

TUTORÍA III: FRACCIONES PARCIALES

Fracciones Propias e Impropias

Definición 1

Se dice que una función racional

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

es una fracción propia si el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$.

Si el grado de $P(x)$ es mayor o igual al grado de $Q(x)$, la fracción se llama *impropia*.

Toda fracción impropia puede escribirse como

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{Q(x)}.$$

Nota: el grado de un polinomio corresponde al mayor exponente con coeficiente distinto de cero.

Ejemplo: División de polinomios

Realicemos la división

$$(x^3 + 2x^2 + 3) : (x^2 + 1).$$

$$x^3 + 2x^2 + 3 \div (x^2 + 1)$$

$$\frac{x^3}{x^2} = x$$

$$x(x^2 + 1) = x^3 + x$$

$$(x^3 + 2x^2 + 3) - (x^3 + x) = 2x^2 - x + 3$$

$$\frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$2(x^2 + 1) = 2x^2 + 2$$

$$(2x^2 - x + 3) - (2x^2 + 2) = -x + 1$$

Por lo tanto, el cociente y el resto son

$$\text{cociente} = x + 2, \quad \text{resto} = -x + 1.$$

Así,

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 3}{x^2 + 1} = x + 2 + \frac{-x + 1}{x^2 + 1}.$$

Comprobación:

$$(x + 2)(x^2 + 1) + (-x + 1) = x^3 + 2x^2 + x + 2 - x + 1 = x^3 + 2x^2 + 3.$$

Caso 1: Denominador con factores lineales distintos

Caso 1

Si

$$Q(x) = (a_1x + b_1) \cdots (a_kx + b_k)$$

con factores lineales distintos, entonces

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}.$$

Ejemplo

Calcular

$$\int \frac{7x + 3}{x^2 + 3x - 4} dx.$$

Factorizamos el denominador: $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$. Resolviendo se obtiene

$$\frac{7x + 3}{x^2 + 3x - 4} = \frac{5}{x + 4} + \frac{2}{x - 1}.$$

Entonces

$$\int \frac{7x + 3}{x^2 + 3x - 4} dx = 5 \ln |x + 4| + 2 \ln |x - 1| + C.$$

Caso 2: Denominador con factores lineales repetidos

Caso 2

Si $Q(x)$ tiene un factor lineal repetido $(ax + b)^k$, la descomposición incluye

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}.$$

Ejemplo

Calcular

$$\int \frac{5x^2 - 36x + 48}{x(x - 4)^2} dx.$$

Resolviendo se obtiene

$$\frac{5x^2 - 36x + 48}{x(x - 4)^2} = \frac{3}{x} + \frac{2}{x - 4} - \frac{4}{(x - 4)^2}.$$

Integrando:

$$3 \ln |x| + 2 \ln |x - 4| + \frac{4}{x - 4} + C.$$

Caso 3: Denominador con factores cuadráticos irreducibles distintos

Caso 3

Si $Q(x)$ contiene un factor cuadrático irreducible $ax^2 + bx + c$ (discriminante negativo), el término es

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}.$$

Ejemplo

Calcular

$$\int \frac{4x^2 - 8x + 1}{x^3 - x + 6} dx.$$

Se obtiene

$$\frac{4x^2 - 8x + 1}{x^3 - x + 6} = \frac{3}{x + 2} + \frac{x - 4}{x^2 - 2x + 3}.$$

La integral resulta

$$3 \ln |x + 2| + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 3) - \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

Caso 4: Denominador con factores cuadráticos irreducibles repetidos

Caso 4

Si aparece $(ax^2 + bx + c)^k$ repetido, se incluyen términos del tipo

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots.$$

Ejemplo

Calcular

$$\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} dx.$$

La descomposición es

$$\frac{1}{x} - \frac{x + 1}{x^2 + 1} + \frac{x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Integrando:

$$\ln |x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \arctan x - \frac{1}{2(x^2 + 1)} + C.$$

Caso 5: Cuando conviene dividir polinomios

Definición 2: División de polinomios

Cuando el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el de $Q(x)$, primero se realiza la *división de polinomios*:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{Q(x)}.$$

El cociente es un polinomio y el residuo tiene menor grado que $Q(x)$. *Nota: este paso permite reducir a una fracción propia antes de aplicar fracciones parciales.*

