

Pauta Tutoría 8

P1.- [Hable con mi Representante] Considere $T: \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ definida por

$$T(p(x)) = x \cdot p(x)$$

Dado $\alpha = \{1, x-1, (x-1)^2\}$ y $\beta = \{1, -x, x^2, x^2-x^3\}$ determine la matriz representante de la transformación con α en la partida y β en la llegada.

Para calcular una matriz representante podemos seguir de forma genérica los siguientes pasos!

1. Identificar bases de Partida / llegada
2. Aplicar T sobre cada vector de la base de partida
3. Codificar lo obtenido en base de llegada
4. Escribir la matriz representante.

Aplicado a nuestro problema:

Dado $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_3$ con $T(p(x)) = x \cdot p(x)$

1) identifiquemos bases!

→ Partida $\alpha = \{1, x-1, (x-1)^2\}$

→ Llegada $\beta = \{1, -x, x^2, x^2-x^3\}$

2) Aplicar T sobre α

$$T(1) = x \quad / \quad T(x-1) = x^2 - x \quad / \quad T((x-1)^2) = x^3 - 2x^2 + x$$

3) Codificar en β (Por tanto α algebraico.)

$$x = \underline{0} \cdot 1 + \underline{-1} \cdot (-x) + \underline{0} \cdot x^2 + \underline{0} \cdot (x^2 - x^3)$$

$$x^2 - x = \underline{0} \cdot 1 + \underline{1} \cdot (-x) + \underline{1} \cdot x^2 + \underline{0} \cdot (x^2 - x^3)$$

$$x^3 - 2x^2 + x = \underline{0} \cdot 1 + \underline{-1} \cdot (-x) + \underline{-1} \cdot x^2 + \underline{-1} \cdot (x^2 - x^3)$$

Nota: La codificación se puede entender como escribir los vectores como una combinación lineal en la llegada

4) Escribir matriz representante

T usada

$$M_{\alpha\beta}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

"La codificación encontrada para cada $T(\alpha)$ se coloca por columnas"

P2.- [Comenzando con Calma] Considere $T: \mathcal{M}_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Encuentre la matriz representante de T respecto a las bases canónicas

1) Recordar las bases canónicas

→ Partida $C_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

→ Llegada $C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

2,3) Aplicar T y codificar

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{0} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{0} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4) Escribir Matriz

$$M_{C_1 C_2}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

NOTA DE LOS EJERCICIOS: El orden de los vectores dentro de cada una de las bases SI afecta a la codificación, por tanto:

- Si nos dan las bases NO cambian Orden
- Si no las dan explícitamente y las tenemos que definir SEGUIR el Orden que inventamos

P3.- [Se pone interesante...] Considere $T : \mathcal{M}_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ dada por

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (c+d)x^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + (a+d)$$

Encuentre la matriz representante de T respecto a las bases (usando camino ~~largo~~ ^{Directo!})

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \beta = \{1+x, x+x^2, x^2+x^3, 1-x-x^2-x^3\}$$

→ Aplicamos algoritmo para cálculo directo de $M_{\alpha\beta}(T)$

1) Identificar Bases: Directo de enunciado!

2) Aplicar T sobre α

$$a) T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3$$

$$b) T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 + 2x + 2x^2 + x^3$$

$$c) T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 + x + 2x$$

$$d) T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 + x^2$$

3) Codificar:

$$2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 = \underline{2}(1+x) + \underline{0}(x+x^2) + \underline{2}(x^2+x^3) + \underline{0}(1-x-x^2-x^3)$$

$$1 + 2x + 2x^2 + x^3 = \underline{1}(1+x) + \underline{1}(x+x^2) + \underline{1}x^2 + x^3 + \underline{0}(1-x-x^2-x^3)$$

$$1 + x + 2x = \underline{0}(1+x) + \underline{2}(x+x^2) + \underline{1}(x^2+x^3) + \underline{1}(1-x-x^2-x^3)$$

$$1 + x^2 = \underline{0}(1+x) + \underline{1}(x+x^2) + \underline{1}(x^2+x^3) + \underline{1}(1-x-x^2-x^3)$$

4) Escribir matriz representante!

$$M_{\alpha\beta}(T) = \begin{pmatrix} \underline{2} & \underline{0} & \underline{2} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{1} \\ \underline{2} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} \end{pmatrix} //$$

OBS: Notar que para este ejercicio donde se usó una base "extraña" en la llegada el encontrar la codificación final de forma tentativa (al ojo...) no es tan simple de ver...

