# Pauta Tutoría Examen Moderna

**P1)** a) Se tiene que, a pesar de que todos los electrones tienen inicialmente la misma energía, no todos terminan con la misma energía después de la colisión. Uno primero pensaría que es por que 2 electrones impactan con el mismo átomo, de esa manera es posible explicar las diferentes velocidades (pues $\Delta E_{12} \neq \Delta E_{23}$), o también, que 1 electrón impacta con 2 átomos diferentes. Sin embargo, se indica que 1 electrón impacta con 1 átomo. Luego, si se recuerda el principio de incertidumbre $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$, la energía que absorben los electrones del hidrógeno no es exacta según la ecuación dada en el enunciado, existiendo incertidumbre relacionada directamente con el tiempo de vida del estado excitado. Respecto de este último, se nos indica que es pequeño, por lo que

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t}$$

es grande con $\Delta t$ pequeño (grande a escala atómica). Luego, como $\Delta E$ no es chico, ciertos átomos absorberán más energía que otros, por lo que ciertos electrones tendrán más energía que otros (i.e. más velocidad)

b) Se nos dice que

$$\Delta E = 10^{-6}\, eV = 1{,}6 \cdot 10^{-25}\, J$$

Luego, usando que $\Delta E \Delta t = \frac{\hbar}{2}$ (caso crítico).

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\hbar}{2\Delta E} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}/2\pi}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-25}} \Leftrightarrow \boxed{\Delta t \simeq 3{,}29 \cdot 10^{-10}\, s}$$

P2) a) Para que $\psi(x)$ dado sea función de onda válida, debe cumplir la condición de normalización

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1 \quad / \ |\psi|^2 = \psi^2 = \frac{1}{\alpha + x^2}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\alpha + x^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + \frac{x^2}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx/\sqrt{\alpha}}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)^2} = 1 \quad / \ u = \frac{x}{\sqrt{\alpha}} \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1 + u^2}}_{\arctan(u)\big|_{-\infty}^{\infty}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\alpha} = \underbrace{\arctan(\infty)}_{\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\arctan(-\infty)}_{-\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} = \pi \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \pi^2}$$

b) Sea $E$ la energía, según la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x) \Leftrightarrow U(x) = E + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

Calculando $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ $\left(\psi(x) = (x^2+\pi^2)^{-1/2}\right)$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left((x^2+\pi^2)^{-1/2}\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+\pi^2)^{-3/2}\cdot\cancel{2}x\right)$$

$$= -\left[x\frac{d}{dx}(x^2+\pi^2)^{-3/2} + (x^2+\pi^2)^{-3/2}\cancelto{1}{\frac{d}{dx}x}\right]$$

$$= -\left[x\cdot -\frac{3}{\cancel{2}}(x^2+\pi^2)^{-5/2}\cdot\cancel{2}x + (x^2+\pi^2)^{-3/2}\right]$$

$$= \frac{3x^2}{(x^2+\pi^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2+\pi^2)^{3/2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{3x^2}{\sqrt{x^2+\pi^2}\,(x^2+\pi^2)^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2+\pi^2}\,(x^2+\pi^2)}$$

Sustituyendo

$$U(x) = E + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi(x)}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E + \frac{\hbar^2}{2m}\cdot\cancel{\sqrt{x^2+\pi^2}}\left(\frac{3x^2}{\cancel{\sqrt{x^2+\pi^2}}\,(x^2+\pi^2)^2} - \frac{1}{\cancel{\sqrt{x^2+\pi^2}}\,(x^2+\pi^2)}\right)$$

$$\boxed{\Leftrightarrow U(x) = E + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{2x^2-\pi^2}{(x^2+\pi^2)^2}}$$

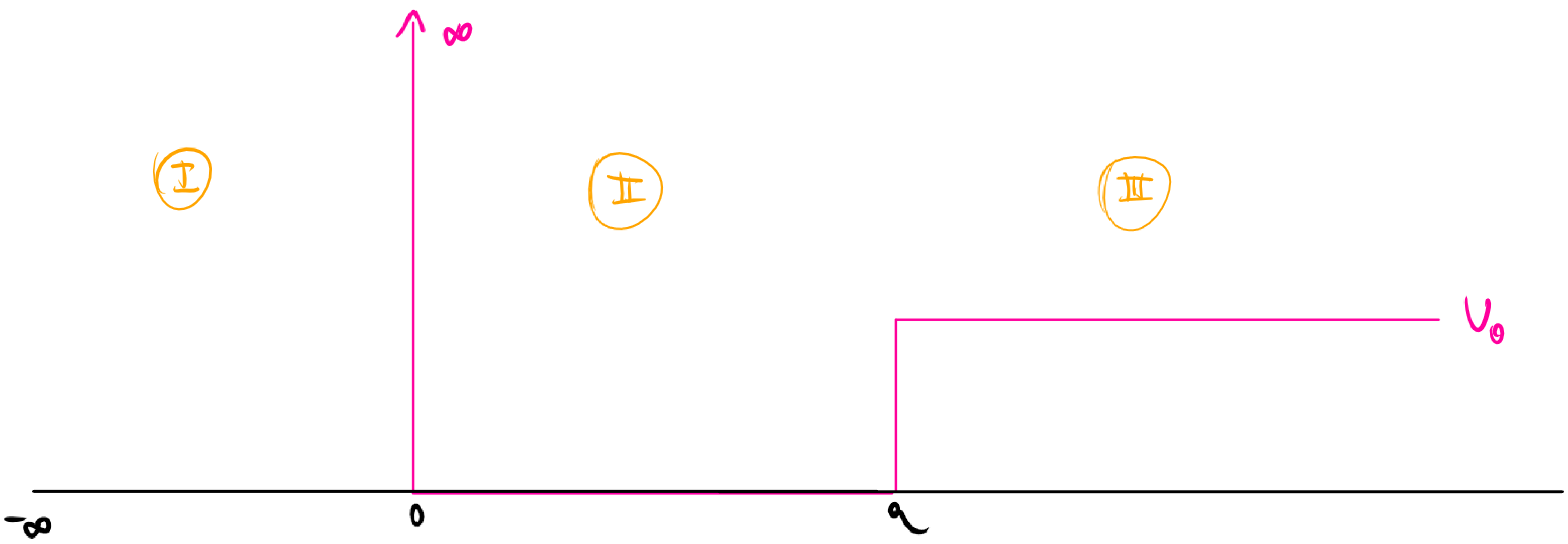
c) Usando que $P(x_1,x_2) = \int_{x_1}^{x_2} |\psi|^2 dx$

