

Módulo 4 – Genética Cuantitativa

Estimación por Modelo Animal y BLUP

Tutor: Bastián Fernández S.

Best Linear Unbiased Prediction (BLUP)



BLUP

La ecuación original en notación matricial corresponde a:

$$\begin{bmatrix} V & X \\ X' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ZGM \\ K \end{bmatrix} \quad \text{Solución} \rightarrow \hat{u} = GZ'V^{-1}(y - Xb^0)$$

PROBLEMA

Invertir la matriz de (co)varianzas fenotípicas (V) resulta extremadamente demandante

“El Dr. Henderson demostró que las soluciones anteriores pueden ser obtenidas conjuntamente a través de un sistema de ecuaciones conocido como **ecuaciones de los modelos mixtos de Henderson**”:

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

Modelo Animal Aditivo

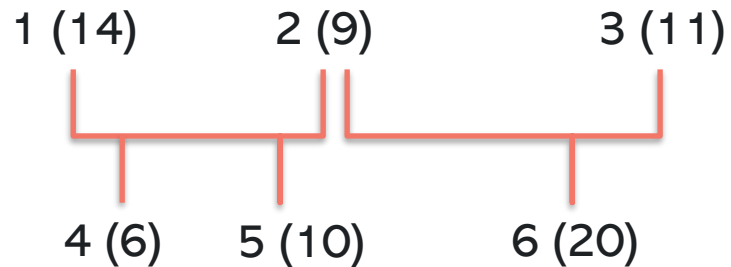
Modelo que describe el valor fenotípico de los animales en base al nivel de los animales (o efecto animal)

Estimando a través del Método BLUP



Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo



ID	Padre	Madre	Año	Peso al destete
1	?	?	2000	14
2	?	?	2000	9
3	?	?	2000	11
4	2	1	2001	6
5	2	1	2001	10
6	2	3	2001	20

Año
2000

2001

Es posible explicar cada observación (medición fenotípica) a través del siguiente modelo:

$$y_i = \mu + a_i + e_i$$

Donde:

y_i es la medición fenotípica del individuo i

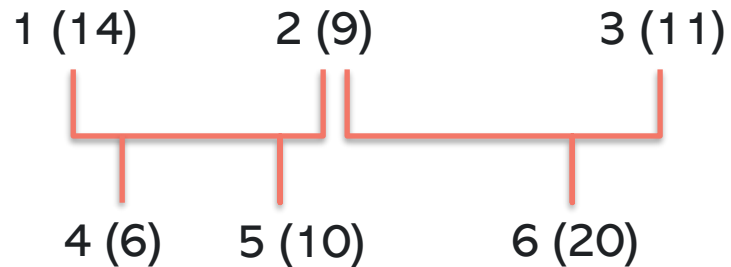
μ representa todos los efectos fijos (ej. factores ambientales de variación)

a_i representa el efecto animal o efectos genético-aditivos

e_i representa los efectos residuales generada por efectos no incluidos en el modelo ("error")

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo



ID	Padre	Madre	Año	Peso al destete
1	?	?	2000	14
2	?	?	2000	9
3	?	?	2000	11
4	2	1	2001	6
5	2	1	2001	10
6	2	3	2001	20

Año
2000

2001

Este mismo modelo en notación matricial:

$$y = Xb + Za + e$$

Donde:

y es el vector de las observaciones (fenotipo)

b es el vector de los efectos fijos (factores ambientales)

a es el vector de los efectos aleatorios (genético-aditivos)

e es el vector de los efectos residuales (aleatorios)

X y Z son las matrices de incidencia, a través de las cuales son asociados los efectos fijos y aleatorios, respectivamente, a cada una de las observaciones

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo



Este mismo modelo en notación matricial:

$$y = Xb + Za + e$$

Donde:

y es el vector de las observaciones (fenotipo)

b es el vector de los efectos fijos (factores ambientales)

a es el vector de los efectos aleatorios (genético-aditivos)

e es el vector de los efectos residuales (aleatorios)

X y Z son las matrices de incidencia, a través de las cuales son asociados los efectos fijos y aleatorios, respectivamente, a cada una de las observaciones

$$\begin{bmatrix} 14 \\ 9 \\ 11 \\ 6 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{u} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix}$$

