}{100+2t}$$

Como $\dfrac{dA}{dt} = R_1 - R_2$ entonces la ecuación diferencial del problema es

$$\frac{dA}{dt} + \frac{4A}{100+2t} = 3$$

El factor integrante es

$$\mu(t) = e^{2\int\frac{2}{100+2t}} = e^{2\ln|100+2t|} = (100+2t)^2$$

Integrando la ecuación diferencial se tiene que

$$\int d\left[(100+2t)^2 A\right] = \int 3(100+2t)^2\,dt \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{(100+2t)}{2} + c(100+2t)^{-2}$$

Como $A(0) = 10$ se tiene que

$$10 = \frac{100}{2} + \frac{c}{(100)^2} \qquad \Rightarrow \qquad c = -400\,000$$

La cantidad de sal en un instante dado es

$$A = \frac{(100+2t)}{2} - \frac{400\,000}{(100+2t)^2}$$

El número de libras de sal que hay en el tanque después de 30 minutos es

$$A = \frac{(100+2(30))}{2} - \frac{400\,000}{(100+2(30))^2} = 64.38 \text{ libras}$$

10. Un gran depósito está lleno con 500 galones de agua pura. Una salmuera que contiene 2 libras de sal por galón se bombea al tanque a razón de 5 galones por minuto, y la solución adecuadamente mezclada se bombea hacia fuera con una rapidez de 10 galones por minuto. Determinar el número de libras de sal $A(t)$ que hay en el tanque en un instante cualquiera. ¿Cuánto demorará el tanque en vaciarse?

Solución

La solución es similar a la del problema 9. La entrada de sal al depósito es

$$R_1 = 5\frac{gal}{\min} \times 2\frac{lb}{gal} = 10\frac{lb}{\min}$$

La salida de sal del depósito es

$$R_2 = 10\frac{gal}{\min} \times \frac{A(t)lb}{500gal} = \frac{A(t)lb}{50\min}$$

La ecuación diferencial del problema es

$$\frac{dA}{dt} + \frac{1}{50}A = 10$$

El factor integrante es

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{50}dt} = e^{\frac{1}{50}t}$$

y la solución general viene dada por

$$\int d(e^{\frac{1}{50}t}A) = \int 10e^{\frac{1}{50}t}dt \qquad \Rightarrow \qquad A = 500 + Ce^{-\frac{1}{50}t}$$

Sustituyendo la condición inicial $A(0) = 2$ se obtiene que $C = -498$ y por esto la sal presente en cualquier instante es

$$A = 500 - 498e^{\frac{-1}{50}t}$$

Cuando $t = 1$ minuto la cantidad de sal es del orden de

$$A = 500 + Ce^{\frac{-1}{50}(1)} = 500 - 488.1\,389\,393 = 11.86\,106\,069 \text{ libras}$$

11. Un cuerpo de masa m que cae a través de un medio viscoso encuentra una resistencia proporcional al cuadrado de su velocidad instantánea. En este caso, la ecuación diferencial en un instante cualquiera $m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$ es en donde k es una constante de proporcionalidad. Resuelva la ecuación sujeta a la condición $v(0)=v_0$ ¿Cuál es la velocidad límite del cuerpo que cae?

Solución

La ecuación diferencial de este problema es

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v^2 = g$$

El factor integrante es

$$\mu(t)=e^{\int \frac{k}{m}dt}=e^{\frac{k}{m}t}$$

Integrando la ecuación diferencial se tiene que

$$\int d\left[e^{\frac{k}{m}t}v^2\right]=\int ge^{\frac{k}{m}t}dt \qquad \Rightarrow \qquad v^2=\frac{mg}{k}+ce^{\frac{-k}{m}t}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior la condición inicial dada se obtiene que

$$c=v_0{}^2-\frac{mg}{k}$$

Sustituyendo el valor de c en la solución general resulta que

$$v^2=\frac{mg}{k}+\left(v_0{}^2-\frac{mg}{k}\right)e^{\frac{-k}{m}t}$$

Cuando $t\to\infty$ la velocidad del cuerpo es

$$v(t)=\sqrt{\frac{mg}{k}}$$

12. A un circuito en serie, en el cual la resistencia es de $1000\ \Omega$ y la capacitancia de $5\times10^{-6}F$, se la aplica una tensión de 200 voltios. Encuentre la carga $q(t)$ en el capacitor si $i(0)=0.4$. Determine la carga y la corriente para $t=0.005$ segundos y la carga cuando $t\to\infty$.

Solución

La ecuación diferencial de este problema es

$$\frac{1}{C}q(t)+R\frac{dq}{dt}=E(t)$$

Sustituyendo aquí los datos dados se obtiene que

$$\frac{1}{5\times10^{-6}F}q(t)+1000\,\Omega\frac{dq}{dt}=200v \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dq}{dt}+200q(t)=.2$$

El factor integrante para la ecuación anterior es

$$\mu(t)=e^{\int 200tdt}=e^{200t}$$

Integrando la ecuación diferencial del problema se tiene que

$$\int d\left[q\cdot e^{200t}\right]=\int e^{200t}(.2)dt \qquad \Rightarrow \qquad q=.001+ce^{-200t}$$

Sustituyendo la condición $i(0)=0.4$ en la ecuación anterior se obtiene que $c=.39\,900$ por lo que la carga en el capacitor en cualquier instante está dada por

$$q=.001+.399e^{-200t}$$

Cuando $t=0.005$ segundos, la carga en el capacitor es del orden de

$$q=.001+.399e^{-200(.005)}=.1477$$

Como la corriente eléctrica viene dada por $i=\frac{dq}{dt}$, entonces se tiene que

$$i=\frac{d(.001+.399e^{-200t})}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad i=79.8e^{-200t}$$

y para $t=0.005$ segundos se obtiene que

$$i=79.8e^{-200(.005)}=29.3567 \text{ amperes}$$

Cuando $t\to\infty$ la carga toma el valor de $q=.001$ y la corriente se anula

$$i=\frac{dq}{dt}=0.$$

1.5 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL QUE MODELA UN SISTEMA FÍSICO UTILIZANDO MAPLE 7

En los problemas del 1 al 5 se plantea la ecuación diferencial que representa la situación física dada y se resuelve usando Maple 7 bajo las condiciones de contorno para obtener el modelo matemático del problema.

1. La ecuación diferencial que describe la forma de un cable con un peso constante w que cuelga sometido sólo a la acción de su propio peso es

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{w}{T_1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

en donde T_1 es la tensión horizontal en el punto más bajo del cable. Las condiciones para este problema son $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Solución

Usando Maple 7 para resolver la ecuación diferencial del problema se obtiene que

```
>ode1:=diff(y(x),x$2)-
((w/T[1])*(sqrt(1+(diff(y(x),x))^2)));
ans1:=dsolve(ode1);
```

$$ode1 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{y}(x)\right) - \frac{w\sqrt{1+\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)\right)^2}}{T_1}$$

$$ans1 := \mathrm{y}(x) = I\,x + \_C1,\ \mathrm{y}(x) = -I\,x + \_C1,\ \mathrm{y}(x) = \frac{T_1\cosh\left(\frac{w\,(x+\_C1)}{T_1}\right) + \_C2\,w}{w}$$

Sustituyendo en esta solución general que da Maple la condición $y(0)=1$ se obtiene que

$$w = T_1\cosh\left(\frac{-wC1}{T_1}\right) + C2w \qquad \Rightarrow \qquad C2 = \frac{w - T1\cosh\left(\frac{-wC1}{T_1}\right)}{w}$$

Por otro lado, la primera derivada de la solución que da Maple es

$$y'(x) = \frac{T_1}{w} * \frac{w}{T_1}\mathrm{sen}h\left(\frac{wx - wC1}{T_1}\right)$$

y sustituyendo aquí la condición $y'(0)=0$ se obtiene que

$$0 = \mathrm{sen}h\left(\frac{-wC1}{T_1}\right)$$

A partir de aquí se ve que *C1* debe ser diferente de 0, ya que de lo contrario habría una solución trivial. Por tanto, se tiene que

$$\mathrm{sen}h\left(\frac{-wC1}{T_1}\right) = 0 = \mathrm{sen}h(n\pi) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{-wC1}{T_1} = n\pi \quad \Rightarrow \quad C1 = -\frac{n\pi T_1}{w}$$

y entonces

$$C2 = \frac{w - T_1\cosh\left(\frac{w}{T_1} * \frac{n\pi T_1}{w}\right)}{w} = 1 - \frac{T_1}{w}\cosh n\pi$$

