

Pauta Tutoría 7

Teorema Núcleo-Imagen (TNI para los amigos)

Ya estudiamos la tutoría anterior en qué consisten las transformaciones y cómo poder encontrar los espacios asociados a estas, es decir, el *núcleo* y la *imagen*. No obstante, los procedimientos que utilizamos se basaron completamente en la premisa de que conocemos la definición de la transformación y podemos aplicarla sobre vectores del espacio de forma conveniente. Si eso no ocurre, no queda más remedio que usar la arma definitiva:

Sea $T : U \longrightarrow V$ una transformación lineal:

$$\cong \dim(U) = \dim(\text{Ker}T) + \dim(\text{Im}T) \cong$$

Dado que la dimensión de la partida casi siempre es dato del problema, mediante el TNI podemos relacionar las dimensiones del *núcleo* y la *imagen* a conveniencia del resto de información que nos de el problema c:

P1.- [Recordando lo Aprendido] Considere $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ definida por:

$$T(p(x)) = (x^2 + x) \cdot p'(x)$$

- Pruebe que T es lineal
- Calcule una base del $\text{ker}(T)$ y explicita $\text{nulidad}(T)$
- Calcule una base del $\text{Im}(T)$ y explicita $\text{rango}(T)$
- Analice inyectividad y epiyectividad

→ Análogo a P2 tutoría anterior! (con pauta)

P2.- [TNI + Linealidad] Considere $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación desconocida tal que:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Encuentre bases y dimensiones de $\text{Ker}T$ e $\text{Im}T$

Para esta clase de ejercicios en los cuales T es desconocida no es posible encontrar $\text{Ker}T/\text{Im}T$ tal como en la tutoría anterior.

Usaremos otros métodos menos convencionales...

→ Linealidad: Dado $T : U \longrightarrow V$ podemos tener vectores $a, b \in U$ los cuales tienen una transformación asociada $T(a), T(b) \in V$ tal que:

$$\boxed{T(a) = x} \wedge \boxed{T(b) = y}$$

Usando la propiedad de T lineal...

$$T(a) + T(b) = x + y$$

$$T(a+b) = (x+y)$$

Logrando así deducir el valor de T sobre otro vector diferente a los que teníamos al inicio!

Entonces, dado

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

podemos notar que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}T$ (porque $T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Im}T$ (Porque $\exists v \in \mathbb{R}^3$ tq $T(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$)

Con lo anterior:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \text{Ker}T \quad \wedge \quad \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \text{Im}T$$

Aplicando el TNI:

$$\underset{\gg 1}{\dim \text{Ker}T} + \underset{\gg 1}{\dim \text{Im}T} = \underset{3}{\dim \mathbb{R}^3}$$

Sigue encontrar un vector que pertenezca a alguno de los 2 espacios pero sea l.i con el que ya tenemos...

Usemos linealidad! $T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - T \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker}T$$

→ Como $\underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\text{l.i.}} \subseteq \text{Ker}T \Rightarrow \dim \text{Ker}T \gg 2$

Volviendo al TNI: $\underset{\gg 2}{\dim \text{Ker}T} + \underset{\gg 1}{\dim \text{Im}T} = \underset{3}{\dim \mathbb{R}^3}$

Para que sea cierto, debe de cumplirse la igualdad de forma estricta

$$\dim \text{Ker}T = 2 \quad \text{y} \quad \dim \text{Im}T = 1$$

$\therefore \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es base de $\text{Ker}T$ y $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ de $\text{Im}T$

P3.- [Nerfeen al TNI] Considere $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una transformación desconocida tal que:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Argumente que $\dim(\text{Im}T) \geq 2$
- Suponiendo que $\text{Im}T \subseteq \text{Ker}T$, calcule bases de la imagen y el núcleo de la transformación

¿ $\dim \text{Im}T \geq 2$? $\rightarrow$ Sí, notemos que aplicada T sobre 2 vectores llegamos a otros 2 vectores que son li entre si.

