

Pauta tutoría 6

Resumen!

Volvió el homomorfismo, en forma de chapitas c:

Sea U, V dos e.v, decimos que $T : U \longrightarrow V$ es una *transformación lineal* si:

- $\forall u_1, u_2 \in U, T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$
- $\forall u \in U, \forall \lambda \in K, T(\lambda u) = \lambda T(u)$
- $T(0) = 0$

Sin embargo, para demostrar que una transformación es lineal nuevamente contamos una **caracterización compacta** que nos facilitará mucho las cosas para ahorrar desarrollo:

$$T \text{ es lineal} \iff \forall u_1, u_2 \in U, \forall \lambda \in K, T(\lambda u_1 + u_2) = \lambda T(u_1) + T(u_2)$$

Materia nueva, espacios nuevos: “**Kernel**” e “**Imagen**”

A partir de las transformaciones lineales se definen dos nuevos espacios vectoriales: el *kernel* o *núcleo* y la *imagen* de la transformación, denotadas típicamente por $Ker(T)$ e $Im(T)$ respectivamente.

Para poder determinar dichos espacios debemos de encontrar bases generadoras dada ciertas restricciones que provienen de la misma definición de $Ker(T)$ e $Im(T)$, análogo a lo que hicimos para nuestro primer control!

Sea $T : U \longrightarrow V$ una *transformación lineal*

$$Ker(T) = \{u \in U \mid T(u) = 0\}$$

$$Im(T) = \{v \in V \mid \exists u \in U, T(u) = v\}$$

Transformación lineal = Funciones (??)

Las transformaciones pueden ser *inyectivas* y/o *epiyectivas* (y por ende *biyectivas*...) dadas las siguientes definiciones:

$$T \text{ inyectiva} \iff Ker(T) = \{0\} \iff \dim Ker(T) = 0$$

$$T \text{ epiyectiva} \iff Im(T) = V \iff \dim Im(T) = \dim(V)$$

P1.- [Homomorfismos joined the game] Considere la función $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a+b+c \\ a+b+c+d \end{pmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}} \right\} \text{Definición de } T$$

- Pruebe que T es lineal
- Calcule una base del $ker(T)$, explicite su dimensión y analice inyectividad
- Calcule una base del $Im(T)$, explicite su dimensión y analice epiyectividad

• **T lineal**: Basta con demostrar la caracterización compacta de transformación lineal

Dado $T : U \longrightarrow V$

$$T \text{ lineal} \iff \forall u_1, u_2 \in U, \forall \lambda \in \mathbb{R}, T(\lambda u_1 + u_2) = \lambda T(u_1) + T(u_2)$$

$\hookrightarrow$ Muy parecido a los homomorfismos!

Aplicando la demostración a nuestro problema, tomemos $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^4$ arbitrarios tales que:

$$u_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

Sigue demostrar que dado $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrario:

$$= T(\lambda u_1 + u_2) = \lambda T(u_1) + T(u_2) =$$

Nota: La mejor estrategia para esta clase de ejercicios es aplicar la definición de T sobre el vector $\lambda u_1 + u_2$ y luego separar $T(u_1)$ y $T(u_2)$.

$$\lambda u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} \lambda a + x \\ \lambda b + y \\ \lambda c + z \\ \lambda d + w \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} (\lambda a + x) + (\lambda b + y) \\ (\lambda a + x) + (\lambda b + y) + (\lambda c + z) \\ (\lambda a + x) + (\lambda b + y) + (\lambda c + z) + (\lambda d + w) \end{pmatrix}$$

Luego, como buscamos formar $T(u_1)$ y $T(u_2)$ por separado, para u_1 agrupamos las variables a, b, c, d y para u_2 x, y, z, w .

$$T(\lambda u_1 + u_2) = \begin{pmatrix} \lambda a + \lambda b \\ \lambda a + \lambda b + \lambda c \\ \lambda a + \lambda b + \lambda c + \lambda d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x + y \\ x + y + z \\ x + y + z + w \end{pmatrix} \quad \left/ \begin{array}{l} \text{Separar} \\ \text{conveniente} \end{array} \right.$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} a + b \\ a + b + c \\ a + b + c + d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x + y \\ x + y + z \\ x + y + z + w \end{pmatrix} \quad \left/ \begin{array}{l} \text{Factorizar} \\ \lambda \end{array} \right.$$

$$= \lambda T(u_1) + T(u_2) \quad \left/ \begin{array}{l} \text{Def } T(u) \end{array} \right.$$

Concluyendo que T es lineal ...

