TUTORÍA IX: SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES

15.1 Convergencia puntual y convergencia uniforme

Definición 15.2: Convergencia puntual (punto a punto)

Sea X un conjunto y $f_n : X \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones. Decimos que f_n converge *puntualmente* a $f : X \to \mathbb{R}$ si

$$\forall x \in X, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

En forma ε-formal:

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(x,\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definición 15.3: Convergencia uniforme

La sucesión $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge *uniformemente* a f en X si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall x \in X,\ n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

La diferencia clave es que n_0 no depende de x.

Ejemplo

Ejemplo: $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ en $X = [0, M]$.
Para todo $x \in [0, M]$, $|f_n(x) - 0| \leq M/n$. Dado $\varepsilon > 0$ tomamos $n_0 \geq M/\varepsilon$. Entonces $f_n \to 0$ uniformemente en $[0, M]$.

Ejemplo

Contraejemplo: $g_n(x) = x^n$ en $X = [0, 1]$.
Para cada $x \in [0, 1)$ tenemos $x^n \to 0$, y para $x = 1$, $x^n \to 1$. El límite puntual es

$$g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

No existe $n_0(\varepsilon)$ válido para todos x (puntos cercanos a 1 tardan arbitrariamente en acercarse), luego la convergencia no es uniforme.

Observación

Convergencia uniforme implica convergencia puntual, pero no al revés. La convergencia uniforme controla la velocidad de aproximación de f_n a f de forma *uniforme* en todo el dominio.

15.2 Teoremas que relacionan continuidad, integración y derivación

Teorema 15.4: Límite uniforme de funciones continuas

Si $f_n : X \to \mathbb{R}$ son continuas en X y $f_n \to f$ uniformemente en X, entonces f es continua en X.

Ejemplo

Uso práctico (contrarrecíproco).
Volvemos a $g_n(x) = x^n$ en $[0,1]$. Cada g_n es continua, el límite puntual g es discontinuo en $x = 1$. Por el teorema, la convergencia no puede ser uniforme.

Teorema 15.7: Intercambio de límite e integral

Si $f_n \to f$ uniformemente en $[a,b]$ y cada f_n es integrable, entonces f es integrable y

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ejemplo

Ejemplo (intercambio válido).
$f_n(x) = x/n$ en $[0,M]$. Convergencia uniforme a 0, y $\int_0^M x/n\,dx = M^2/(2n) \to 0 = \int_0^M 0\,dx$.

Teorema 15.8: Intercambio de límite y derivada

Supongamos f_n de clase $\mathcal{C}^1$ en $[a,b]$. Si $f_n'(x) \to g(x)$ uniformemente en $[a,b]$ y existe $c \in [a,b]$ tal que $f_n(c)$ converge, entonces $f_n \to f$ uniformemente (para alguna f) y $f'(x) = g(x)$.

Ejemplo

Contraejemplo (cuando falla): $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$ en $\mathbb{R}$.
Aquí $f_n \to 0$ uniformemente, pero $f_n'(x) = \cos(nx)$ no converge puntualmente (ni uniformemente). No se puede intercambiar en general si la convergencia de las derivadas no es uniforme.

15.3 Teorema de Dini y criterios de convergencia uniforme

Teorema 15.6: Teorema de Dini

Sea X compacto y $f_n : X \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas que converge puntualmente a f continua en X. Si f_n es monótona (es decir, $f_{n+1}(x) \le f_n(x)$ para todo x y todo n, o la desigualdad contraria), entonces la convergencia es uniforme.

Ejemplo

Ejemplo (aplicación de Dini).
$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$ en $X = [-1, 1]$.

- X es compacto y cada f_n es continua.
- $f_n(x) \downarrow |x|$ puntualmente y $f(x) = |x|$ es continua en $[-1, 1]$.

Por Dini, $f_n \to |x|$ uniformemente en $[-1, 1]$.

Ejemplo

Contraejemplo: $g_n(x) = x^n$ en $[0, 1]$.
Aunque g_n es monótona y el dominio es compacto, el límite g no es continuo (discontinuidad en $x = 1$), por lo que falla la hipótesis de continuidad del límite y Dini no se aplica.

