TUTORÍA XI: MÉTODOS DE SOLUCIÓN PARA ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

1. Ecuaciones diferenciales y soluciones

Definición: Ecuación diferencial de primer orden

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden (EDO) es una ecuación de la forma

$$y' = f(t, y),$$

donde la incógnita es una función $y = y(t)$ definida en un intervalo de $\mathbb{R}$ y f es una función dada.

Definición: Solución de una EDO

Una función $y : I \to \mathbb{R}$ de clase C^1 es una *solución* de la EDO

$$y' = f(t, y)$$

si satisface la igualdad para todo $t \in I$.

Ejemplo

Supongamos que se propone como solución la función

$$y(t) = e^{t^2}.$$

Queremos verificar si resuelve la ecuación

$$y' = 2ty.$$

Derivamos:

$$y'(t) = 2te^{t^2}.$$

Como $y(t) = e^{t^2}$, entonces

$$2te^{t^2} = 2t\, y(t),$$

por lo tanto $y' = 2ty$. La función propuesta es efectivamente solución.

2. Ecuaciones separables

Definición: Ecuación separable

Una EDO es *separable* si puede escribirse como

$$y' = f(t)\, g(y).$$

Método de separación de variables

Si $g(y) \neq 0$ en el intervalo considerado, reescribimos

$$\frac{1}{g(y)}\, y' = f(t).$$

Integrando respecto de t, y usando el cambio $u = y(t)$,

$$\int \frac{1}{g(u)}\, du = \int f(t)\, dt + C.$$

Denotando G y F primitivas, obtenemos la relación implícita

$$G(y) = F(t) + C.$$

Si G es invertible, entonces $y(t) = G^{-1}(F(t) + C)$.

Ejemplo

Resolver

$$y' = ty, \qquad y(0) = 1.$$

Separamos:

$$\frac{y'}{y} = t.$$

Integramos:

$$\int \frac{y'}{y}\, dt = \int t\, dt \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \frac{t^2}{2} + C.$$

Exponenciando:

$$y(t) = Ke^{t^2/2}, \qquad K = e^C.$$

Aplicamos la condición inicial $y(0) = 1$: $K = 1$. Solución:

$$y(t) = e^{t^2/2}.$$

3. Ecuaciones lineales de primer orden

Definición: Ecuación lineal de primer orden

Una EDO es *lineal* si tiene la forma

$$y' + a(t)y = b(t),$$

donde a, b son funciones de t.

Método del factor integrante (explicación detallada)

Queremos encontrar un factor $\mu(t)$ tal que, multiplicando la ecuación original por μ, el lado izquierdo pase a ser la derivada de un producto. Es decir, buscamos $\mu(t) > 0$ con la propiedad

$$\mu(t)(y' + a(t)y) = (\mu(t)y)'.$$

Calculando la derivada del producto,

$$(\mu y)' = \mu' y + \mu y'.$$

Para que esto coincida con $\mu y' + \mu a y$ necesitamos

$$\mu' y + \mu y' = \mu y' + \mu a y \quad \Longrightarrow \quad \mu' y = \mu a y.$$

Como esto debe valer para todas las y, se obtiene la ecuación escalar

$$\mu' = a(t)\mu.$$

Esta ecuación es separable; resolviéndola:

$$\frac{\mu'}{\mu} = a(t) \quad \Rightarrow \quad \ln \mu = \int a(t)\, dt + C_0.$$

Tomando la constante $C_0 = 0$ (cualquier constante escalar en μ se puede absorber más tarde), obtenemos

$$\mu(t) = \exp\Big(\int a(t)\, dt \Big).$$

Una vez obtenida μ, multiplicamos la EDO original y escribimos

$$(\mu y)' = \mu b,$$

integramos y despejamos

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \Big(\int \mu(t) b(t)\, dt + C \Big).$$