Ejemplo

Calcular

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1} dx.$$

Dividimos:

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1} = x + \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Por tanto

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1} dx = \int x dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2}x^2 + \arctan x + C.$$

Ejercicios (para la tutoría)

1. $\int \frac{7x + 3}{x^2 + 3x - 4} dx.$
2. $\int \frac{5x^2 - 36x + 48}{x(x - 4)^2} dx.$
3. $\int \frac{4x^2 - 8x + 1}{x^3 - x + 6} dx.$
4. $\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} dx.$
5. $\int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1} dx.$

Resolución de los ejercicios (desarrollo detallado)

Ejercicio 1

Calcular

$$\int \frac{7x + 3}{x^2 + 3x - 4} dx.$$

Paso 1: factorizar el denominador.

$$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1).$$

Paso 2: descomposición en fracciones parciales. Buscamos constantes A, B tales que

$$\frac{7x+3}{(x+4)(x-1)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-1}.$$

Multiplicando por $(x+4)(x-1)$:

$$7x+3 = A(x-1) + B(x+4).$$

Paso 3: encontrar A, B (método de sustitución — cover-up). Evaluamos en los ceros del denominador:

$$x = 1: \quad 7 \cdot 1 + 3 = 10 = A(0) + B(5) \implies B = 2.$$

$$x = -4: \quad 7(-4) + 3 = -28 + 3 = -25 = A(-5) \implies A = 5.$$

Paso 4: integrar término a término.

$$\int \frac{7x+3}{x^2+3x-4} dx = \int \left(\frac{5}{x+4} + \frac{2}{x-1} \right) dx = 5 \ln|x+4| + 2 \ln|x-1| + C.$$

Ejercicio 2

Calcular

$$\int \frac{5x^2 - 36x + 48}{x(x-4)^2} dx.$$

Paso 1: forma de la descomposición. Buscamos

$$\frac{5x^2 - 36x + 48}{x(x-4)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{(x-4)^2}.$$

Paso 2: multiplicar por el denominador común y comparar coeficientes.

$$5x^2 - 36x + 48 = A(x-4)^2 + Bx(x-4) + Cx.$$

Expandimos los términos del lado derecho:

$$A(x^2 - 8x + 16) + B(x^2 - 4x) + Cx = (A+B)x^2 + (-8A-4B+C)x + 16A.$$

Igualando coeficientes con el polinomio $5x^2 - 36x + 48$:

$$\begin{cases} A+B=5, \\ -8A-4B+C=-36, \\ 16A=48. \end{cases}$$

De $16A = 48$ resulta $A = 3$. Luego $B = 5 - A = 2$. Finalmente $-8(3) - 4(2) + C = -36 \implies -24 - 8 + C = -36 \implies C = -4$.

Paso 3: integrar.

$$\int \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x-4} - \frac{4}{(x-4)^2} \right) dx = 3 \ln|x| + 2 \ln|x-4| - 4 \int (x-4)^{-2} dx.$$

Como $\int (x-4)^{-2} dx = -(x-4)^{-1}$, se tiene

$$-4 \int (x-4)^{-2} dx = -4 \left(-\frac{1}{x-4} \right) = \frac{4}{x-4}.$$

Por tanto

$$\int \frac{5x^2 - 36x + 48}{x(x-4)^2} dx = 3 \ln|x| + 2 \ln|x-4| + \frac{4}{x-4} + C.$$

Ejercicio 3

Calcular

$$\int \frac{4x^2 - 8x + 1}{x^3 - x + 6} dx.$$

Paso 1: factorizar el denominador.

$$x^3 - x + 6 = (x + 2)(x^2 - 2x + 3).$$

Paso 2: descomposición Buscamos A, B, C tales que

$$\frac{4x^2 - 8x + 1}{(x + 2)(x^2 - 2x + 3)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 3}.$$

Multiplicando por el denominador común:

$$4x^2 - 8x + 1 = A(x^2 - 2x + 3) + (Bx + C)(x + 2).$$

Expandimos y juntamos coeficientes:

$$(A + B)x^2 + (-2A + 2B + C)x + (3A + 2C) = 4x^2 - 8x + 1.$$

Igualando coeficientes:

$$\begin{cases} A + B = 4, \\ -2A + 2B + C = -8, \\ 3A + 2C = 1. \end{cases}$$

Resolviendo (por ejemplo sustituyendo $B = 4 - A$):

$$-2A + 2(4 - A) + C = -8 \Rightarrow -2A + 8 - 2A + C = -8 \Rightarrow -4A + C = -16,$$

$$3A + 2C = 1.$$

De la primera $C = 4A - 16$. Sustituyendo en la segunda:

$$3A + 2(4A - 16) = 1 \Rightarrow 3A + 8A - 32 = 1 \Rightarrow 11A = 33 \Rightarrow A = 3.$$