Si no ves directamente, usa "componentes arbitrarias" y desarrolla sistema lineal...

$$\text{Ej: } 1 - x^2 = \underline{A}(1+x) + \underline{B}(x+x^2) + \underline{C}(x^2+x^3) + \underline{D}(1-x-x^2-x^3)$$

$$1 + x^2 = (\underline{A} + \underline{D}) \cdot 1 + (\underline{A} + \underline{B} - \underline{D}) \cdot x + (\underline{B} + \underline{C} - \underline{D}) \cdot x^2 + (\underline{C} - \underline{D}) \cdot x^3$$

→ Por igualdad de polinomios, se igualan los coeficientes:

$$\underline{A} + \underline{D} = 1 \quad \underline{A} + \underline{B} - \underline{D} = 0 \quad \underline{B} + \underline{C} - \underline{D} = 1 \quad \underline{C} - \underline{D} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{B} & \underline{C} & \underline{D} & | & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{B} & \underline{C} & \underline{D} & | & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \underline{A} = 0 \\ \underline{B} = 1 \\ \underline{C} = 1 \\ \underline{D} = 1 \end{matrix}$$

Obteniéndose los valores anteriormente señalados

Notar que se podría trabajar con la siguiente matriz que calcula todo al mismo tiempo...

$$\begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{B} & \underline{C} & \underline{D} & | & \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} & \underline{d} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{B} & \underline{C} & \underline{D} & | & \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} & \underline{d} \end{pmatrix}$$

P4.- [Cambio de Base Preview] Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que su matriz representante con respecto a la base

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

en la partida y en la llegada es:

$$M_{\beta\beta}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

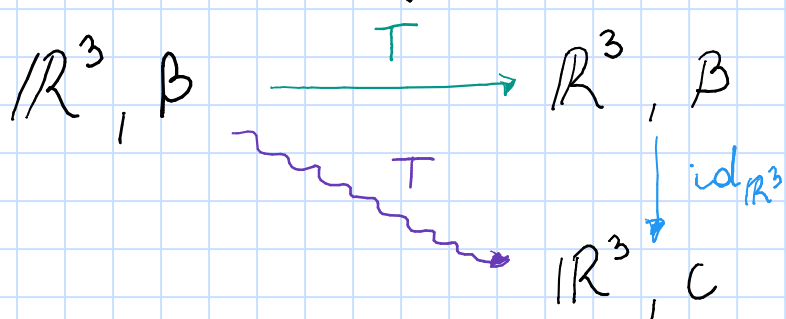
- Usando cambio de bases calcule la matriz representante de T respecto a β en la partida y la base canónica en la llegada
- ¿Existirán bases α, α' de $\mathbb{R}^3$ tal que se tenga lo siguiente?

$$M_{\alpha\alpha'}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sea $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base canónica de $\mathbb{R}^3$

→ Nos dan $M_{\beta\beta}(T)$ pero nos piden $M_{\beta C}(T)$

introducimos el diagrama de cambio de bases:



