TUTORÍA X: SERIES DE POTENCIA Y SERIES DE TAYLOR

16.1 Definición y radio de convergencia

Definición 16.1: Serie de potencias

Sea $a \in \mathbb{R}$. Una *serie de potencias* centrada en a es una serie de funciones

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n,$$

donde $(c_n)_{n\geq 0}$ es una sucesión real de coeficientes. El *dominio de convergencia* es el conjunto de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie converge.

Radio de convergencia (Teorema)

Para toda serie de potencias existe un número $R \in [0, \infty]$ (el *radio de convergencia*) tal que:

- la serie converge absolutamente para $|x-a| < R$;
- la serie diverge para $|x-a| > R$;
- en los puntos x con $|x-a| = R$ la convergencia debe estudiarse caso a caso.

Además, R se puede calcular por las fórmulas

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \qquad \text{o} \qquad R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

cuando el segundo límite existe.

Ejemplo

Ejemplo (factorial): $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Aquí $\sqrt[n]{1/n!} \to 0$, luego $1/R = 0$ y $R = +\infty$. La serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo

Ejemplo (geométrica): $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Criterio de la razón: $|x| < 1$ es la condición de convergencia; el radio es $R = 1$. La suma es $\frac{1}{1-x}$ cuando $|x| < 1$.

Ejemplo

Ejemplo (caso puntual): $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$. Si $x \neq 0$, los términos no tienden a cero (crecen muy rápido), por tanto la serie solo converge en $x = 0$: $R = 0$.

Propiedades útiles

- Si $0 \leq r < R$ entonces la serie converge uniformemente en $[a-r, a+r]$.
- El dominio de convergencia es un intervalo simétrico alrededor de a: $(a-R, a+R)$ (con posible inclusión o exclusión de los extremos).

16.2 Operaciones término a término: derivación e integración

Teorema 16.2: Derivación término a término

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$$

converge en $(a-R, a+R)$ (mismo radio) y coincide con $f'(x)$. Es decir, se puede derivar término a término dentro del intervalo de convergencia.

Teorema 16.3: Integración término a término

Con las mismas hipótesis, para cualquier x en $(a-R, a+R)$,

$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1},$$

y la serie resultante tiene el mismo radio de convergencia R.

Ejemplo

Ejemplo: Partiendo de $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ para $|x| < 1$,

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1.$$

También, integrando de 0 a x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x), \qquad |x| < 1.$$

Ejemplo

Observación importante (uniformidad local): En todo subintervalo compacto contenido en $(a-R, a+R)$ la derivación e integración término a término son uniformemente válidas.

16.3 Series de Taylor y funciones analíticas

Definición 16.4: Serie de Taylor

Sea f infinitamente diferenciable en un entorno de a. Su *serie de Taylor* centrada en a es

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Si existe un $R > 0$ tal que para $|x-a| < R$ se cumple $f(x) = T_f(x)$, decimos que f es *real-analítica* (o admite desarrollo en serie de potencias) en a.

Resto de Taylor (forma de Lagrange)

El resto de orden n para f alrededor de a queda

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

para algún ξ entre a y x. Si $r_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$ para cada x del entorno, entonces $f(x) = T_f(x)$ allí.

Ejemplo

Ejemplo (condición práctica): Si existen $K > 0$ y un entorno donde $|f^{(n)}(t)| \leq K$ para todo n, entonces por el término factorial en el denominador $r_n(x) \to 0$ y f coincide con su serie de Taylor (criterio de derivadas acotadas).

Ejemplo

Contraejemplo (función C^∞ no analítica): La función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

tiene todas las derivadas en 0 iguales a 0, luego su serie de Taylor en 0 es identicamente 0, pero $f(x) \neq 0$ para $x \neq 0$. Así f no es analítica en 0.

16.4 Series de Taylor clásicas (presentadas claramente)

Series fundamentales (todas centradas en 0)

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1.$
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1,\ x > -1.$
- $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \le 1,\ x \neq \pm i.$

Ejemplo

Notas prácticas:

- Para $\exp, \sin, \cos$ el radio es $R = +\infty$ (series convergen en todo $\mathbb{R}$).
- Para $\frac{1}{1-x}$ y $\ln(1+x)$ el radio es $R = 1$.
- $\arctan x$ tiene radio $R = 1$ y converge condicionalmente en $x = \pm 1$ (puntos tratados con alternancia).

Ejemplo

Ejemplo (usar series para aproximar): Para e^x,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

Para $x = 0{,}5$ la suma de los primeros cuatro términos ya da excelente precisión.

16.5 Propiedades útiles y corolarios

- **Linealidad:** suma y multiplicación por escalares funcionan término a término en intervalos de convergencia comunes.

- **Producto Cauchy:** el producto de dos series de potencias centradas en a se puede obtener mediante la convolución de sus coeficientes en el radio de convergencia común.
- **Coeficientes y derivadas:** si $f(x) = \sum a_n(x-a)^n$ entonces $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Ejercicios solucionados (detallados)

Ejercicio resuelto 1. Calcule el radio de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} x^n$.

Solución. Usamos la raíz:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{n^2}{3^n}\right|} = \frac{n^{2/n}}{3} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}.$$

Entonces $1/R = 1/3$ y $R = 3$. (Alternativamente usar la razón: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1/3$.)

Ejercicio resuelto 2. Determine la serie de Taylor de $\sin x$ centrada en 0 hasta orden 5 y estime el error para $|x| \leq 0{,}5$.

Solución. Derivadas en 0: $\sin^{(0)}(0) = 0,\ \sin'(0) = 1,\ \sin''(0) = 0,\ \sin^{(3)}(0) = -1,\ \sin^{(4)}(0) = 0,\ \sin^{(5)}(0) = 1$.

La serie hasta orden 5:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Resto en forma de Lagrange: para algún ξ entre 0 y x,

$$r_5(x) = \frac{\sin^{(6)}(\xi)}{6!} x^6.$$

Como $|\sin^{(6)}(\xi)| \leq 1$, $|r_5(x)| \leq \dfrac{|x|^6}{6!}$. Para $|x| \leq 0{,}5$,

$$|r_5(x)| \leq \frac{0{,}5^6}{720} \approx 6{,}0 \times 10^{-6}.$$

Ejercicio resuelto 3. Exprese $\ln(1+x)$ como serie (justificación breve).

Solución. Para $|x| < 1$, considerar la derivada:

$$\frac{d}{dx}\ln(1+x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Integrando término a término desde 0 hasta x,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n},$$

válido para $|x| < 1$ (y por extensión condicional en $x = 1$ con suma alternante).

Ejercicios propuestos

1. Calcule el radio de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$.
2. Determine la serie de Taylor de e^x centrada en 0 hasta orden 6 y estime el error para $|x| \leq 1$.
3. Halle la expansión en serie de $\arctan x$ y determine su radio de convergencia.
4. Obtenga la serie de Taylor (centrada en 0) de $\dfrac{1}{1+x^2}$. Discuta el radio de convergencia.
5. Indique para qué valores de x converge $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. ¿Es uniforme en $\mathbb{R}$? ¿En $[-1, 1]$?
6. (Desafío) Sea $f(x) = e^{-1/x^2}$ con $f(0) = 0$. Calcule las derivadas en 0 y explique por qué la serie de Taylor en 0 no representa a f salvo en $x = 0$.
7. (Aplicación) Usa las series truncadas (polinomios de Taylor) para aproximar $\sin(0{,}7)$ con error menor a 10^{-4}. ¿Qué orden necesitas?