Se deben determinar efectos fijos y aleatorios al mismo tiempo

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 14 \\ 9 \\ 11 \\ 6 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{u} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix}$$

Se utilizan las ecuaciones de los modelos mixtos de Henderson:

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

También como:

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 14 \\ 9 \\ 11 \\ 6 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 14 \\ 9 \\ 11 \\ 6 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{u} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix}$$

Se utilizan las ecuaciones de los modelos mixtos de Henderson:

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

También como:

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

TRANSPOSICIÓN

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Z' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

Matriz de parentesco

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 1 & 0,5 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0,5 & 1 & 0,25 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0,25 & 0,25 & 1 \end{bmatrix}$$

ID	Padre	Madre
1	?	?
2	?	?
3	?	?
4	2	1
5	2	1
6	2	3

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0,5	0,5	0
2	0	1	0	0,5	0,5	0,5
3	0	0	1	0	0	0,5
4	0,5	0,5	0	1	0,5	0,25
5	0,5	0,5	0	0,5	1	0,25
6	0	0,5	0,5	0,25	0,25	1

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + \boxed{A^{-1}\lambda} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

Matriz de parentesco

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2,5 & 0,5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0,5 & 1,5 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 1 & 0,5 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0,5 & 1 & 0,25 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0,25 & 0,25 & 1 \end{bmatrix}$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2,5 & 0,5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0,5 & 1,5 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 1 & 0,5 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0,5 & 1 & 0,25 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0,25 & 0,25 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_a^2}$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2,5 & 0,5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0,5 & 1,5 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 1 & 0,5 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0,5 & 1 & 0,25 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0,25 & 0,25 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_a^2} = \frac{\frac{\sigma_e^2}{\sigma_p^2}}{\frac{\sigma_a^2}{\sigma_p^2}} = \frac{e^2}{h^2} = \frac{1 - h^2}{h^2}$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2,5 & 0,5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0,5 & 1,5 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 1 & 0,5 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0,5 & 1 & 0,25 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0,25 & 0,25 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \frac{1 - h^2}{h^2} = \frac{1 - 0,5}{0,5} = 1$$

$$h^2 = 0,5$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 1$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2,5 & 0,5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0,5 & 1,5 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}\lambda = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2,5 & 0,5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0,5 & 1,5 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} * 1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2,5 & 0,5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0,5 & 1,5 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 6$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$X'Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ \boxed{Z'X} & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$Z'X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & \boxed{Z'Z} + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$Z'Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & \boxed{Z'Z + A^{-1}\lambda} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$Z'Z + A^{-1}\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2,5 & 0,5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0,5 & 1,5 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3,5 & 0,5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0,5 & 2,5 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$X'Y = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 14 \\ 9 \\ 11 \\ 6 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} = 70$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$Z'Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 9 \\ 11 \\ 6 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 9 \\ 11 \\ 6 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$X'X = 6$$

$$X'Z = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$X'Y = 70$$

$$Z'X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Z'Z + A^{-1}\lambda = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3,5 & 0,5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0,5 & 2,5 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Z'Y = \begin{bmatrix} 14 \\ 9 \\ 11 \\ 6 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3,5 & 0,5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0,5 & 2,5 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 70 \\ 14 \\ 9 \\ 11 \\ 6 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$X'X = 6$$

$$X'Z = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$X'Y = 70$$

$$Z'X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Z'Z + A^{-1}\lambda = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3,5 & 0,5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0,5 & 2,5 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Z'Y = \begin{bmatrix} 14 \\ 9 \\ 11 \\ 6 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3,5 & 0,5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0,5 & 2,5 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 70 \\ 14 \\ 9 \\ 11 \\ 6 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

222	-137	-151	-125	-170	-170	-166
413	413	413	413	413	413	413
-137	265	69	79	157	157	95
413	413	413	413	413	413	413
-151	69	272	72	164	164	165
413	413	413	413	413	413	413
-125	79	72	262	92	92	153
413	413	413	413	413	413	413
-170	157	164	92	904	491	142
413	413	413	413	413	413	413
-170	157	164	92	491	904	142
413	413	413	413	413	413	413
-166	95	165	153	142	142	299
413	413	413	413	413	413	413