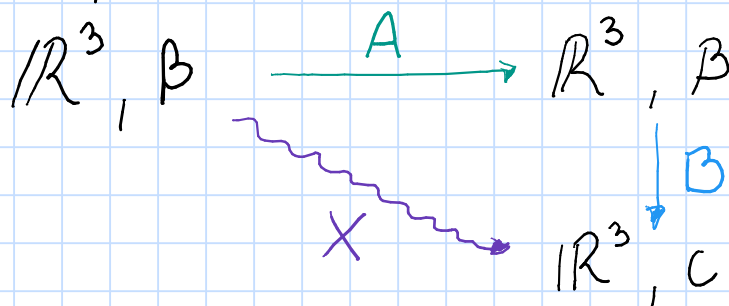
Notar que si queremos $M_{\beta C}(T)$ podemos recorrer un camino alternativo, pasar primero de $(\mathbb{R}^3, \beta)$ a $(\mathbb{R}^3, C)$ mediante T y luego efectuar un cambio de base en el espacio de llegada de $(\mathbb{R}^3, \beta)$ a $(\mathbb{R}^3, C)$.

→ Recordar que la matriz de cambio de bases no es más que calcular la matriz representante de la transformación "identidad" (id) con la base original en la partida y la nueva en la llegada!

Por simplicidad, renombraremos las matrices...

$$M_{\beta C}(T) = X \quad M_{\beta\beta}(T) = A \quad M_{\beta C}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}) = B$$

Luego, dado esquema:



Se tiene que $X = B \cdot A$, como A es dato calculamos B :

1) Identifican bases:

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \checkmark$$

2,3) Aplican $\text{id}_{\mathbb{R}^3}$ sobre β y codifican

$$\text{id}_{\mathbb{R}^3} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{id}_{\mathbb{R}^3} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + -1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{id}_{\mathbb{R}^3} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4) Armar matriz

$$\hookrightarrow M_{\beta C}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}) = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

OBS: Notar que el cálculo de la matriz fue equivalente a tomar los vectores de la partida y agruparlos como matriz...

→ Lo anterior sucederá siempre que busquemos pasar desde una base extraña a las canónicas, por lo que será un resultado conocido que nos permitirá ahorrar desarrollo en el futuro!

!! Sin embargo, si se busca pasar de las canónicas a una base extraña el resultado no es directo

Finalmente:

$$X = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- ¿Existirán bases α, α' de $\mathbb{R}^3$ tal que se tenga lo siguiente?

$$M_{\alpha\alpha'}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sabemos que en una matriz representante cada columna representa la codificación en la llegada luego de aplicar la transformación en la partida

Entonces, sea $\alpha = \{a_1, a_2, a_3\}$ $\alpha' = \{a'_1, a'_2, a'_3\}$

Tenemos que:

$$T(a_1) = 1 \cdot a'_1 + 0 \cdot a'_2 + 0 \cdot a'_3 = a'_1$$

$$T(a_2) = 0 \cdot a'_1 + 0 \cdot a'_2 + 0 \cdot a'_3 = 0$$

$$T(a_3) = 0 \cdot a'_1 + 0 \cdot a'_2 + 0 \cdot a'_3 = 0$$

Con ello, notar que para esta T :

$$\langle \{a_2, a_3\} \rangle \subseteq \text{Ker } T \quad \text{l.i.} \Rightarrow \dim \text{Ker } T \geq 2$$

$$\langle \{a'_1\} \rangle \subseteq \text{Im } T \quad \text{l.i.} \Rightarrow \dim \text{Im } T \geq 1$$

Luego, por TNI:

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T$$

≥ 3

≥ 2

≥ 1

Concluyendo que se cumplen igualdades estrictas:

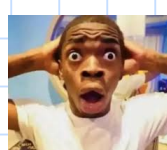
$$\therefore \dim \text{Ker } T = 2 \quad \wedge \quad \dim \text{Im } T = 1$$

→ No obstante, si realizamos desarrollo análogo para nuestra matriz original encontraremos que $\dim \text{Ker } T = 1$ y $\dim \text{Im } T = 2$, llegando a una contradicción (propuesto)

$$\therefore \nexists \alpha, \alpha' \text{ bases de } \mathbb{R}^3 \text{ tq } M_{\alpha\alpha'}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Moralaja: La matriz representante contiene información clave asociada a la transformación ($\text{Ker } T / \text{Im } T$)

↳ "Representan" la transformación!