$$\Rightarrow P(-\pi,\pi) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{\pi^2+x^2} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\pi}\right)^2} = \frac{1}{\pi}\int_{x=-\pi}^{x=\pi}\frac{dx/\pi}{1+\left(\frac{x}{\pi}\right)^2} \Big/ \; u=\frac{x}{\pi} \Rightarrow du = \frac{dx}{\pi}$$

$$\Leftrightarrow P(-\pi,\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{u=-1}^{u=1}\frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\pi}\left[\arctan(1) - \arctan(-1)\right] = \frac{2}{\pi}\cancelto{\frac{\pi}{4}}{\arctan(1)}$$

$$\Leftrightarrow P(-\pi,\pi) = \frac{2}{\cancel{\pi}}\cdot\frac{\cancel{\pi}}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{P(-\pi,\pi) = \frac{1}{2}}$$

P3] El potencial que se nos presenta es el sgte.




Se identifican las 3 zonas indicadas en la figura. Luego, como en I $V=\infty$, la partícula no estará en esa zona, luego

$$\psi(x)=0 \quad , \quad x\in(-\infty,0).$$

Luego, analizando la zona II mediante la ecuación de Schrödinger con $V=0$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_{II}}{dx^2}=E\psi_{II}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\psi_{II}}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_{II}=0 \quad / \quad \frac{2mE}{\hbar}\triangleq k_1^2 \text{, EDO del MAS!}$$

$$\Rightarrow \psi_{II}(x)=A\cos(k_1x)+B\sin(k_1x)$$

Finalmente, la zona III, con $V=V_0>E$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_{III}}{dx^2}+V_0\psi_{III}=E\psi_{III}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\psi_{III}}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)\psi_{III}=0$$

Aquí resulta tentador usar la misma solución que antes, ya que la EDO tiene la misma forma. Sin embargo, $E - V_0 < 0$, por lo que la solución ya no corresponde a la combinación lineal de cos y sen. Reescribiendo

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)\psi_{II} = 0 \overset{k_2^2 \triangleq \frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)}{\Longleftrightarrow} \frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} - k_2^2\psi_{II} = 0$$

Similar a porqué, en MAS, llegar a $\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0$ era incorrecto. Luego, la solución a esta ecuación diferencial corresponde a una combinación lineal de exponenciales:

$$\Rightarrow \psi_{III}(x) = Ce^{-k_2 x} + De^{k_2 x}$$

Así, la función de onda del sistema es

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & , \; x < 0 \rightarrow \psi_I \\ A\cos(k_1 x) + B\,\mathrm{sen}(k_1 x) & , \; 0 < x < a \rightarrow \psi_{II} \\ Ce^{-k_2 x} + De^{k_2 x} & , \; x > a \rightarrow \psi_{III} \end{cases}$$

Donde las ctes. A, B, C y D deben ser determinadas. En primer lugar, notamos que D debe ser 0 para que se cumpla la condición de normalización $\left( \int_a^\infty e^x = \infty \right)$. Por otro lado, la función de onda debe de ser continua y suave, por lo que se debe cumplir que

(*) $\psi_I(0) = \psi_{II}(0)$

(**) $\psi_{II}(a) = \psi_{III}(a)$

$$\left.\frac{d\psi_{II}}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{d\psi_{III}}{dx}\right|_{x=a}$$

Viendo primero (*)

$$\psi_I(0)=0 \rightarrow \psi_{II}(0) = A\cos(0)+B\sin(0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow A=0$$

$$\therefore \quad \psi_{II}(x) = B\sin(k_1 x)$$

Luego, viendo (**)

$$\psi_{II}(a) = \psi_{III}(a) \Leftrightarrow B\sin(k_1 a) = Ce^{-k_2 a}$$ / Recordar que D=0

$$\left.\frac{d\psi_{II}}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{d\psi_{III}}{dx}\right|_{x=a} \Leftrightarrow Bk_1\cos(k_1 a) = -Ck_2 e^{-k_2 a}$$

Esto, junto con la condición de normalización, permite encontrar $\psi(x)$ en todo el espacio. No se hará pues no se pide (y es demasiada matraca u.u).

Dividiendo ambas expresiones (recordar que buscamos una condición para E)

$$\rightarrow \frac{\cancel{B}\sin(k_1 a)}{\cancel{B}k_1\cos(k_1 a)} = \frac{\cancel{C}\cancel{e^{-k_2 a}}}{-\cancel{C}k_2\cancel{e^{-k_2 a}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k_1}\tan(k_1 a) = \frac{1}{k_2}$$ / $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$

$$\Leftrightarrow \tan\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\right) = \frac{\frac{\sqrt{\cancel{2m}E}}{\cancel{\hbar}}}{\frac{\sqrt{\cancel{2m}(V_0-E)}}{\cancel{\hbar}}}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \tan\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\right) = \sqrt{\frac{E}{V_0-E}}}$$ → E debe satisfacer esta expresión!