Sustituyendo este valor resulta que la solución particular es

$$y(x)=\frac{T_1\cosh\left(\dfrac{wx-n\pi T_1)}{T_1}\right)+\left(w-T_1\cosh n\pi\right)}{w}$$

Resolviendo mediante Maple 7 la ecuación diferencial dada se obtiene el resultado siguiente

```
>ode := diff(y(x),x,x)-
((w/T[1])*(sqrt(1+(diff(y(x),x))^2)))=0;
```

$$ode := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{y}(x)\right)-\frac{w\sqrt{1+\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)\right)^2}}{T_1}=0$$

Sustituyendo la primer condición inicial resulta que

```
> ans2[1] := dsolve( {ode, y(0)=1}, y(x));
```

$$ans2_1 :=$$

$$\mathrm{y}(x)=-I\,x+1,\ \mathrm{y}(x)=I\,x+1,\ \mathrm{y}(x)=\frac{T_1\cosh\left(\frac{w\,(x+\_C1)}{T_1}\right)-T_1\cosh\left(\frac{w\,\_C1}{T_1}\right)+w}{w}$$

Sustituyendo al mismo tiempo las dos condiciones iniciales se obtiene que

```
> ans2[2] := dsolve( {ode, y(0)=1, D(y)(0)=0}, y(x));
```

$$ans2_2 := \mathrm{y}(x)=\frac{T_1\cosh\left(\frac{w\,x}{T_1}\right)-T_1+w}{w},\ \mathrm{y}(x)=\frac{T_1\cosh\left(\frac{w\left(x+\frac{I\,\pi\,T_1}{w}\right)}{T_1}\right)+T_1+w}{w}$$

2. Una ecuación similar a la dada en el problema anterior es

$$x\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{v_1}{v_2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Esta ecuación surge al estudiar la trayectoria de un depredador que se desplaza con una velocidad v_2 y que busca capturar una presa que se mueve con una velocidad v_1. Para resolver esta ecuación se consideran dos casos:

1. Caso $v_1 \neq v_2$

2. Caso $v_1 = v_2$

Solución

1. Caso $v_1 \neq v_2$

La solución de Maple 7 a la ecuación diferencial dada es

```
>ode2:=x*diff(y(x),x$2)-
((v[1]/v[2])*sqrt(1+(diff(y(x),x))^2))=0;
```

$$ode2 := x\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{y}(x)\right) - \frac{v_1\sqrt{1+\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)\right)^2}}{v_2} = 0$$

```
> ans2:=dsolve(ode2);
```

$$ans2 := \mathrm{y}(x) = I\,x + \_C1,\ \mathrm{y}(x) = -I\,x + \_C1,$$

$$\mathrm{y}(x) = \frac{1}{2}\,\frac{x\,v_2\,\mathbf{e}^{\left(\frac{v_1\_C1}{v_2}\right)}}{(-v_2+v_1)\,x^{\left(\frac{v_1}{v_2}\right)}} + \frac{\frac{1}{2}\,x\,v_2\,x^{\left(\frac{v_1}{v_2}\right)}}{(v_2+v_1)\,\mathbf{e}^{\left(\frac{v_1\_C1}{v_2}\right)}} + \_C2$$

En la Fig. 1.2 se muestra el comportamiento de la trayectoria del depredador que se desplaza con una velocidad v_2 menor que la velocidad v_1 de su presa.

```
>v[2]:=1;v[1]:=2;_C1:=1;_C2:=1;plot(1/2*x*v[2]/(-
v[2]+v[1])/(x^(1/v[2]*v[1]))*exp(1/v[2]*v[1]*_C1)+1/2*x*v[2]/
(v[2]+v[1])*x^(1/v[2]*v[1])/exp(1/v[2]*v[1]*_C1)+_C2,x=-
10..10,y=-200..200);
```

$$v_2 := 1$$

$$v_1 := 2$$

$$\_C1 := 1$$

$$\_C2 := 1$$

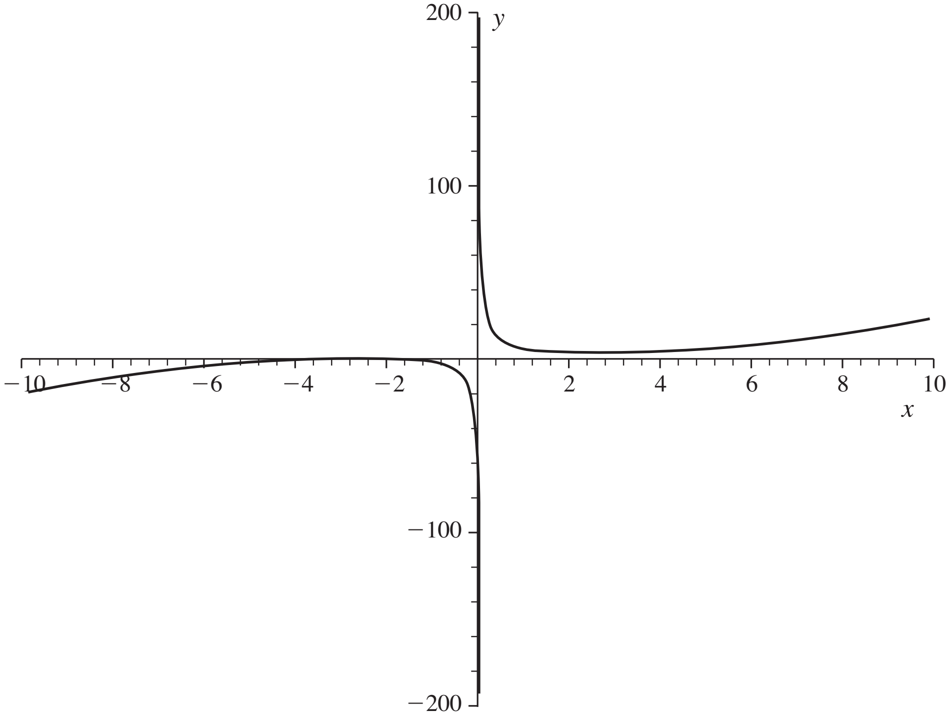


Fig. 1.2.

2. Caso $v_1 = v_2$

La solución de Maple 7 a la ecuación diferencial dada es

```
>ode3:=x*diff(y(x),x$2)-
((v[1]/v[1])*sqrt(1+(diff(y(x),x))^2))=0;
```

$$ode3 := x\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{y}(x)\right) - \sqrt{1 + \left(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{y}(x)\right)^2} = 0$$

```
> ans3:=dsolve(ode3);
```

$$ans3 := \mathrm{y}(x) = I\,x + \_C1,\ \mathrm{y}(x) = -I\,x + \_C1,\ \mathrm{y}(x) = \frac{1}{4}\,\frac{x^2}{\_C1} - \frac{1}{2}\_C1\,\ln(x) + \_C2$$

En la Fig. 1.3 se muestra el comportamiento de la trayectoria del depredador que se desplaza con una velocidad igual que la velocidad de su presa.

```
>v[2]:=1;v[1]:=1;_C1:=1;_C2:=1;plot(1/4*x^2/_C1-
1/2*_C1*ln(x)+_C2,x=-20..20,y=-30..30);
```