NOTA: Para este caso fue necesario definir vectores arbitrarios con coeficientes dados que T opera sobre las coordenadas, en otros casos donde esto no es así se podría aplicar la transformación directamente (Ej. después...)

• ¿Ker T?

→ A partir de las transformaciones se define el espacio **Ker T** en el cual están todos los vectores que cumplen la siguiente restricción.

$$u \in \text{Ker } T \Leftrightarrow T(u) = 0$$

Lo que para nuestro problema quiere decir:

$$\text{Dado } u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \rightarrow u \in \text{Ker } T \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b \\ a+b+c \\ a+b+c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego el desarrollo que sigue es análogo a cuando buscáramos encontrar la base de un s.e.v

$$\begin{array}{l} a+b \\ a+b+c \\ a+b+c+d \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} a = -b \\ c = 0 \\ d = 0 \end{array} \rightarrow u = \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Significa que, como $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ genera Ker T y además es l.i., es una base del espacio.

$$\text{Entonces } \text{Ker } T = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \langle u \rangle = \text{Lo generado por } u$$

con $\dim(\text{Ker } T) = 1 \rightarrow T$ no es **inyectiva**

• ¿Im T?

→ El conjunto imagen son todos los vectores **v** que están en el conjunto de llegada los cuales tienen al menos un vector **u** en la partida tq. $T(u) = v$

(Igual que el conjunto imagen de una función...)

Cuando **contamos con la def. de T** una buena estrategia es aplicar T sobre los vectores de la base canónica, así encontraremos un generador de dicho espacio...

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Entonces } \text{Im } T = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Para que sea base tiene que ser l.i., por tanto, quitando un vector repetido se cumple

→ Significa que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de Im T

con $\dim(\text{Im } T) = 3$, por lo tanto, como

$\dim(\text{Im } T) = \dim(\mathbb{R}^3)$ entonces T **epiyectiva**.

P2.- [Más Polinomios] Sea $T : P_5(\mathbb{R}) \rightarrow P_5(\mathbb{R})$ definida por $T(p(x)) = x^3 \cdot p'''(x)$

- Pruebe que T es lineal
- Calcule una base del $\ker(T)$, explicita su dimensión y analice inyectividad
- Calcule una base del $\text{Im}(T)$, explicita su dimensión y analice epiyectividad

• ¿ T lineal? $\rightarrow$ caso polinomios

$$\forall p, q \in P_5(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, T(\lambda p(x) + q(x)) = \lambda T(p(x)) + T(q(x))$$

Por tanto, tenemos que aplicar la def. T sobre $\lambda p(x) + q(x)$

$\rightarrow$ Notar que T no trabaja directamente sobre los coeficientes de los polinomios, por lo tanto, podemos ignorar formas p, q coeficiente a coeficiente

Aplicamos $T(\lambda p(x) + q(x))$ sobre el polinomio auxiliar

$$h(x) = \lambda p(x) + q(x)$$

$$\begin{aligned} T(h(x)) &= x^3 \cdot h'''(x) && / \text{ def } T \\ &= x^3 \cdot (\lambda p(x) + q(x))''' && / \text{ def } h(x) \\ &= x^3 \cdot (\lambda p'''(x) + q'''(x)) && / \text{ derivada suma} \\ &= x^3 \cdot \lambda p'''(x) + x^3 \cdot q'''(x) && / \text{ distrib.} \cdot \text{c/r} + \\ &= \lambda T(p(x)) + T(q(x)) && / \text{ def } T \\ &\therefore T \text{ es lineal} \end{aligned}$$