15.4 Series de funciones y criterio de Weierstrass

Definición: Convergencia uniforme de series

Una serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ si las sumas parciales $S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x)$ convergen uniformemente a f.

Teorema 15.16: Criterio de Weierstrass (M-test)

Si existen $M_n \geq 0$ con $\sum M_n < \infty$ y $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo x y todo n, entonces $\sum f_n$ converge absolutamente y uniformemente.

Ejemplo

Ejemplo: Series de potencias para e^x: $f_n(x) = x^n/n!$ en $[-C, C]$. Tomando $M_n = C^n/n!$ y usando $\sum M_n = e^C$, por el M-test la serie converge uniformemente en $[-C, C]$.

15.5 Intercambio límite-integral: contraejemplo donde falla la uniformidad

Ejemplo

Contraejemplo (intercambio falla).
Sea $f_n(x) = nx^n(1 - x^n)$ en $[0, 1]$. Entonces $f_n(x) \to 0$ puntualmente en $[0, 1]$. No obstante

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \tfrac{1}{2} \neq 0.$$

Aquí la convergencia no es uniforme y por eso no se puede intercambiar límite e integral.

15.6 Ejercicios resueltos

Ejercicio 1. Considere $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$ en $[-1, 1]$.

a) Pruebe que f_n converge uniformemente.

b) Analice la convergencia de las derivadas $f_n'(x)$.

Solución.

(a) Para cada $x \in [-1, 1]$,

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{n^2}} \downarrow |x|$$

cuando $n \to \infty$. Observa que $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ para todo x. Además f es continua en $[-1, 1]$ y $[-1, 1]$ es compacto. Por el teorema de Dini la convergencia es uniforme.

(b) Calculemos la derivada:

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}}.$$

Para $x \neq 0$, $f_n'(x) \to \dfrac{x}{|x|} = \operatorname{sgn}(x)$. En $x = 0$, $f_n'(0) = 0$ para todo n, así que el límite puntual de f_n' no coincide con la derivada del límite $f(x) = |x|$ en $x = 0$ (la derivada de $|x|$ no existe en 0). Además la convergencia de f_n' no es uniforme en $[-1, 1]$ porque el comportamiento cerca de 0 impide una cota uniforme que funcione para todo x.

Ejercicio 2. Pruebe que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ converge puntualmente en $\mathbb{R}$ pero no uniformemente en todo $\mathbb{R}$.

Solución. Para $x \in \mathbb{R}$ fijo, la suma es una serie geométrica en la variable n con razón $r(x) = 1/(1 + x^2)$. Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \big(1 + x^2\big)^{-n} = x^2 \cdot \frac{1}{1 - (1+x^2)^{-1}} = x^2 \cdot \frac{1+x^2}{x^2} = 1 + x^2.$$

Así converge puntualmente para todo x. Para la falta de uniformidad, observe que el límite $1 + x^2$ crece sin acotación cuando $|x| \to \infty$; si la convergencia fuera uniforme en $\mathbb{R}$, las funciones parciales serían uniformemente acotadas por una banda alrededor del límite, lo cual contradice el crecimiento sin control. Por tanto, no hay convergencia uniforme en todo $\mathbb{R}$. (Más formal: fijar $\varepsilon = 1$ y observar que para x grande hace falta n enormemente grande para aproximar al límite dentro de ε.)

15.7 Ejercicios propuestos

1. Demuestre que si $f_n \to f$ uniformemente en un conjunto X y cada f_n es continua en X, entonces f es continua en X. (Usar el teorema 15.4.)
2. Mostrar que $g_n(x) = x^n$ converge uniformemente en $[0, a]$ para todo $a \in [0, 1)$ pero no en $[0, 1]$.
3. Analice la convergencia (puntual y uniforme) de $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx^2}$ en $\mathbb{R}$.
4. Sea $\sum f_n(x)$ una serie de funciones y suponga que existe $\sum M_n < \infty$ tal que $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo x. Pruebe que la serie converge uniformemente (M-test).
5. Considere $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$ en $[0, 2\pi]$. Discuta la posibilidad de intercambiar límite y derivada.