$v_2 := 1$

$v_1 := 1$

$\_C1 := 1$

$\_C2 := 1$

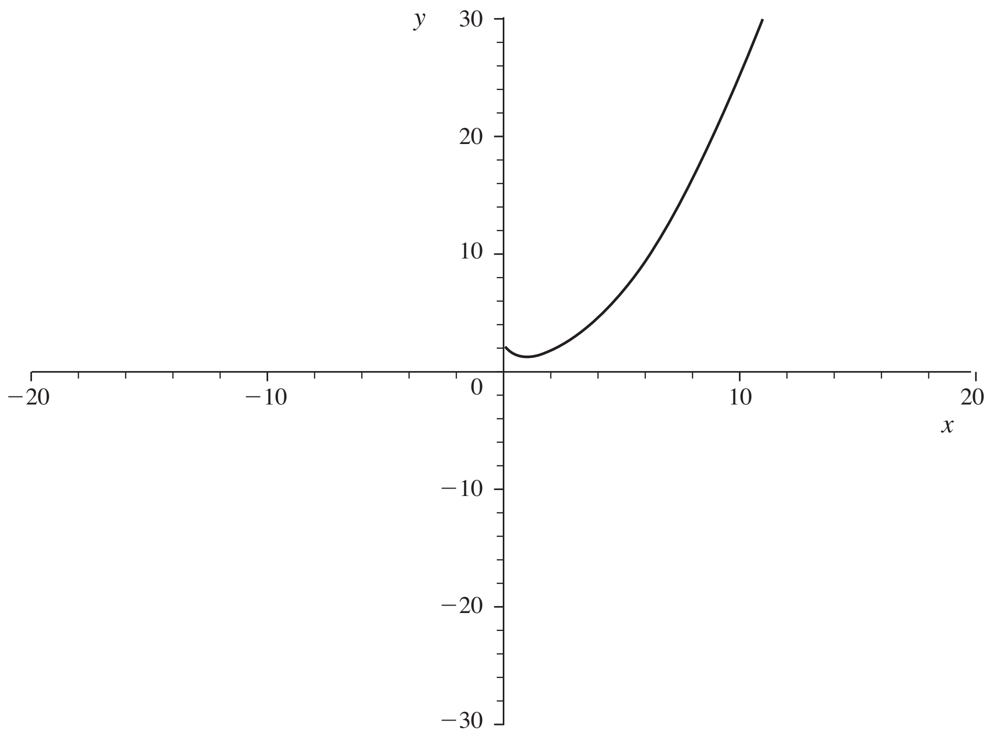


Fig. 1.3.

3. La ecuación diferencial no lineal

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu}{r} + 2h,$$

en donde μ y h son constantes no negativas surge del estudio del problema de los dos cuerpos en mecánica celeste. Aquí la variable r representa la distancia entre las dos masas. Resuelva la ecuación en los casos $h = 0$ y $h > 0$.

Solución

Se tiene que

```
> ode4:=(diff(R(t),t))^2-(2*mu)/r+2*h;
```

$$ode4 := \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{R}(t)\right)^2 - \frac{2\,\mu}{r} + 2\,h$$

```
> ans4:=dsolve(ode4);
```

por lo que la solución es

$$ans4 := \mathrm{R}(t) = \frac{\sqrt{-2\,r\,(-\mu + h\,r)}\;t}{r} + \_C1,\ \mathrm{R}(t) = -\frac{\sqrt{-2\,r\,(-\mu + h\,r)}\;t}{r} + \_C1$$

Caso I $h = 0$

A partir de la solución anterior resulta que

$$R(t) = \frac{\sqrt{-2r(-\mu)t}}{r} + C1\ ,\ R(t) = -\frac{\sqrt{-2r(-\mu)t}}{r} + C1$$

En las Figs. 1.4 y 1.5 se muestra el comportamiento de los cuerpos celestes para el Caso I.

```
>r:=7;mu:=2;h:=0;plot(1/r*(-2*r*(-mu+h*r))^(1/2)*t,t=-2..2);
```

$r := 7$

$\mu := 2$

$h := 0$

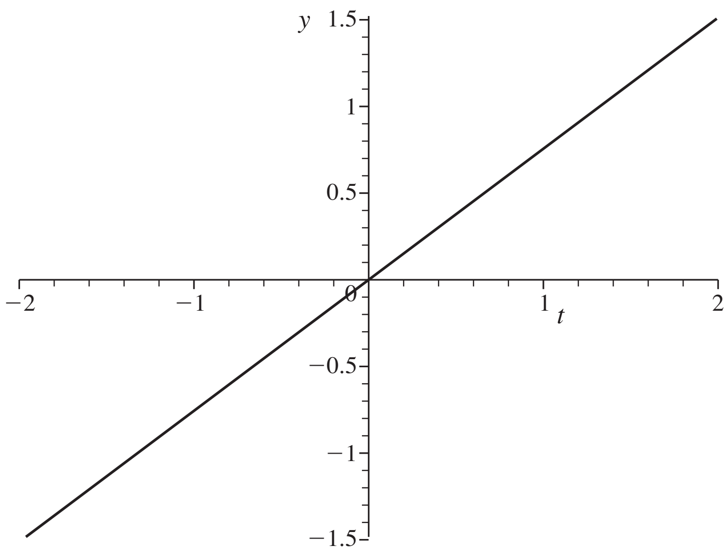


Fig. 1.4.

```
>r:=7;mu:=2;h:=0;plot(-1/r*(-2*r*(-mu+h*r))^(1/2)*t,t=-2..2);
```

$r := 7$

$\mu := 2$

$h := 0$

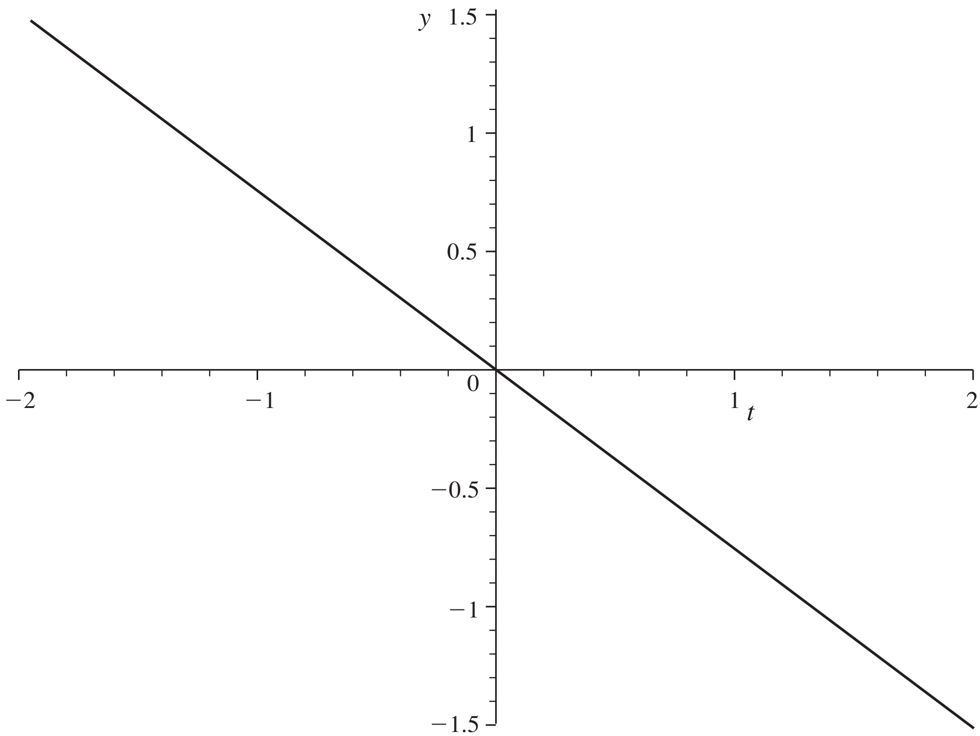


Fig. 1.5.