Pequeño Type pipipi

P5.- [La Fórmula] Considere $T: \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1) + p(0) \\ -p(-1) \\ p(1) - p(0) \end{pmatrix}$$

- Determine la matriz representante de T respecto a las bases canónicas
- Usando cambio de bases calcule la matriz representante respecto a las siguientes bases

$$A = \{x-1, x^2-1, (x+1)^2\} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Explicado todo lo anterior ahora aplicar $\rightarrow$

• Primero calculamos matriz representante de T según las bases canónicas...

1) Definir bases:

$$c_1 = \{1, x, x^2\} \quad c_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2,3) Aplicar T y codificar

$$T(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

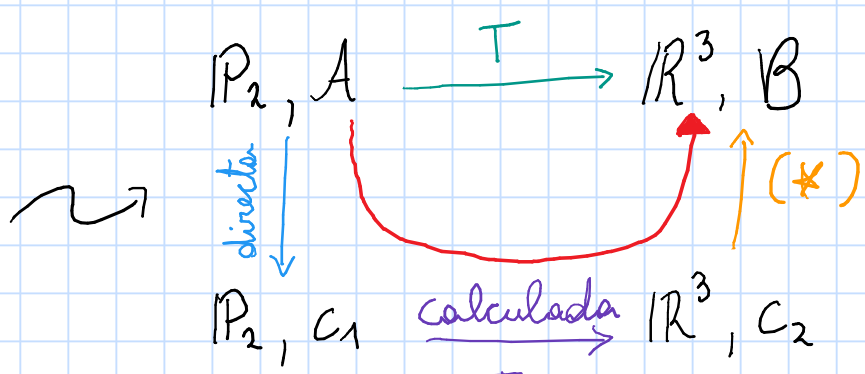
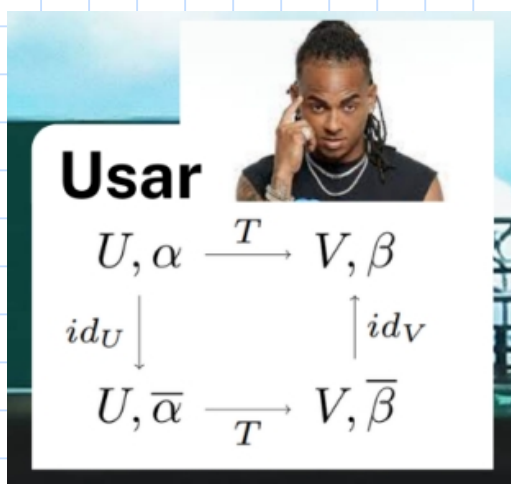
$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4) Armar Matriz $\hat{\wedge}$

$$M_{c_1 c_2}(T) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Para la siguiente parte nos piden determinar " $M_{AB}(T)$ ", no obstante, usando matrices de cambio de base podemos hacer un desarrollo más simple...



$$M_{AB}(T) = M_{C_2 B}(id) \cdot M_{C_1 C_2}(T) \cdot M_{A C_1}(id)$$

$\rightarrow$ Notar que $M_{A C_1}(id)$ es un caso de matriz de cambio de base desde base extraña a canónica, entonces disponemos columnas directamente! (según orden c_1)

$$M_{A C_1}(id) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Para $M_{C_2 B}(id)$ realizamos procedimiento tradicional

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Codificación Simple...

$\rightarrow$ Probar por tantes funciona!

$$M_{C_2 B}(id) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$M_{AB}(T) = M_{C_2 B}(id) \cdot M_{C_1 C_2}(T) \cdot M_{A C_1}(id)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Nota del Autor: Haber realizado cambio de bases supone realizar un desarrollo algebraico mucho más simple que haber hecho el cálculo directamente!...

$\rightarrow$ El control está diseñado para que así sea!