

Tutoría II: Integrales

Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema Fundamental del Cálculo

Sea f continua en $[a, b]$ y sea F una antiderivada de f , es decir $F'(x) = f(x)$. En notación diferencial se escribe $dF = f(x) dx$. Entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Además, si definimos $G(x) = \int_a^x f(t) dt$, entonces

$$\frac{d}{dx} G(x) = f(x) \implies \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x).$$

Este teorema vincula de forma explícita la derivación y la integración.

Álgebra de integrales

Las integrales satisfacen propiedades lineales que usamos de forma rutinaria:

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx, \quad \int c \cdot f(x) dx = c \int f(x) dx,$$

para cualquier constante c . Para integrales definidas:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx, \quad \int_a^b c \cdot f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

Estas reglas permiten separar sumandos y sacar constantes fuera de la integral.

Propiedades básicas de integrales definidas

Para una función continua f :

- Aditividad en intervalos:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

- Inversión de límites:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

- Integral de una constante:

$$\int_a^b c dx = c(b - a).$$

- Integral sobre intervalo nulo:

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Formulario de primitivas conocidas

Ejemplo

$$\begin{aligned}\int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, & (n \neq -1) \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + C, & (x \neq 0) \\ \int e^x dx &= e^x + C, \\ \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C, & (a > 0, a \neq 1) \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C, \\ \int \cos x dx &= \sin x + C.\end{aligned}$$

Método: sustitución (cambio de variable)

Sustitución

Si logras escribir la integral en la forma

$$\int f(g(x)) g'(x) dx,$$

puedes hacer el cambio $u = g(x)$, $du = g'(x) dx$, y transformar la integral en

$$\int f(u) du.$$

Una vez hallada la antiderivada en u , regresas a la variable original x y agregas la constante de integración.

Ejemplo

Ejemplo: calcular

$$\int 2x \cos(x^2) dx.$$

Elegimos $u = x^2$, entonces $du = 2x dx$. La integral se convierte en

$$\int \cos(u) du = \sin(u) + C = \sin(x^2) + C.$$

Sustituciones trigonométricas: ejemplos resueltos

Resumen

Para integrales con raíces usamos las sustituciones típicas

$$x = a \sin \theta, \quad x = a \tan \theta, \quad x = a \sec \theta,$$

según el patrón $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ y $\sqrt{x^2 - a^2}$ respectivamente. Hay que transformar dx y ajustar límites si la integral es definida.

Ejemplo

(Caso $\sqrt{a^2 - x^2}$) Resolver indefinida

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Sustituimos $x = a \sin \theta$. Entonces $dx = a \cos \theta d\theta$ y

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} = a \cos \theta.$$

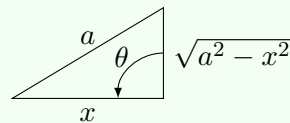
La integral pasa a

$$\int \frac{a \cos \theta d\theta}{a \cos \theta} = \int d\theta = \theta + C.$$

Volvemos a x usando $\theta = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$. Por lo tanto

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

Triángulo ilustrativo:



Integración por partes

Si $u = u(x)$ y $dv = v'(x) dx$, entonces la fórmula para integrales indefinidas es

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Para integrales definidas (con límites a y b):

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

Memotecnia: "un día vi una vaca vestida de uniforme". Cada palabra empieza con las letras que nos recuerdan el orden en la fórmula: "u" y "v" y el signo menos que invierte el orden.

Regla práctica para elegir u (HILATE): Hiperbólicas, Inv. trig., Log., Algebraicas, Trig., Exponenciales. Se elige u por la prioridad en esa lista.

Elección intuitiva con la imagen del "hilate": elegir la función que al derivar simplifica (hilar) el integrando).

Ejemplo

Ejemplo (primitiva): Calcular $\int x \ln x \, dx$.

Elegimos $u = \ln x$ (porque Log tiene prioridad en HILATE) y $dv = x \, dx$. Entonces $du = \frac{1}{x} dx$, $v = \frac{1}{2}x^2$. Aplicamos la fórmula:

$$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

Observación sobre la elección de u : usamos HILATE y la memotecnia "un día vi una vaca vestida de uniforme" para recordar la estructura de la fórmula.

Ejemplo (definida): Calcular $\int_1^e x \ln x \, dx$.

Usando la misma elección y la versión con límites:

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 \right]_1^e.$$

Evaluamos:

$$\left(\frac{1}{2}e^2 \cdot 1 - \frac{1}{4}e^2 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 - \frac{1}{4} \right) = \left(\frac{1}{4}e^2 \right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 1).$$

Ejercicios (para la tutoría)

1. $\int_1^e x \ln x \, dx$.
2. $\int_0^1 2x \cos(x^2) \, dx$.
3. $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.
4. $\int \sin(2x) \, dx$.

Resolución de los ejercicios

Ejercicio 1

Calcular $\int_1^e x \ln x \, dx$.

Elegimos $u = \ln x$, $dv = x \, dx$. Entonces $du = \frac{1}{x} dx$, $v = \frac{1}{2}x^2$. Aplicando integración por partes:

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 \right]_1^e = \frac{1}{4}(e^2 + 1).$$

Ejercicio 2

Calcular $\int_0^1 2x \cos(x^2) dx$.

Sustitución $u = x^2$, $du = 2x dx$, límites: $u(0) = 0$, $u(1) = 1$. La integral queda

$$\int_0^1 \cos(u) du = [\sin u]_0^1 = \sin 1.$$

Ejercicio 3

Calcular $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Sustitución $x = a \sin \theta$, $dx = a \cos \theta d\theta$. Límites: $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$, $x = a \Rightarrow \theta = \pi/2$:

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Ejercicio 4

Calcular $\int \sin(2x) dx$.

Sustitución $u = 2x$, $du = 2dx$, entonces

$$\int \sin(2x) dx = \frac{1}{2} \int \sin u du = -\frac{1}{2} \cos u + C = -\frac{1}{2} \cos(2x) + C.$$

Ejercicios propuestos

1. $\int e^x \cos x dx$.

2. $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx$.

3. $\int_0^1 x^2 \ln x dx$.