En las Figs. 1.6 y 1.7 se muestra el comportamiento de los cuerpos celestes para el Caso II.

```
> r:=7;mu:=8;h:=1;plot(1/r*(-2*r*(-mu+h*r))^(1/2)*t,t=-2..2);
```

$r := 7$

$\mu := 8$

$h := 1$

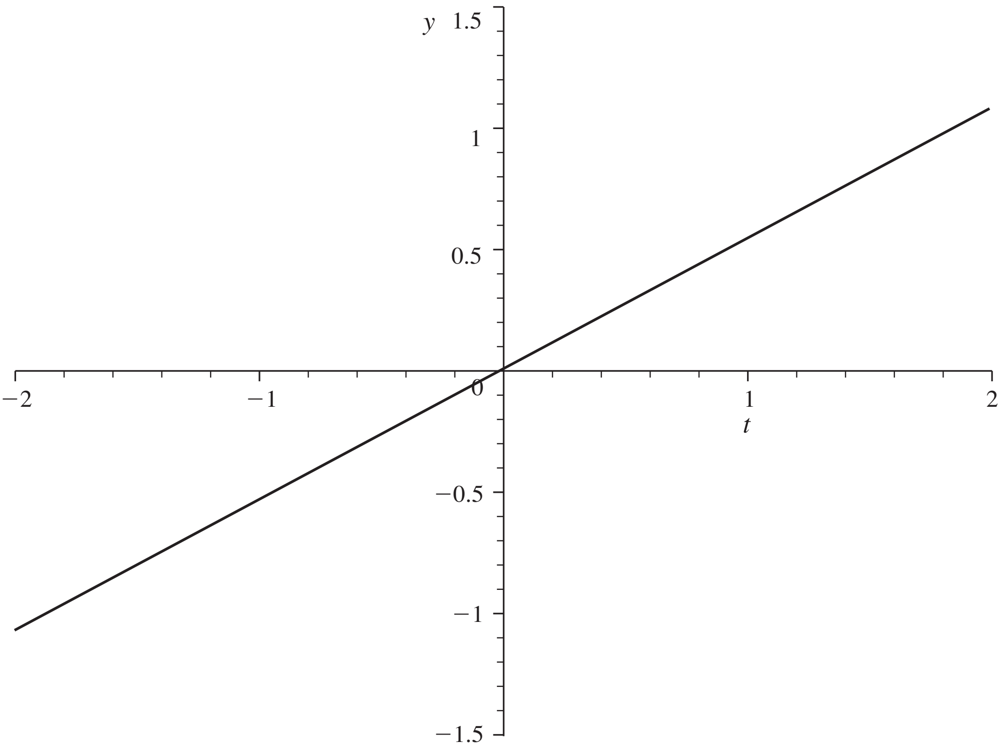


Fig. 1.6.

```
> r:=7;mu:=8;h:=1;plot(-1/r*(-2*r*(-mu+h*r))^(1/2)*t,t=-2..2);
```

$r := 7$

$\mu := 8$

$h := 1$

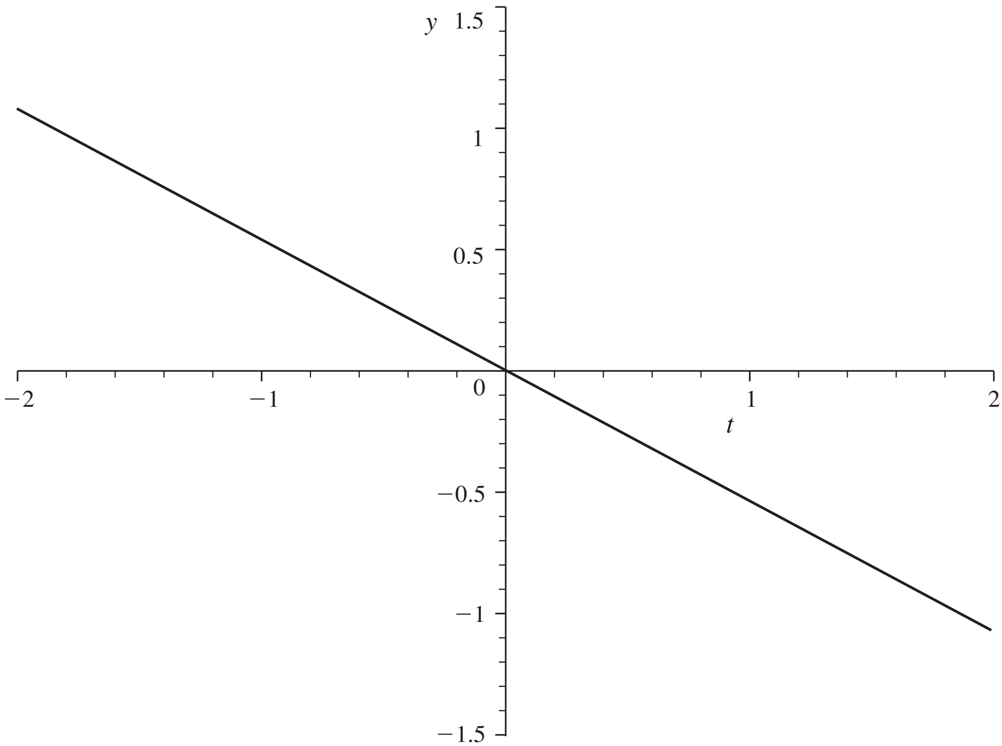


Fig. 1.7.

4. La ecuación diferencial

$$x\left(\frac{dX}{dy}\right)^2+2\frac{dX}{dy}=x$$

se presenta en los estudios de óptica y describe el tipo de curva que reflejará todos los rayos incidentes hacia el mismo punto. Demuestre que la curva debe ser una parábola.

Solución

Usando Maple 7 se tiene que

```
> ode5:=x(y)*(diff(x(y),y))^2+2*diff(x(y),y)=x(y);
```

$$ode5 := \mathrm{x}(y)\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{x}(y)\right)^2+2\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{x}(y)\right)=\mathrm{x}(y)$$

```
> ans5:=dsolve(ode5);
```

$$ans5 := x(y)=0,\, y-\ln(x(y))-\sqrt{1+x(y)^2}+\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x(y)^2}}\right)-\_C3=0,$$

$$y-\ln(x(y))+\sqrt{1+x(y)^2}-\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x(y)^2}}\right)-\_C3=0$$

En la Fig. 1.8 se muestra el comportamiento de la curva que refleja todos los rayos incidentes hacia el mismo punto.

```
>_C3:=Pi;plot(-(-ln(x(y))-
sqrt(1+x(y)^2)+arctanh(1/(sqrt(1+x(y)^2)))-_C3),x=-
Pi/2..2*Pi,y=-10..10);
```

$$\_C3 := \pi$$

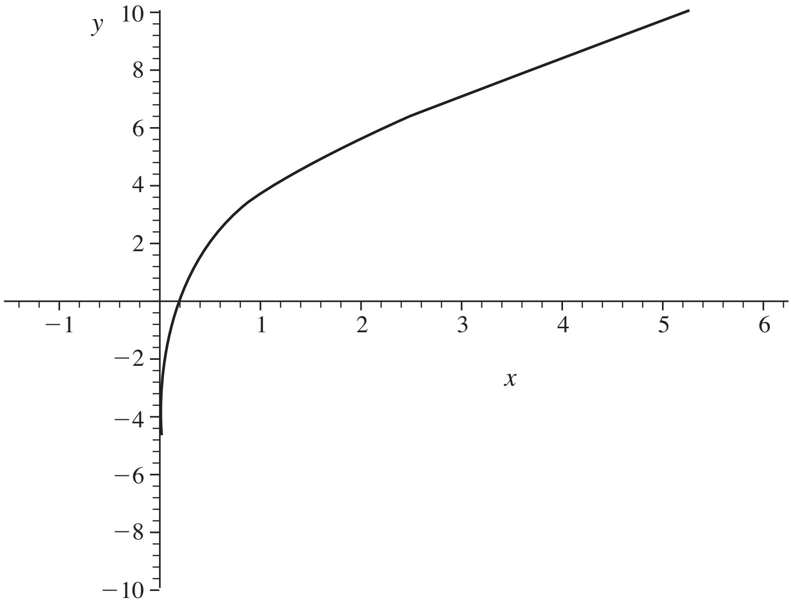


Fig. 1.8.