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$X'X = 6$$

$$X'Z = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$X'Y = 70$$

$$Z'X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Z'Z + A^{-1}\lambda = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3,5 & 0,5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0,5 & 2,5 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Z'Y = \begin{bmatrix} 14 \\ 9 \\ 11 \\ 6 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3,5 & 0,5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0,5 & 2,5 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 70 \\ 14 \\ 9 \\ 11 \\ 6 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,54 & -0,33 & -0,37 & -0,3 & -0,41 & -0,41 & -0,4 \\ -0,33 & 0,64 & 0,17 & 0,19 & 0,38 & 0,38 & 0,23 \\ -0,37 & 0,17 & 0,66 & 0,17 & 0,4 & 0,4 & 0,4 \\ -0,3 & 0,19 & 0,17 & 0,63 & 0,22 & 0,22 & 0,37 \\ -0,41 & 0,38 & 0,4 & 0,22 & 0,73 & 0,4 & 0,34 \\ -0,41 & 0,38 & 0,4 & 0,22 & 0,4 & 0,73 & 0,34 \\ -0,4 & 0,23 & 0,4 & 0,37 & 0,4 & 0,34 & 0,72 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 \\ 14 \\ 9 \\ 11 \\ 6 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$X'X = 6$$

$$X'Z = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$X'Y = 70$$

$$Z'X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Z'Z + A^{-1}\lambda = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3,5 & 0,5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0,5 & 2,5 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Z'Y = \begin{bmatrix} 14 \\ 9 \\ 11 \\ 6 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,74 \\ 0,05 \\ -1,07 \\ 1,01 \\ -2,25 \\ -0,92 \\ 2,74 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$X'X = 6$$

$$X'Z = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$X'Y = 70$$

$$Z'X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Z'Z + A^{-1}\lambda = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3,5 & 0,5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0,5 & 2,5 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Z'Y = \begin{bmatrix} 14 \\ 9 \\ 11 \\ 6 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,54 & -0,33 & -0,37 & -0,3 & -0,41 & -0,41 & -0,4 \\ -0,33 & 0,64 & 0,17 & 0,19 & 0,38 & 0,38 & 0,23 \\ -0,37 & 0,17 & 0,66 & 0,17 & 0,4 & 0,4 & 0,4 \\ -0,3 & 0,19 & 0,17 & 0,63 & 0,22 & 0,22 & 0,37 \\ -0,41 & 0,38 & 0,4 & 0,22 & 0,73 & 0,4 & 0,34 \\ -0,41 & 0,38 & 0,4 & 0,22 & 0,4 & 0,73 & 0,34 \\ -0,4 & 0,23 & 0,4 & 0,37 & 0,4 & 0,34 & 0,72 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70 \\ 14 \\ 9 \\ 11 \\ 6 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u} = 11,74 \\ \hat{a}_1 = 0,05 \\ \hat{a}_2 = -1,07 \\ \hat{a}_3 = 1,01 \\ \hat{a}_4 = -2,25 \\ \hat{a}_5 = -0,92 \\ \hat{a}_6 = 2,74 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$X'X = 6$$

$$Z'X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X'Z = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$Z'Z + A^{-1}\lambda = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3,5 & 0,5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0,5 & 2,5 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = 70$$

$$Z'Y = \begin{bmatrix} 14 \\ 9 \\ 11 \\ 6 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

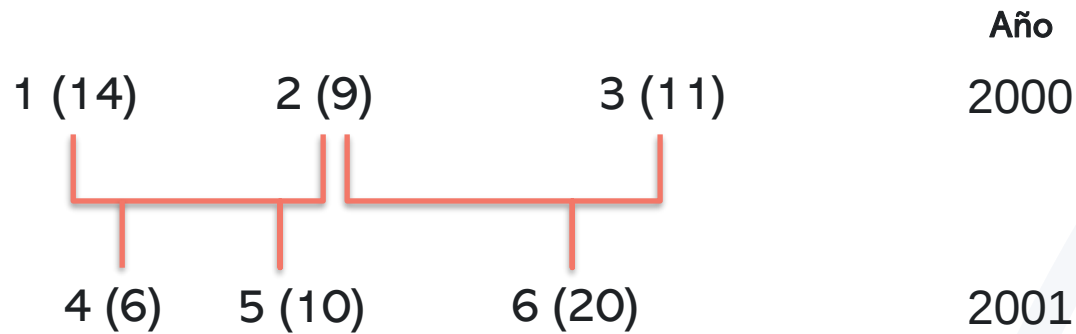
$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3,5 & 0,5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0,5 & 2,5 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{a}_5 \\ \hat{a}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 14 \\ 9 \\ 11 \\ 6 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$6\hat{u} + \hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_4 + \hat{a}_5 + \hat{a}_6 = 70$$