Luego $B = 4 - A = 1$ y $C = 4A - 16 = 12 - 16 = -4$.*Paso 3: integrar.* Con la descomposición:

$$\int \left(\frac{3}{x + 2} + \frac{x - 4}{x^2 - 2x + 3} \right) dx.$$

Separa la segunda fracción:

$$\frac{x - 4}{x^2 - 2x + 3} = \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 3} - \frac{3}{x^2 - 2x + 3}.$$

Para la primera parte tomamos $u = x^2 - 2x + 3$, $du = (2x - 2)dx = 2(x - 1)dx$, por tanto

$$\int \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 3} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 3).$$

La segunda parte es de la forma $\int \frac{1}{(x-1)^2+2} dx$, ya que $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$. Entonces

$$\int \frac{1}{(x-1)^2+2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right).$$

Teniendo en cuenta el factor -3 , obtenemos:

$$\int \frac{x-4}{x^2-2x+3} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2-2x+3) - \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right).$$

Sumando la parte $3 \ln|x+2|$ llegamos a

$$\int \frac{4x^2-8x+1}{x^3-x+6} dx = 3 \ln|x+2| + \frac{1}{2} \ln(x^2-2x+3) - \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

Ejercicio 4

Calcular

$$\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} dx.$$

Paso 1: descomposición. Proponemos

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Multiplicando por $x(x^2+1)^2$ obtenemos la identidad polinómica

$$1-x+2x^2-x^3 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x.$$

Paso 2: expandir y comparar coeficientes. Al expandir los miembros derechos se agrupan los coeficientes por potencias de x y se obtiene el sistema

$$\begin{cases} A+B=0, \\ C=-1, \\ 2A+B+D=2, \\ C+E=-1, \\ A=1. \end{cases}$$

De $A=1$ resulta $B=-1$. De $C=-1$ y $C+E=-1$ se obtiene $E=0$. Finalmente $2A+B+D=2 \Rightarrow 2 \cdot 1 - 1 + D = 2 \Rightarrow D=1$. Así $A=1$, $B=-1$, $C=-1$, $D=1$, $E=0$.

Paso 3: integrar término a término. La descomposición queda

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

Integramos cada sumando:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x|. \\ \int -\frac{x+1}{x^2+1} dx &= -\int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx = -\frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \arctan x. \end{aligned}$$

$$\int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx \quad (\text{poner } u = x^2 + 1, \quad du = 2x dx) = \frac{1}{2} \int u^{-2} du = -\frac{1}{2(x^2 + 1)}.$$

Sumando:

$$\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2 + 1)^2} dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \arctan x - \frac{1}{2(x^2 + 1)} + C.$$

Ejercicio 5

Calcular

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1} dx.$$

Paso 1: división de polinomios (porque el numerador tiene mayor grado). Realizamos la división

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1} = \underbrace{x + 1}_{\text{cociente}} + \frac{\text{resto}}{x^2 + 1}.$$

Haciendo la división (o comprobando):

$$(x + 1)(x^2 + 1) = x^3 + x^2 + x + 1.$$

Restando del numerador:

$$(x^3 + x^2 + 1) - (x^3 + x^2 + x + 1) = -x.$$

Por tanto la expresión es

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1} = x + 1 - \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Paso 2: integrar término a término.

$$\begin{aligned} \int \left(x + 1 - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx &= \int x dx + \int 1 dx - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx. \\ \int x dx &= \frac{1}{2}x^2, \quad \int 1 dx = x, \quad \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1). \end{aligned}$$

Luego

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C.$$

Ejercicios propuestos (sin resolver)

1. $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} dx.$
2. $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx.$
3. $\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx.$
4. $\int \frac{3x^2 + 5x + 2}{(x^2 + 1)(x + 1)} dx.$
5. $\int \frac{x^4 + 2x^3 + 1}{x^2 + 1} dx.$