5. Las ecuaciones de Lotka y Volterra

$$\frac{dY}{dt}=y(\alpha-\beta x)$$
$$\frac{dX}{dt}=x(-\gamma+\delta y)$$

en donde α, β, γ y δ son constantes positivas, se presentan en el análisis del equilibrio biológico entre dos especies de animales como un depredador y su presa (por ejemplo zorros y conejos). Aquí, *x(t)* y *y(t)* son las poblaciones de las dos especies en un instante cualquiera. Aunque no existen soluciones explicitas del sistema, es posible obtener soluciones que relacionan a las dos poblaciones en un instante cualquiera.
Divida la primera ecuación entre la segunda y resuelva la ecuación no lineal de primer orden que resulta.

Solución

Usando Maple 7 se obtiene que

```
>ode6:=diff(Y(X),X)-(y*(alpha-beta*x))/(x*(-
gamma+delta*y))=0;
```

$$ode6 := \left(\frac{\partial}{\partial X} \mathrm{Y}(X)\right) - \frac{y\,(\alpha - \beta\,x)}{x\,(-\gamma + \delta\,y)} = 0$$

```
> ans6:=dsolve(ode6);
```

$$ans6 := \mathrm{Y}(X) = \frac{(\alpha - \beta\,x)\,X\,y}{x\,(-\gamma + \delta\,y)} + \_C4$$

1.6 PRÁCTICA DE LABORATORIO: CRECIMIENTO DE UNA CÉLULA SUSPENDIDA EN UNA SOLUCIÓN

ABSTRACT

Nowadays, it is undeniable that the apprenticeship-teaching process request to be different to the teachihg traditional method, this is, it is necessary jointed theory and practice in subjects involved in study programs. In this respect, the applications of the linear diffetential equations are not a exception, reason for which, in this laboratory practice, the undergraduate use the knowledge and creativity for jointed mathematical model with experiment for prove the diffusion physical phenomenon, that involved directly the Fick Law. In this case, there are a diffusion process because of it is established a concentration gradient between the salt solution and blood cells. The model and simulation of the physical phenomenon above-mentioned, to agree with carried out experiment.

Keywords: Modelling, Simulation, Laboratory practice, Diffusion, Fick Law, Cell, Salt solution

---

RESUMEN

Es innegable que en estos tiempos se requiere de un proceso de enseñanza-aprendizaje distinto al tradicional método de enseñanza, es decir, es necesario articular la teoría con la práctica en los temas involucrados en los programas de estudio. A este respecto, las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales no son la excepción, razón por la cual en esta prác-

tica de laboratorio el alumno pone en juego su conocimiento y creatividad para conjuntar modelo matemático con experimento para demostrar el fenómeno físico de difusión, que involucra directamente la Ley de Fick. En este caso existe un proceso de difusión toda vez que se establece un gradiente de concentración entre una solución salina y células de sangre. El modelado y simulación del fenómeno físico concuerda con bastante exactitud con el experimento realizado.
Palabras clave: *Modelo, Simulación, Experimentación, Difusión, Ley de Fick, Célula, solución salina.*

Objetivo

Que el estudiante del curso de ecuaciones diferenciales construya su propio aprendizaje mediante la modelación, simulación y experimentación del fenómeno de difusión de una sustancia en un medio y unas células, usando la Ley de Fick como una de las aplicaciones que surgen de esta rama de las matemáticas.

Introducción

La modelación de fenómenos físicos de nuestro entorno, tales como crecimiento y decrecimiento de poblaciones, cuerpos en caída libre, rapidez de cambio de factores intrínsecos que posee un individuo, como la memorización, la variación de la corriente y la carga en un circuito eléctrico, la rapidez con que se efectúan las reacciones químicas, la rapidez de cambio con que se difunde una sustancia en un medio, la diferencia de alturas de un líquido que sale del orificio de un recipiente, la rapidez de desintegración de sustancias radiactivas, etc., son representados mediante ecuaciones diferenciales de primer orden. Sin duda alguna, las aplicaciones de las matemáticas a situaciones físicas como las señaladas han sido de interés fundamental para los alumnos del Instituto Tecnológico de Ciudad Cuauhtémoc, ITCC. Es así como surge la inquietud de representar físicamente lo que en teoría se ha “aprendido”.

En el presente trabajo se muestra un tipo de enseñanza-aprendizaje integral, mediante el fenómeno de difusión de una sustancia [1-10], con la finalidad última de que el estudiante ponga en juego su capacidad y creatividad experimental ligándola con la parte teórica mediante la modelación matemática. A este respecto, Zill [11,12] propone la solución a estos fenómenos físicos mediante ecuaciones diferenciales, lineales y no lineales, como modelos matemáticos que representan adecuadamente este tipo de situaciones, mientras que Corral [13] resuelve este tipo de problemas propuestos por Zill [11] con lujo de detalle. Por otro lado, Williamson [14] maneja un nivel más avanzado.

Marco Teórico

El marco de referencia en el que se fundamenta el presente trabajo tiene que ver con dos aspectos importantes: 1) la aplicación de las matemáticas a través de una de sus ramas, las ecuaciones diferenciales; 2) la representación física del fenómeno de difusión. La primera se sustenta en el modelo matemático teórico adecuado a esta situación, y la segunda en el experimento realizado para la comprobación teórico-práctica.

En este caso, se hace uso de la Ley de Fick de la difusión de un fluido en un medio y células de sangre, toda vez que existe un proceso de difusión siempre que se establezca un gradiente de concentración.

De acuerdo con la ley de Fick, el flujo de masa de soluto que atraviesa la membrana de una célula es proporcional al gradiente de concentración. La constante de proporcionalidad se denomina coeficiente de difusión D.

En general, el coeficiente de difusión D cambia con la temperatura, pero por razón de simplicidad supondremos que se mantiene constante a temperatura ambiente.

El modelo que aquí se presenta explica el establecimiento de un flujo de partículas entre elementos adyacentes de un medio cuando existe entre dos puntos del mismo un gradiente de concentración. Cuando se ponen en comunicación células de sangre y solución salina, los cuales contienen distinto número de partículas, se alcanza el equilibrio cuando el número de partículas es el mismo tanto en las células como en la solución. El equilibrio no es estático sino dinámico, ya que el sistema (células) y los alrededores (solución salina) intercambian partículas a nivel microscópico.

El número final de partículas en el sistema y los alrededores no es fijo sino que fluctúa en torno al de equilibrio, las fluctuaciones, como se ha comprobado [3-10], disminuyen al incrementar el número de partículas salinas.

Cuando se ponen en contacto las células y la solución salina, la solución salina pasa a las células hasta que se establece el equilibrio. El proceso es irreversible, en el sentido de que no observamos nunca el proceso inverso. Como podemos apreciar en la simulación, la irreversibilidad significa la improbabilidad de alcanzar el estado inicial desde el estado final de equilibrio. Esta improbabilidad se debe al gran número de constituyentes del sistema. Se sabe que cuando el número de partículas es grande, 100, 200, etc., se observa que es muy improbable que volvamos a ver todas las partículas en el estado inicial de no equilibrio [3-10]. El número de partículas en un sistema real es muy elevado, un mol de cualquier sustancia contiene $6.02 \cdot 10^{23}$ moléculas. Por tanto, la simulación se debe de considerar como una imagen cualitativa de lo que ocurre en un sistema real, en el que el carácter dinámico del equilibrio y las fluctuaciones son muy difíciles de observar.

Cabe mencionar que en este caso interviene también el movimiento browniano, el cual puede explicarse a escala molecular por una serie de colisiones en una dimensión en la cual pequeñas partículas (moléculas) experimentan choques con una partícula mayor.

En nuestro modelo se supone que las partículas de agua (medio) y las partículas brownianas (sal) están encerradas en un recinto. Las partículas de agua están distribuidas uniformemente en el recinto y se mueven con cierta velocidad, la misma en todas las direcciones. Las partículas brownianas se mueven bajo la acción de su propio peso y de los choques con las partículas de agua.

Podemos observar que la distribución de partículas brownianas en el estado estacionario, después de cierto tiempo, es el compromiso entre dos efectos contrapuestos: el campo gravitatorio que tiende a agrupar las partículas en el fondo del recipiente y la difusión que tiende a esparcirlas uniformemente por todo el volumen del recipiente [1-10].