$$\hat{u} + 3\hat{a}_1 + \hat{a}_2 - \hat{a}_4 - \hat{a}_5 = 14$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo



ID	Padre	Madre	Año	Peso al destete	Valor aditivo
1	?	?	2000	14	$\hat{a}_1 = 0,05$
2	?	?	2000	9	$\hat{a}_2 = -1,07$
3	?	?	2000	11	$\hat{a}_3 = 1,01$
4	2	1	2001	6	$\hat{a}_4 = -2,25$
5	2	1	2001	10	$\hat{a}_5 = -0,92$
6	2	3	2001	20	$\hat{a}_6 = 2,74$

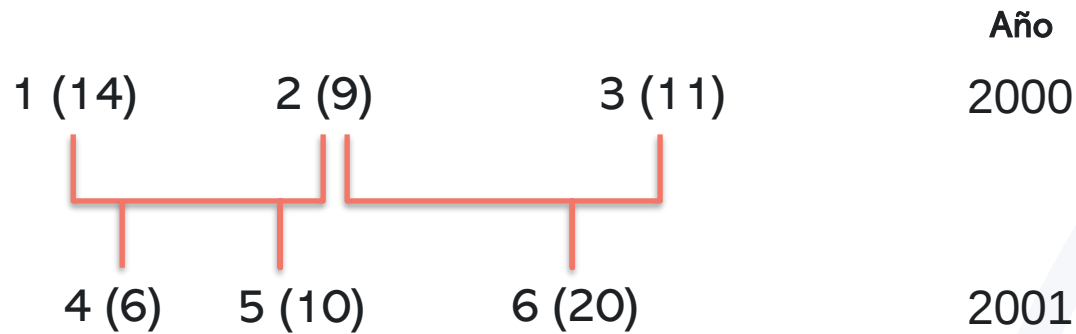
$$\bar{X}_{A_0} = \frac{0,05 - 1,07 + 1,01}{3}$$

$$\bar{X}_{A_0} = \frac{-0,01}{3}$$

$$\bar{X}_{A_0} = 0$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo



ID	Padre	Madre	Año	Peso al destete	Valor aditivo
1	?	?	2000	14	$\hat{a}_1 = 0,05$
2	?	?	2000	9	$\hat{a}_2 = -1,07$
3	?	?	2000	11	$\hat{a}_3 = 1,01$
4	2	1	2001	6	$\hat{a}_4 = -2,25$
5	2	1	2001	10	$\hat{a}_5 = -0,92$
6	2	3	2001	20	$\hat{a}_6 = 2,74$

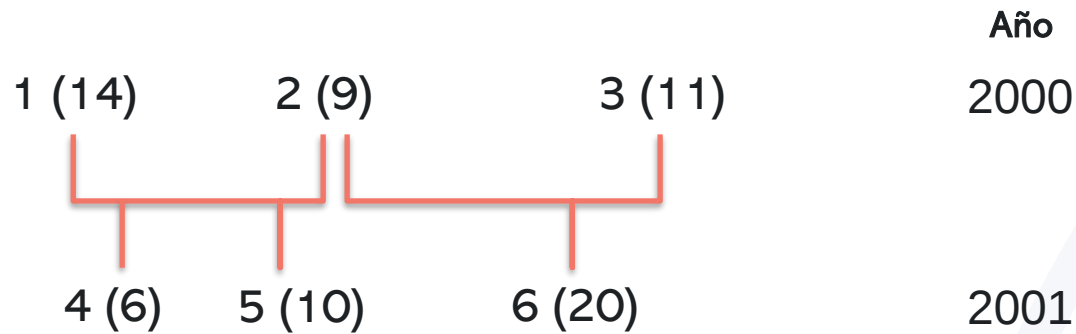
$$\bar{X}_{A_1} = \frac{-2,25 - 0,92 + 2,74}{3}$$

