

Punto Ejercicios Extra:

P1] Nos piden encontrar la def. de T que en principio es desconocida

Recordar: Matriz Representante " M "
 $\hookrightarrow$ Nos "representa" T

De tal manera que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Si calculamos $M_{cc}(T)$ no será necesario codificar / decodificar

$M_{cc}(T)$] Dado $c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Procede encontrar T sobre la partida...

$\dot{c}$ $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$? $\dot{c}$ $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Aplicamos linealidad!

$$a) T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (a)+(b) \quad T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b) T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (a)-(b) \quad T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego codificar en la llegada c :

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$M_{cc}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} //$$

P2] • ¿Base y $\dim \text{Ker}(T_A)$? $T_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

→ Encontrar li dentro del generador

⇒ luego $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base del $\text{Ker}(T_A)$ con $\dim \text{Ker}(T_A) = 2$

• ¿Base y $\dim \text{Im}(T_A)$?

→ Sabemos que $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$

Entonces $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \text{Im}(T_A)$

Pero por TNI: $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Ker}(T_A) + \dim \text{Im}(T_A)$
 $3 = 2 + 1$

Como $\dim \text{Im}(T_A) = 1$, $\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ es base.

NOTA: Calcular primero la dimensión de $\text{Ker } T / \text{Im } T$ y luego usar TNI para hallar la dimensión del otro siempre es la mano.

1. ¿ T_A inyectiva y/o sobreyectiva?

↳ ¿inyectiva? → No! ($\dim \text{Ker}(T_A) = 2 \neq 0$)

↳ ¿sobreyectiva? → No! ($\dim \text{Im}(T_A) = 1 \neq 2$)

• Usamos como base conveniente:

$$\alpha = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{Ker } T_A} \cup \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{Im.}}$$

puesto que sabemos cómo actúa T_A sobre dichos vectores

Nos piden codificar un arbitrario en dicha base, es decir,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{a} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{b} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underline{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Encontremos los coeficientes a, b, c que nos permitan escribir el arbitrario en términos de la base α .
(TANTEO o SISTEMA LINEAL)

$$\rightarrow a = x \quad / \quad b = y - 2x \quad / \quad c = z - y + 2x$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (y - 2x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (z - y + 2x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, tal como dice el enunciado, aplicar la transformación

$$T_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T_A \left[x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (y - 2x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (z - y + 2x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Por linealidad:

$$T_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \underbrace{T_A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_0 + (y - 2x) \cdot \underbrace{T_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_0 + (z - y + 2x) \cdot \underbrace{T_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Entonces: Def T_A

$$T_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z - y + 2x \end{pmatrix}$$

Tomando

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se obtiene el resultado.

P3) Si bien la transformación " L " es desconocida, para encontrar $L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ nos podemos valer de la matriz representante $M_{\alpha\beta}(L)$ (α partida / β llegada)

- 1) Codificar $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en α
- 2) Aplicar " L " mediante $M_{\alpha\beta}(L)$
- 3) Decodificar en β

$$1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \underline{0} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \underline{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

luego $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ se codifica como $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en α

- 2) Aplicando $M_{\alpha\beta}(L)$

$$M_{\alpha\beta}(L) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 3) Decodificando en β :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underline{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underline{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} //$$

P4) Dado $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ considerando base

$$\beta = \{u_1, u_2\}$$

pdq. $M_{\beta\beta}(T) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow T(u_1) = \alpha u_1 \wedge T(u_2) = \beta u_2$

sol: Doble implicancia!