• ¿ $\ker T$? Ahora sí es necesario definir arbitrario

$$\text{Sea } p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

$$p(x) \in \ker T \Leftrightarrow T(p(x)) = x^3 \cdot p'''(x) = 0$$

$$\rightarrow \text{Dado } p'''(x) = 60ax^2 + 24bx + 6c$$

$$\begin{aligned} T(p(x)) &= x^3 \cdot 60ax^2 + 24bx + 6c = 0 \\ &= \underline{60a}x^5 + \underline{24b}x^4 + \underline{6c}x^3 = 0 \end{aligned}$$

Luego, para que se cumpla la igualdad cada $\forall x \in \mathbb{R}$ cada coeficiente del polinomio tiene que ser cero.

$$\begin{aligned} 60a &= 0 \rightarrow a = 0 \\ 24b &= 0 \rightarrow b = 0 \\ 6c &= 0 \rightarrow c = 0 \end{aligned}$$

Reemplazar en arbitrario!

$$\begin{aligned} p(x) &= ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f \\ p(x) &= \underline{d} \cdot x^2 + \underline{e} \cdot x + \underline{f} \cdot 1 \end{aligned}$$

Entonces $\{x^2, x, 1\}$ genera $\ker T$, y como es li es una base del espacio.

$\rightarrow$ Como $\dim(\ker T) = 3$, T no es inyectiva

• $\text{Im } T$: Aplicamos T sobre la base canónica de $P_5(\mathbb{R})$

$$T(x^5) = x^3 \cdot 60x^2 = 60 \cdot x^5 \checkmark$$

$$T(x^2) = 0 \times$$

$$T(x^4) = x^3 \cdot 24x = 24 \cdot x^4 \checkmark$$

$$T(x) = 0 \times \text{No aportan}$$

$$T(x^3) = x^3 \cdot 6 = 6x^3 \checkmark$$

$$T(1) = 0 \times$$

Sigue que $\{x^5, x^4, x^3\}$ generan $\text{Im } T$
 (no importan los coeficientes)

Luego como $\dim(\text{Im } T) \neq \dim(P_5(\mathbb{R}))$

$\hookrightarrow T$ no es epiyectiva

P3.- [Más Matrices] Sea $T : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$ la transformación lineal definida como:

$$T(A) = MA + AM \quad \text{donde } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Pruebe que T es lineal
- Calcule una base del $\ker(T)$, explicita su dimensión y analice inyectividad
- Calcule una base del $\text{Im}(T)$, explicita su dimensión y analice epyectividad

T lineal:

$$\text{pdg. } \forall A, B \in M_{2 \times 2}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, T(\lambda A + B) = \lambda T(A) + T(B)$$

$$\begin{aligned} T(\lambda A + B) &= M(\lambda A + B) + (\lambda A + B)M && / \text{ def } T \\ &= M\lambda A + MB + \lambda AM + BM && / \text{ distrib. } \cdot \text{dr} + \\ &= M\lambda A + \lambda AM + MB + BM && / \text{ commut.} \\ &= \lambda(MA + AM) + MB + BM && / \text{ distrib. } \cdot \text{dr} + \\ &= \lambda T(A) + T(B) && / \text{ def. } T \\ &\therefore T \text{ es lineal} \end{aligned}$$

• $\text{Ker } T$: Ahora sí usar arbitrario $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A \in \text{Ker } T \rightarrow T(A) = MA + AM = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b+c & a+d \\ a+d & b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} a+d=0 \\ b+c=0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} a=-d \\ b=-c \end{matrix} \quad / \text{ Reemplazar!}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d & -c \\ c & d \end{pmatrix} = \underline{c} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \underline{d} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ genera $\text{Ker } T$, y como es li sigue que es base del espacio

Luego $\dim \text{Ker } T = 2 \neq 0 \Rightarrow T$ no es *inyectiva*

• $\text{Im } T$: Aplicar T sobre base canónica

$$T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sigue que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ genera $\text{Im } T$, y como es li es base del espacio

$$\text{Luego } \dim(\text{Im } T) = 2 \neq \dim(M_{2 \times 2})$$

$\hookrightarrow$ Entonces T no es *epiyectiva*