Ejemplo

Resolver

$$y' + 2y = e^{-t}.$$

Aquí $a(t) = 2$. Calculamos el factor integrante:

$$\mu(t) = \exp\Big(\int 2\,dt\Big) = e^{2t}.$$

Multiplicando la ecuación por μ:

$$e^{2t}y' + 2e^{2t}y = (e^{2t}y)' = e^{2t}e^{-t} = e^{t}.$$

Integrando:

$$e^{2t}y = \int e^{t}\,dt + C = e^{t} + C.$$

Despejando:

$$y(t) = e^{-t} + Ce^{-2t}.$$

4. Condiciones iniciales (PVI) y formas de resolverlas

Problema de valor inicial (PVI)

Un PVI para una EDO de primer orden especifica un par (t_0, y_0) y consiste en encontrar una solución $y(t)$ tal que

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Dos formas (prácticas) de imponer la condición inicial

Al resolver una EDO con condición inicial existen dos formas comunes de aplicar la condición:

1. **Usar límites en la integral (método de primitivas definidas).** Cuando se integra una igualdad $G(y(t))' = F'(t)$, es frecuente integrar desde t_0 hasta t y obtener

   $$G(y(t)) - G(y(t_0)) = F(t) - F(t_0).$$

   De este modo la constante C queda fijada automáticamente por la condición $y(t_0) = y_0$.

2. **Resolver la EDO en forma general y luego fijar la constante.** Primero se obtiene la solución general $y(t;C)$ (con una constante C). Luego se sustituye $t = t_0$ y $y = y_0$ para resolver la ecuación $y(t_0;C) = y_0$ y obtener C.

Ambos procedimientos son equivalentes; elegir uno u otro depende de qué forma de trabajo resulte más cómoda en el caso concreto.

Ejemplo

Ejemplo usando límites en la integral. Resolver

$$y' = ty, \qquad y(0) = 1.$$

Partimos de

$$\frac{y'}{y} = t.$$

Integramos $\int_0^t \frac{y'(s)}{y(s)}\,ds = \int_0^t s\,ds$. La izquierda es $\ln|y(t)| - \ln|y(0)|$. Con $y(0) = 1$,

$$\ln|y(t)| - \ln 1 = \frac{t^2}{2}.$$

Como $\ln 1 = 0$, $\ln|y(t)| = t^2/2$ y obtenemos $y(t) = e^{t^2/2}$. Aquí no apareció constante arbitraria C porque la fijamos con los límites.

Ejemplo

Ejemplo usando la constante y luego aplicando la condición. Resolver

$$y' + y = 1, \qquad y(0) = 2.$$

Resolvemos la EDO de forma general: $\mu = e^t$,

$$(e^t y)' = e^t \quad \Rightarrow \quad e^t y = e^t + C \quad \Rightarrow \quad y(t) = 1 + Ce^{-t}.$$

Aplicamos la condición $y(0) = 2$:

$$2 = 1 + Ce^0 \implies C = 1.$$

Solución particular:

$$y(t) = 1 + e^{-t}.$$

5. Ejercicios resueltos

Ejercicio 1. Resolver $y' = 3ty^2,\ y(0) = 1$.

Solución. Separa variables:

$$\frac{y'}{y^2} = 3t.$$

Integrando de 0 a t,

$$\int_1^{y(t)} \frac{du}{u^2} = \int_0^t 3s\,ds.$$

Izquierda: $-\frac{1}{y(t)} + 1$. Derecha: $\frac{3}{2}t^2$. Entonces

$$-\frac{1}{y(t)} + 1 = \frac{3}{2}t^2.$$

Despejando,

$$\frac{1}{y(t)} = 1 - \frac{3}{2}t^2 \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}t^2},$$

válida mientras el denominador sea distinto de cero (intervalo máximo de existencia hasta la primera singularidad).

Ejercicio 2. Resolver $y' + y = 1,\ y(0) = 0$.

Solución. Lineal con $a = 1, b = 1$. Factor integrante $\mu = e^t$.

$$(e^t y)' = e^t \implies e^t y = e^t + C.$$

Usamos $y(0) = 0$: $1 \cdot 0 = 1 + C \Rightarrow C = -1$. Por tanto

$$y(t) = 1 - e^{-t}.$$

Ejercicio 3. Resolver $y' = t^2 y^3,\ y(1) = 1$.