Adolph Fick proporcionó el método llamado Principio de Fick que es simplemente una aplicación de la ley de la conservación de la masa. Este principio lo podemos explicar con el efecto de ósmosis, es decir, que el agua se mueve a través de una membrana hacia donde hay mayor concentración de soluto para lograr el equilibrio [1].

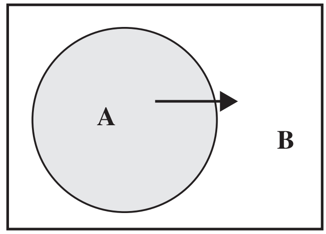


Fig. 1.9. Fenómeno de la ósmosis.

La ósmosis es un caso especial de difusión en la que es el movimiento del disolvente el que se estudia, y se define en función de los solutos. Así la ósmosis es el movimiento del agua desde soluciones con baja concentración de soluto hasta soluciones con alta concentración de soluto. La ósmosis puede ilustrarse separando dos soluciones con concentraciones diferentes de soluto por medio de una membrana semipermeable. En este tipo de sistema el agua pasará desde la solución A a la solución B, y este movimiento continuará hasta que se igualen las concentraciones [1–3], como en la Fig. 1.9.

Materiales

Debido al importante papel que juega actualmente en la pedagogía el uso de la tecnología de punta (computadoras y calculadoras), y a los cambios curriculares en los programas de estudio de cálculo y ecuaciones diferenciales, en este trabajo se hace uso del Software Maple 7 con el fin de graficar los resultados obtenidos para demostrar que el modelo teórico concuerda con el experimento que aquí presentamos.

Así pues se hace uso de la computadora, así como de los distintos materiales que integran el experimento, a saber, probeta, células contenidas en sangre, sal, agua, tubos de ensayo.

Metodología

El experimento se muestra físicamente de la siguiente manera. En una solución de agua con sal se introduce una muestra de sangre con volumen y área definidos. Para calcular en cualquier instante t la concentración del soluto dentro y fuera de las células se pretende determinar, de acuerdo al principio de Fick en una solución hipertónica (mayor concentración de soluto, o sea, más de 0.9 gramos en 100 mililitros de solución), cuánto tiempo tarda el efecto hasta lograr el equilibrio.

Para medir el cambio de la concentración con respecto al tiempo, se usaron 3 tubos de ensayo con diferentes concentraciones (agua-sal). Para demostrar este cambio se introdujo una muestra de sangre en cada uno de los contenidos del tubo para comparar el cambio de la concentración. En cuanto al modelo matemático, el método para resolver la ecuación diferencial que representa el fenómeno de difusión fue el de factor integrante.

Posteriormente se simuló el modelo mediante el software Maple 7, el cual arroja una gráfica que concuerda con los resultados experimentales.

Fenómeno Físico

Una célula está suspendida en una solución que contiene un soluto a una concentración constante C_s. Supóngase que la célula tiene un volumen constante *V* y que el área superficial de su membrana permeable es la constante *A*. Por la ley de Fick la tasa de variación de su masa *m* es directamente proporcional al área *A* y a la diferencia $C_s - C(t)$, en donde $C(t)$ es la concentración del soluto en el interior de la célula en cualquier instante *t*. Determine *C (t)* si $m = VC(t)$ y $C(0) = C_0$. Véase la Fig. 1.10.

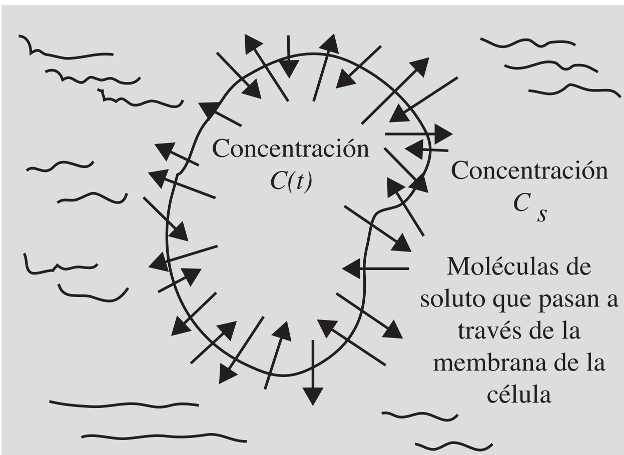


Fig. 1.10. Célula suspendida en una solución.

Modelación

A continuación se modela el fenómeno físico que se presenta arriba, tomando a la célula como el sistema y a la solución como los alrededores.

De acuerdo a la descripción del fenómeno físico, la tasa de variación de la masa *m* de la célula es directamente proporcional al área *A* de su membrana y a la diferencia de concentraciones $C_s - C(t)$, por tanto, la ecuación diferencial del problema es

$$\frac{dm}{dt} = DA(C_s - C(t)) \tag{1}$$

Como

$$m = VC(t) \tag{2}$$

entonces la ecuación diferencial se convierte en

$$\frac{dVC(t)}{dt} + DAC(t) = DAC_s \tag{3a}$$

o bien en

$$\frac{dC(t)}{dt} + D\frac{A}{V}C(t) = D\frac{A}{V}C_s \tag{3b}$$

La ecuación (3) puede resolverse mediante el método del factor integrante tomando $p(t) = D\frac{A}{V}$. Por tanto, el factor integrante es

$$\mu(t) = e^{\int D\frac{A}{V}dt} = e^{D\frac{A}{V}t} \tag{4}$$

Integrando se tiene que

$$\int d\left[e^{D\frac{A}{V}t} \times C(t)\right] = \int k\frac{A}{V}C_s \times e^{D\frac{A}{V}t}dt \quad \Rightarrow \quad C(t)e^{D\frac{A}{V}t} = C_s e^{D\frac{A}{V}t} + C_1 \tag{5}$$

en donde C_1 es la constante de integración. Para determinar dicha constante se usa la condición inicial

$$C(0) = C_0 \tag{6}$$

Sustituyendo la ecuación (6) en la ecuación (5) se obtiene que

$$C_1 = C_0 - C_s \tag{7}$$

Por tanto, la ecuación (5) se convierte en

$$C(t) = C_s\left(1 - e^{-D\frac{A}{V}t}\right) + C_0 e^{-D\frac{A}{V}t} \tag{8}$$

La ecuación (8) representa a la concentración de soluto en el interior de la célula en cualquier instante *t*.

Situación física particular

En una solución que contiene 9 gramos de sal en 100 ml de agua, es decir, a un concentración de 9%, sumergimos las células con volumen de 3.375 ml, un área de 2.25 mm^2. ¿Cuál será la concentración del solvente y la muestra al cabo de 0, 9, 12, 17, 20 segundos? ¿En cuánto tiempo se logra equilibrar la solución?

Resultados

En la Fig. 1.11 se muestra la variación de concentración de soluto en el interior de las células a través del tiempo. Para $D = 1\ mm/s$, dichos valores se calcularon para los siguientes datos:

$$C_0 = 0.01 \, {}^{gr}\!/_{ml} = 0.00\ 001\, gr/mm^3$$
$$C_s = 0.09 \, {}^{gr}\!/_{ml} = 0.00\ 009\, gr/mm^3$$
$$A = 2.25 mm^2$$
$$V = 3.375 ml = 3375 mm^3$$

