

Pauta Tutoría 10

Resumen ::

Que sigan las transformaciones: **Valores y vectores propios**

Dada la transformación $T: V \rightarrow V$ decimos que $x \in V$ es un *vector propio* si:

- $x \neq 0$
- $\exists \lambda \in \mathbb{K}, T(x) = \lambda \cdot x$ (con λ el *valor propio* asociado a dicho vector)

Además, se define el *Espacio Propio* denotado típicamente por W_λ como todas las combinaciones lineales de los vectores propios asociados al valor propio λ .

Equivalencias útiles que nos ayudan a caracterizar lo anterior

A partir de la definición anterior, cuando trabajamos con $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ podemos deducir una serie de equivalencias que nos ayudan a comprender de mejor forma este nuevo contenido, asociándolo con cosas que ya hemos visto:

- $\exists x \neq 0$ tal que $[T(x) = Ax = \lambda x]$, luego como $[Ax = \lambda x] \iff [(A - \lambda I)x = 0]$ podemos entender los vectores propios como una *solución no trivial* de dicho sistema
- En base al lo anterior, como los vectores propios satisfacen dicho sistema podemos interpretar el espacio propio W_λ como el *kernel* de la transformación $T(x) = (A - \lambda I)x$
- Como $x = 0$ no es un vector propio se tiene que la matriz $A - \lambda I$ *NO ES INVERTIBLE*, de lo contrario se llega a una contradicción.

Return of the Jedi: Polinomios

Definido el determinante de una matriz $|A|$ como un coeficiente que nos ayuda a determinar características A se tienen las siguientes propiedades:

$$A \text{ es invertible} \iff |A| \neq 0 \quad A \text{ no es invertible} \iff |A| = 0$$

Como por resultado anterior llegamos a que si x es cumple con ser vector propio de λ la matriz $A - \lambda I$ no es invertible definimos el *polinomio característico* como:

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I|$$

Donde las raíces de dicho polinomio serán los valores propios asociados a la matriz A con las cuales podremos determinar los vectores propios al calcular el espacio propio $W_\lambda = \ker(A - \lambda I)$ con λ fijo.

Pl.-

[Inventando el Álgebra Lineal] En equipos encuentren el determinante, la traza y los valores/vectores propios asociados a las siguientes matrices, además de responder las preguntas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- ¿Existe relación entre determinate/traza de la matriz y su polinomio característico? (caso 2×2)
- Reemplazando un valor propio en $A - \lambda I$ aparece una fila de solo ceros, ¿Ocurrirá siempre eso? ¿Cómo se interpreta?
- ¿Existe en principio relación entre la multiplicidad algebraica “ n ” del valor propio y la dimensión del espacio propio “ m ”?

Indicación: Determinen los valores propios a partir del polinomio característico y luego encuentren el espacio propio asociado a cada valor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} \text{tr } A = 3 \\ \text{det } A = -4 \end{matrix}$$

→ Queremos encontrar valores y vectores propios

Sol: Polinomio Característico

Por resultado anterior, sabemos que si λ es valor propio, la matriz $(A - \lambda I)$ no es invertible

$$(A - \lambda I) \text{ no es invertible} \iff \det(A - \lambda I) = 0$$

Entonces, tenemos que buscar todos los λ que cumplen la condición anterior...

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Sigue que el polinomio característico asociado es:

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

Logrando evidenciar que para el caso $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr } A \lambda + \text{det } A$$

Ahora, para determinar λ , encontrar raíces $P_A(\lambda)$

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0$$

Por lo que los v.p. son 4 y -1

NOTA: La principal forma de poder factorizar los polinomios es recordar los productos notables

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

Luego, para encontrar los vectores propios evaluamos en el otro resultado del resumen

$$x \text{ es v.p.} \iff (A - \lambda I)x = 0$$

$$\lambda = 4 \mid \begin{pmatrix} 1-4 & 2 \\ 3 & 2-4 \end{pmatrix} x = 0 \longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & | & 0 \\ 3 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} -3 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} b \text{ libre} \\ a = \frac{2}{3}b \end{matrix}$$

$$\text{Reemplazando: } x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 b \\ b \end{pmatrix} = b \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{v.p.}}$$

Entonces el espacio propio asociado:

$$W_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Apareció una fila de ceros en $A - \lambda I$... ¿Es algo congruente con el desarrollo?