Solución. Separa variables:

$$\frac{y'}{y^3} = t^2.$$

Integrando desde 1 hasta t:

$$\int_1^{y(t)} u^{-3}\, du = \int_1^t s^2\, ds.$$

Izquierda: $\left[-\frac{1}{2}u^{-2}\right]_1^{y(t)} = -\frac{1}{2y(t)^2} + \frac{1}{2}$. Derecha: $\frac{1}{3}(t^3 - 1)$. Igualando:

$$-\frac{1}{2y(t)^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}(t^3 - 1).$$

Despejamos para $y(t)$:

$$\frac{1}{y(t)^2} = 1 - \frac{2}{3}(t^3 - 1) = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}t^3.$$

Finalmente,

$$y(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}t^3}}.$$

Como $y(1) = 1 > 0$, elegimos el signo positivo:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}t^3}}.$$

Dominios determinados por positividad del radicando.

Ejercicio 4. Resolver $y' - 3y = 6,\ y(0) = 2$.

Solución. Lineal con $a = -3$ (because equation in standard form is $y' + (-3)y = 6$). Factor integrante:

$$\mu(t) = e^{\int -3\,dt} = e^{-3t}.$$

Multiplicando:

$$(e^{-3t}y)' = 6e^{-3t}.$$

Integrando desde 0 a t:

$$e^{-3t}y(t) - e^0 y(0) = 6\int_0^t e^{-3s}\,ds.$$

Calculemos: $\int_0^t e^{-3s}ds = -\frac{1}{3}e^{-3s}\Big|_0^t = -\frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3}$. Entonces

$$e^{-3t}y(t) - 2 = 6\Big(-\tfrac{1}{3}e^{-3t} + \tfrac{1}{3}\Big) = -2e^{-3t} + 2.$$

De donde

$$e^{-3t}y(t) = -2e^{-3t} + 4.$$

Multiplicando por e^{3t}:

$$y(t) = -2 + 4e^{3t}.$$

(Verificar: en $t = 0$, $y(0) = -2 + 4 = 2$, consistente.)

Ejercicio 5. Verificar si $y(t) = \dfrac{1}{1+t}$ satisface $y' = -y^2$.

Solución. Derivamos:

$$y'(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}.$$

Calculamos la derecha:

$$-y(t)^2 = -\frac{1}{(1+t)^2}.$$

Coinciden para todo $t \neq -1$. Por tanto la función es solución en cualquier intervalo que no incluya $t = -1$.

Ejercicio 6. Resolver $y' + 2y = t,\ y(0) = 0$.

Solución. Lineal con $a = 2, b = t$. Factor integrante $\mu = e^{2t}$.

$$(e^{2t}y)' = te^{2t}.$$

Integramos por partes la integral $\int te^{2t}dt$. Tomemos $u = t,\ dv = e^{2t}dt$. Entonces $du = dt,\ v = \frac{1}{2}e^{2t}$.

$$\int te^{2t}dt = \frac{t}{2}e^{2t} - \int \frac{1}{2}e^{2t}dt = \frac{t}{2}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} + C.$$

Por tanto

$$e^{2t}y = \frac{t}{2}e^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} + C.$$

Dividiendo por e^{2t},

$$y(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + Ce^{-2t}.$$

Aplicando $y(0) = 0$:

$$0 = 0 - \frac{1}{4} + C \implies C = \frac{1}{4}.$$

Solución final:

$$y(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t}.$$

6. Ejercicios propuestos

1. Resolver $y' = y(1-t)$.
2. Resolver $y' + 4y = e^{-2t}$.
3. Resolver $y' = t^2y^3$.
4. Resolver $y' - 3y = 6$.
5. Verificar si $y(t) = \frac{1}{1+t}$ satisface $y' = -y^2$.
6. Resolver el problema de valor inicial $y' + 2y = t,\ y(0) = 0$.