$\Leftarrow$ Aplicando el procedimiento para encontrar matriz representante.

$$T(u_1) = \alpha u_1 = \underline{\alpha} \cdot u_1 + \underline{0} \cdot u_2$$

$$T(u_2) = \beta u_2 = \underline{0} \cdot u_1 + \underline{\beta} \cdot u_2$$

luego $M_{\beta\beta}(T) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \checkmark$

$\Rightarrow$ Conociendo $M_{\beta\beta}(T)$ calculemos $T(u_1) \wedge T(u_2)$

1) Primero codificar u_1 / u_2 en β :

$$u_1 = \underline{1} u_1 + \underline{0} u_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \underline{0} u_1 + \underline{1} u_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) Aplicar $M_{\beta\beta}(T)$:

$$T(u_1) = M_{\beta\beta}(T) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(u_2) = M_{\beta\beta}(T) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

3) Decodificar en β

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\alpha} \cdot u_1 + \underline{0} u_2 = \alpha u_1 = T(u_1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \underline{0} \cdot u_1 + \underline{\beta} u_2 = \beta u_2 = T(u_2)$$

P5 | $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + 3y + 3z \\ x + 3y + 6z \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

• ¿Map(T)? (α partida / β llegada)

→ Aplicar T sobre α y codificar en β .

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underline{0} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underline{0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{0} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underline{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underline{0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{0} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underline{0} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underline{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore M_{\alpha\beta}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} //$$

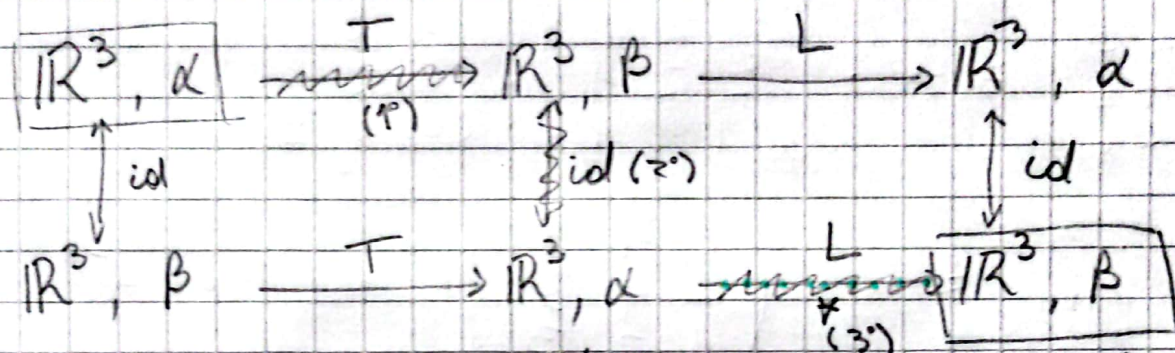
• ¿T invertible? → Sí, porque por tes.

T invertible $\Leftrightarrow M_{xx}(T)$ invertible

Y como la matriz que encontramos está escalonada y no tiene 0's en la diagonal, sigue que es invertible.

• ¿Map(L)? $L \circ T \rightarrow$ primero T, luego L

Nos dan como dato $C = \text{Map}(L \circ T)$, como aparece otra transformación dibujemos el diagrama extendido.



De lo anterior podemos ver que el problema nos pide encontrar *

y que la matriz $C = M_{\alpha\beta}(L \circ T)$ recorre el camino en compuesto de 3 subtramos...

$$C = \underset{\substack{\text{conocida} \\ \downarrow}}{*} \cdot \underset{\substack{\text{calculable} \\ \downarrow}}{[id]_{\beta\alpha}} \cdot \underset{\substack{\text{conocida} \\ \downarrow}}{M_{\alpha\beta}(T)}$$

Nota: Recordar que el orden de multiplicación importa (a la derecha los que actúan antes)

$$[id]_{\beta\alpha}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore [id]_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, dado $C = \star \cdot [id]_{\beta\alpha} \cdot M_{\alpha\beta}(T)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \star \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \star \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_A \quad / \cdot A^{-1}$$

$$\star = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$M_{\alpha\beta}(L) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3/2 & -2 & 5/2 \end{pmatrix} //$$

(Dejar expresado los productos si tienen poco tiempo)