Sí! → Suprimos que $A - \lambda I$ no es invertible

✓ Ocurrirá siempre, es una señal de que los λ calculados son correctos ::

Análogamente para $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & | & 0 \\ 3 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-\frac{3}{2})} \begin{pmatrix} 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} b \text{ libre} \\ a = -b \end{matrix}$$

$$\text{Reemplazando: } x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix} = b \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{v.p.}}$$

$$\longrightarrow W_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

→ la relación final que se deduce es

$$\boxed{1 \leq m \leq n}$$

$$\rightarrow B = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} \text{tr } B = -7 \\ \det B = 6 \end{matrix}$$

$$\text{Luego } P_B(\lambda) = \lambda^2 + 7\lambda + 6 = (\lambda + 1)(\lambda + 6) = 0$$

con $\lambda = -1$ y $\lambda = -6$

$$\lambda = -6$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{12}(-4)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{matrix} b \text{ libre} \\ a = -b \end{matrix}$$

$$\text{Reemplazando: } x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ b \end{pmatrix} = b \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v} \cdot p}$$

$$\rightarrow W_{-6} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\lambda = -1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{12}(1)} \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{matrix} b \text{ libre} \\ a = \frac{b}{4} \end{matrix}$$

$$\text{Reemplazando: } x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b/4 \\ b \end{pmatrix} = b \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v} \cdot p}$$

$$\rightarrow W_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\rightarrow C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} \text{tr } C = 2 \\ \det C = 1 \end{matrix}$$

$$\text{Luego } P_C(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$$

con $\lambda = 1$ (multiplicidad 2)

$$\lambda = 1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{12}(2)} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{matrix} b \text{ libre} \\ a = -\frac{b}{2} \end{matrix}$$

$$\text{Reemplazando: } x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b/2 \\ b \end{pmatrix} = b \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v} \cdot p}$$

$$\rightarrow W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\rightarrow D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} \text{tr } D = 4 \\ \det D = 4 \end{matrix}$$

$$\text{Luego } P_D(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

con $\lambda = 2$ (multiplicidad 2)

$$\lambda = 2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow a \text{ libre, } b = 0$$

$$\text{Reemplazando: } x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v} \cdot p}$$

$$\rightarrow W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

P2.- [No asustarse] Calculen el determinante de las siguientes matrices

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cuando tenemos matrices que no son 2×2 el cálculo del determinante no es directo.

→ Descomponemos det. grandes en det. pequeños hasta recuperar los 2×2 .

1) llenamos matriz de $+/-$ intercalados:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a^+ & b^- & c^+ \\ d^- & e^+ & f^- \\ g^+ & h^- & i^+ \end{vmatrix}$$

2) Seleccionamos una fila o columna pivote:

$$\begin{vmatrix} a^+ & b^- & c^+ \\ d^- & e^+ & f^- \\ g^+ & h^- & i^+ \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a^+ & b^- & c^+ \\ d^- & e^+ & f^- \\ g^+ & h^- & i^+ \end{vmatrix}$$

3) Recorremos el pivote término a término y extraemos submatriz (respetando signos) pivote

$$\begin{vmatrix} a^+ & b^- & c^+ \\ d^- & e^+ & f^- \\ g^+ & h^- & i^+ \end{vmatrix} \rightsquigarrow (+a) \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a^+ & b^- & c^+ \\ d^- & e^+ & f^- \\ g^+ & h^- & i^+ \end{vmatrix} \rightsquigarrow (-b) \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a^+ & b^- & c^+ \\ d^- & e^+ & f^- \\ g^+ & h^- & i^+ \end{vmatrix} \rightsquigarrow (+c) \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

4) Sumar!

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = (+a) \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + (-b) \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + (+c) \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Notas:

- Se puede usar como pivote cualquier fila o columna, el resultado será igual
- Dado lo anterior siempre preferir las filas o columnas con más ceros
- Si la matriz es 4×4 se reduce primero a 3×3 mediante el mismo procedimiento, luego aplicar nuevamente sobre las 3×3 y así obtener 2×2 .

Sol: $\det E = 0$ / $\det F = -1$ / $\det G = 13$