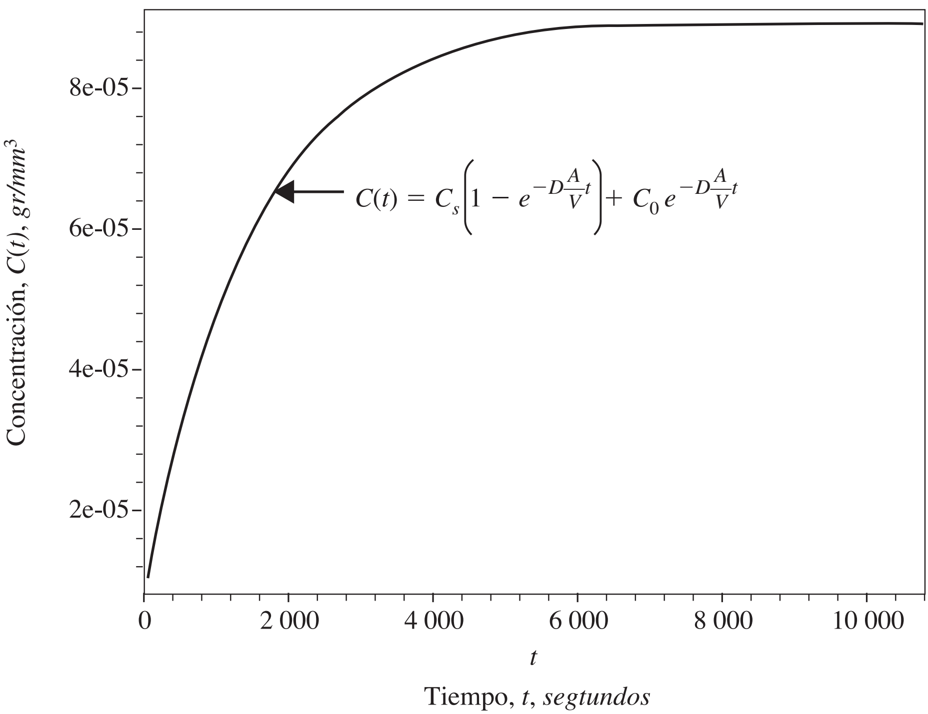


Fig. 1.11 Comportamiento de una célula suspendida en una solución.

La simulación explica las facetas esenciales de la descripción matemática del proceso de difusión:

1. Hay flujo neto de partículas salinas siempre que haya una diferencia en el número de partículas que contienen el sistema y los alrededores, y este flujo es tanto más intenso cuanto mayor sea dicha diferencia; ley de Fick.

2. En el sistema y los alrededores entra en la unidad de tiempo un número determinado de partículas y sale otro número de partículas. Si es mayor el sistema que los alrededores se incrementa el número de partículas en la célula en la unidad de tiempo (aumenta la concentración de partículas). Este modelo corresponde a la ecuación de difusión que aquí presentamos.

Discusión de los resultados

De la representación gráfica del número de las partículas (concentración $C(t)$), en cada subsistema (célula-solución) podemos reconocer qué elementos van ganando partículas y qué elementos las van perdiendo a medida que avanza el proceso.

De los resultados mostrados en la Fig. 1.11 podemos observar el comportamiento exponencial del crecimiento de una célula a través del tiempo. Es relevante notar que a partir de los 8000 segundos la concentración de soluto en la célula es constante, por lo que podemos afirmar que la solución y la célula analizada alcanzan el equilibrio de acuerdo a la Ley de Fick a partir de este momento.

La simulación nos muestra cómo se van extendiendo las partículas brownianas a medida que pasa el tiempo, penetrando en la célula hasta alcanzar su propio equilibrio.

A partir del instante posterior al experimento es posible observar que la concentración de soluto en la célula va en aumento paulatinamente hasta llegar aproximadamente a los 8000 segundos, tiempo en que la concentración ya no cambia.

De la Fig. 1.11 se puede observar que para el tiempo inicial se tiene una concentración Co, lo cual comprueba que el modelo es adecuado para representar esta situación. Igualmente para un tiempo de 2 000 s, 4 000 s, etc., se muestra cómo la concentración del soluto en la célula va en aumento y lo hace en forma exponencial

Conclusiones

De los cálculos realizados en el modelo matemático pudimos percatarnos que arrojan resultados similares a los resultados experimentales, de lo cual podemos concluir que este fenómeno de difusión, debidamente representado con los argumentos teóricos de la Ley de Fick, se modela con gran exactitud en esta práctica de laboratorio.

Referencias

1. Heber, A,R., 1989, *Fisiología*, Segunda Edición, Editorial Iberoamericana, Ingramex, S.A., Centeno 162, Méx., D.F.

2. Sanboh Lee, H-Y Lee, I-F Lee, C-Y Teeng. *Ink diffusion in water*. Eur. J. Phys. 25. (2004) pp. 331-336.

3. Pryde J. A., Pryde E. A. *A simple quantitative diffusion experiment*. Physics Education, vol 2 (1967) pp. 311-314.

4. http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/transporte/difusion/difusion.htm
5. http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/transporte/volatil/volatil.htm
6. http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/transporte/difusion/simulacion.htm
7. http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/transporte/brownian/brownian.htm
8. http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/transporte/brownian/sedimentacion.htm
9. www.iqb.es/CBasicas/Fisio/cap01/cap1_1.htm - 16k
10. www.uninet.edu/fornefro/arteaga/fisio/tsld010.htm - 2k
11. Zill, D.G., 1988, *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*, Segunda Edición, Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V., México.
12. Zill, D.G., 2002, *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*, International Thomson Editores, S.A. de C.V.
13. Corral, R.L., 2003, *Ecuaciones Diferenciales para Ingenieros en Sistemas Computacionales*, Nº de Registro Público del Derecho de Autor: 03-200-072114455600-01.
14. Williamson, R.E., 2001, "Introduction to Differential Equations and Dynamical Systems", Second Edition, McGraw-Hill Higher Education.

1.7 PRÁCTICA DE LABORATORIO: DEMOSTRACIÓN FÍSICA Y MATEMÁTICA DE LA LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON

ABSTRACT

In this work, to seek to the students learn to construct the knowledge themselves in integral way to relate theory-practice through the represented model for Newton's Law of Cooling and the experiment. Experience tell us that hot and cold objects cool down or warm up to the temperature of their surroundings. A useful way to quantify these observations is called Newton's Law of Cooling (or "law of heating"), which asserts that the rate of change of the surface temperature of an object is proportional to the difference between the surface temperature and the temperature of the surrounding medium. So, above-mentioned can to probe for example, starting from the cooling of a cake or a metal bar. This last case is that here it is presented. Of the results obtained we can conclude that the model describes with quite accuracy the cooling of the metal bar compared with the laboratory practice.

Keywords: *Newton's Law of Cooling, Surface Temperature, Temperature of the Surrounding Medium, Rate of Change, Model, Laboratory Practice, Metal Bar*

RESUMEN

En el presente trabajo se pretende que el alumno aprenda a construir su propio conocimiento en forma integral ligando teoría-práctica mediante el modelo representado por la ley de enfriamiento de Newton y el experimento. Este último puede realizarse por ejemplo, a partir del enfriamiento de un pastel, al sacarlo de un horno a una temperatura determinada y medir ésta en distintos instantes de tiempo posteriores hasta que la temperatura observada sea constante, es decir, adquiera el valor de la temperatura ambiente, lo cual permitirá realizar

una tabulación de los datos observados para después obtener el gráfico de su comportamiento. Otro ejemplo típico consiste en el enfriamiento de una barra de metal, como es el caso que aquí presentamos. De los resultados obtenidos podemos afirmar categóricamente que el modelo describe con gran exactitud el sistema, toda vez que los datos que arroja concuerdan con el experimento.

Palabras clave: *Ley de enfriamiento de Newton, Temperatura de superficie, Temperatura de los alrededores, Velocidad de cambio, Modelo, Práctica de laboratorio, Barra de metal*

Objetivo

Explicar la ley de enfriamiento de Newton mediante ecuaciones diferenciales ordinarias a través de método(s) matemático(s) para modelar tal efecto, mostrando además, físicamente, acontecimientos cotidianos en donde se refleje la representación simbólica de la situación involucrada a fin de llevar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la física y las matemáticas a una concepción constructivista por parte del individuo.