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \text{Im}T \Rightarrow \text{Im}T \geq 2$$

Luego, como $\text{Im}T \subseteq \text{Ker}T$ recordamos la def. de subconjuntos...

$$\text{Im}T \subseteq \text{Ker}T \Rightarrow T(\text{Im}T) = 0$$

"La imagen está contenida en el kernel"

con eso:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \text{Ker}T \Rightarrow \text{Ker}T \geq 2$$

Aplicando el TNI:

$$\underbrace{\dim \text{Ker}T}_{\geq 2} + \underbrace{\dim \text{Im}T}_{\geq 2} = \underbrace{\dim \mathbb{R}^4}_4$$

Nuevamente se tiene que cumplir la igualdad estricta

$$\dim \text{Ker}T = 2 \quad \text{y} \quad \dim \text{Im}T = 2$$

$$\therefore \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ es base de } \text{Ker}T \text{ e } \text{Im}T$$

P4.- [En una Línea...] Demuestre que no existen $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tales que $\ker(T) = \text{Im}(T)$

Supongamos por contradicción que sí existe

$$\text{Ker}T = \text{Im}T \Rightarrow \dim \text{Ker}T = \dim \text{Im}T = "a"$$

Luego, por TNI:

$$\underbrace{\dim \text{Ker}T}_a + \underbrace{\dim \text{Im}T}_a = \underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_3$$

$$\rightarrow 2a = 3, \quad \text{¿} a = \frac{3}{2} \text{?} \quad \rightarrow \text{X}$$

Imposible tener dimensiones no enteras

P5.- [Dos Caminos] Sea $A = \{u, v, w\}$ una base del espacio E . Luego, se define $T : E \rightarrow E$ tal que $T(u) = T(v) \neq 0$ y $T(w) = 3T(u) - T(v)$. Pruebe que el núcleo de T tiene dimensión 2.

→ La intuición dice que si no hay def. de T usamos el TNI

$$\dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T = \dim E$$

Como la base del espacio es conocida $\rightarrow \dim E = 3$

Nos piden demostrar que $\dim \text{Ker } T = 2$

2 caminos: a) Encontrar $\text{Ker } T$ directamente

b) Encontrar $\text{Im } T = 1$ y concluir usando el TNI

NOTA: Generalmente el camino a usar en estos ejercicios es ir por el camino "rebuscado" puesto que las preguntas se diseñan para poner en práctica la materia... (y que salga en menos pasos)

Sin embargo, eso no quiere decir que tomar el camino largo esté mal (de hecho esa pregunta la hice de la forma larga en mi control)

a) Usando fuerza bruta, calcular $\text{Ker } T$!

→ Como $T(u) = T(v) \neq 0$ podemos deducir:

$$\langle T(u) \rangle \subseteq \text{Im } T \quad \text{y} \quad \langle u-v \rangle \subseteq \text{Ker } T$$

Def. Imagen linealidad

TNI:

$$\dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T = \dim E$$

≥ 1 ≥ 1 3

Falta encontrar otro vector en $\text{Ker } T$...

→ Como $T(w) = 3T(u) - T(v) = 2T(u) \neq 0$

Aplicando linealidad: $T(w) = 2T(u) \rightarrow T(w - 2u) = 0$

$$\hookrightarrow \langle \underbrace{u-v, w-2u}_{\text{l.i.}} \rangle \subseteq \text{Ker } T$$

TNI:

$$\dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T = \dim E$$

≥ 2 ≥ 1 3

Concluyendo así que $\dim \text{Ker } T = 2$ y $\dim \text{Im } T = 1$

b) Calcular $\text{Im } T$:

→ La noción principal de buscar la imagen es ver cómo opera T sobre la base de la partida.

$$\langle \{T(u), T(v), T(w)\} \rangle = \text{Im } T$$

(siempre ~)

(Lo generado, no base necesariamente base porque aún falta. l.i.)

De los datos del problema se sabe que:

$$T(u) = T(v) = \frac{1}{2}T(w) \neq 0$$

Como son l.d. entre sí, basta tomar uno solo y ya tenemos base!

$$\{T(u)\} \text{ base Im } T \Rightarrow \dim \text{Im } T = 1$$

Luego, por TNI se deduce $\dim \text{Ker } T = 2$