Introducción

Isaac Newton (1641-1727), es reconocido por sus numerosas contribuciones a la ciencia. Entre otras cosas estudió el movimiento y estableció las leyes de la dinámica, enunció la ley de la gravitación universal, explicó la descomposición en colores de la luz blanca cuando pasa por un prisma, etcétera. A los 60 años de edad aceptó un puesto como funcionario nacional y se desempeñó como responsable de la Casa de Moneda de su país. Ahí tenía como misión controlar la acuñación de monedas. Probablemente se interesó por la temperatura, el calor y el punto de fusión de los metales motivado por su responsabilidad de supervisar la calidad de la acuñación. Utilizando un horno a carbón de una pequeña cocina, Newton realizó el siguiente experimento: calentó al rojo vivo un bloque de hierro, al retirarlo del fuego lo colocó en un lugar frío y observó cómo se enfriaba. Sus resultados dieron lugar a lo que hoy conocemos con el nombre de ley de enfriamiento de Newton, que se describe como $dT/dt = k\left(T - T_0\right)$ donde la derivada con respecto al tiempo dT/dt representa la rapidez del enfriamiento, T es la temperatura instantánea del cuerpo, k es la constante que define el ritmo del enfriamiento y T_0 es la temperatura del ambiente, que es la temperatura que alcanza el cuerpo luego de suficiente tiempo.

Metodología

El experimento se muestra físicamente calentando un cuerpo a una cierta temperatura, y se mide el descenso de la misma en un tiempo determinado para encontrar la constante k del enfriamiento, esto para conseguir tanto la temperatura del cuerpo en cualquier instante como el tiempo que se necesita para que llegue a una temperatura deseada.

Por otra parte, la justificación matemática consiste en emplear la ley de enfriamiento de Newton a través de la ecuación diferencial ordinaria que la define, usando cualesquier método analítico, separación de variables o factor integrante, aplicando las condiciones de frontera e iniciales que modelan en forma adecuada fenómenos físicos de enfriamiento o calentamiento de cuerpos.

Situación física

Al sacar un metal del horno su temperatura es de 202 ºF. Después de 3 minutos su temperatura es de 195 ºF. Se sabe que la temperatura del ambiente es de 70 ºF. ¿A qué temperatura estará el metal después de 2 minutos, 10 minutos, 30 minutos? ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a la temperatura ambiente?

Representación simbólica del fenómeno físico

El enfriamiento de un cuerpo queda adecuadamente modelado mediante la expresión matemática de la ley de enfriamiento de Newton [4]. En la tabla 1.1 se muestran los datos e incógnitas de la situación física descrita anteriormente.

Tabla 1.1 Datos y variables a determinar para el fenómeno físico que representa un metal enfriándose.		
Datos	**Incógnitas**	
$T(0)=202$ °F $T(3)=195$ °F $T_0=70$ °F	**Tiempo (minutos)**	**Temperatura (ºF)**
	2	?
	10	?
	30	?
	?	75
	?	74
	?	73
	?	72
	?	71
	?	70.5

La ley de enfriamiento de Newton [1-3] se representa simbólicamente mediante la expresión

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T - T_0\right) \tag{1}$$

Usando el método de separación de variables en la ecuación (1) e integrando al mismo tiempo se tiene que

$$\int \frac{dT}{T - T_0} = \int kdT \quad \Rightarrow \quad T - T_0 = C_1 e^{kt}; \quad T_0 = 70° F$$

Sustituyendo las condiciones iniciales resulta que $C_1 = 132$ y, por tanto,

$$T - T_0 = 132 e^{kt}$$

Sustituyendo la condición $T(3) = 195$ ºF resulta que $k = -0.0\,181\,627\,284\,279$ y, por tanto

$$T = T_0 + 132e^{-0.0\,181\,627\,284\,279} \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{\ln \dfrac{T-70}{132}}{-0.0\,181\,627284\,279}$$

Resultados

En la tabla 1.2 se pueden observar los resultados que arroja el modelo de la ley de enfriamiento de Newton.

Tabla 1.2 Datos y variables calculadas para el fenómeno físico que representa un metal enfriándose.		
Datos	**Incógnitas**	
$T(0)=202$ °F $T(3)=195$ °F $T_0=70$ °F	**Tiempo (minutos)**	**Temperatura (ºF)**
	2	?=197.29
	10	?=180.08
	30	?=146.55
	?=180.22	75
	?=192.51	74
	?=208.35	73
	?=230.67	72
	?=268.84	71
	?=307	70.5

Con esto sabemos que el metal se aproximará a la temperatura ambiente más o menos en 5 horas 7 minutos.

Representación gráfica del fenómeno físico

En la Fig. 1.12 se muestra la gráfica de la temperatura con respecto al tiempo para el metal que se enfría. Puede observarse que la temperatura disminuye conforme el tiempo aumenta, hasta llegar a ser constante (llega a alcanzar la temperatura ambiente). Esto se logra después de aproximadamente cinco horas y continúa hasta un tiempo indeterminado (asíntota horizontal).

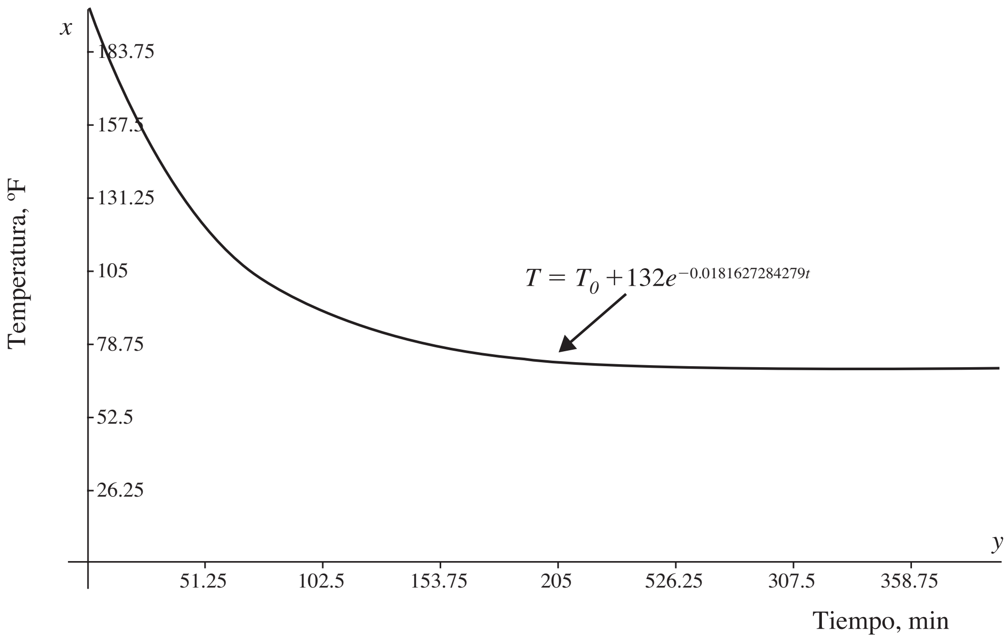


Fig. 1.12. Gráfica de temperatura contra tiempo para el enfriamiento de un metal.

Discusión

En la Fig. 1.12 se puede observar el decremento en forma exponencial de la temperatura que experimenta el metal al enfriarse conforme transcurre el tiempo, tal como se esperaba. Los resultados muestran el descenso de temperatura a partir de los dos minutos posteriores al evento, hasta después de cinco horas, tiempo suficiente para aproximarse a la temperatura ambiente.

Conclusiones

El modelo matemático que representa a la ley de enfriamiento de Newton arroja un resultado satisfactorio del fenómeno de transferencia de calor involucrado, lo cual queda comprobado al realizar físicamente el experimento, con lo cual se cumple con el objetivo de que el estudiante obtenga aprendizaje significativo al ligar el conocimiento en forma integral a través de relacionar teoría-práctica.

Referencias

1. Zill, D.G., 1986, *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*, Segunda Edición, Grupo Editorial Iberoamérica, México.
2. Zill, D.G., 2002, *Ecuaciones Diferenciales con Aplicación de Modelado*, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

3. Edwards, C.H., y Penney, D.E., 1998, *Ecuaciones Diferenciales Elementales y Problemas con Condiciones en la Frontera*, Prentice-Hall Hispanoamérica, S.A.

4. Williamson, R.E., 2001, *Introduction to Differential Equations and Dynamical Systems*