$$\bar{X}_{A_1} = \frac{-0,43}{3}$$

$$\bar{X}_{A_1} = -0,14$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo



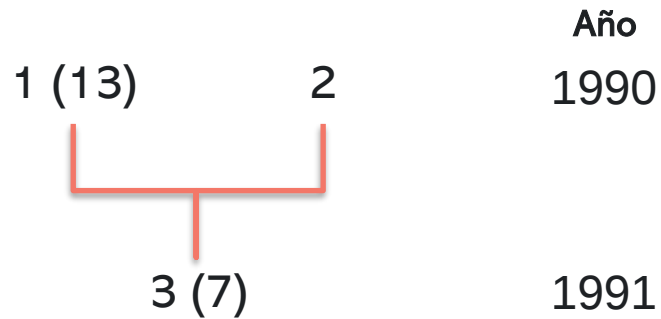
ID	Padre	Madre	Año	Peso al destete	Valor aditivo
1	?	?	2000	14	$\hat{a}_1 = 0,05$
2	?	?	2000	9	$\hat{a}_2 = -1,07$
3	?	?	2000	11	$\hat{a}_3 = 1,01$
4	2	1	2001	6	$\hat{a}_4 = -2,25$
5	2	1	2001	10	$\hat{a}_5 = -0,92$
6	2	3	2001	20	$\hat{a}_6 = 2,74$

Generación	Promedio Valor Aditivo
G_0	0
G_1	-0,14

Ejercicio 1

Ejemplo

Con la siguiente información estime los valores aditivos de cada individuo por método BLUP.



ID	Padre	Madre	Año	Peso al destete
1	?	?	1990	13
2	?	?	1990	7
3	1	2	1991	?

$$h^2 = 0,7$$

$$y = Xb + Za + e$$

Donde:

y es el vector de las observaciones (fenotipo)

b es el vector de los efectos fijos (factores ambientales)

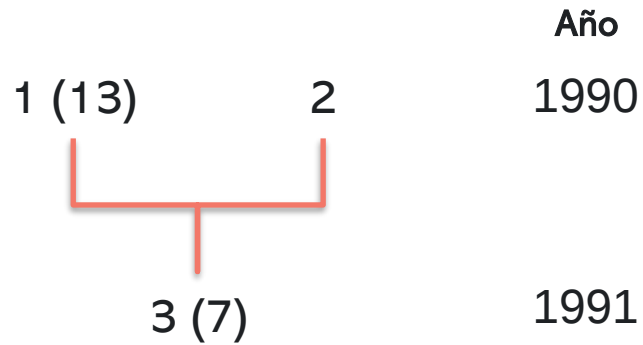
a es el vector de los efectos aleatorios (genético-aditivos)

e es el vector de los efectos residuales (aleatorios)

X y Z son las matrices de incidencia, a través de las cuales son asociados los efectos fijos y aleatorios, respectivamente, a cada una de las observaciones

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo



Este mismo modelo en notación matricial:

$$y = Xb + Za + e$$

Donde:

y es el vector de las observaciones (fenotipo)

b es el vector de los efectos fijos (factores ambientales)

a es el vector de los efectos aleatorios (genético-aditivos)

e es el vector de los efectos residuales (aleatorios)

X y Z son las matrices de incidencia, a través de las cuales son asociados los efectos fijos y aleatorios, respectivamente, a cada una de las observaciones

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [\hat{u}] + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [\hat{u}] + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

Se utilizan las ecuaciones de los modelos mixtos de Henderson:

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

También como:

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [\hat{u}] + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

Se utilizan las ecuaciones de los modelos mixtos de Henderson:

$$\begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

También como:

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

TRANSPOSICIÓN

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ID	Padre	Madre
1	?	?
2	?	?
3	1	2

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

Matriz de parentesco

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

	?-?	?-?	1-2
	1	2	3
1	1	0	0,5
2	0	1	0,5
3	0,5	0,5	1

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + \boxed{A^{-1}\lambda} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

Matriz de parentesco

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_3 = f_3 - \frac{1}{2}f_1$$



Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + \boxed{A^{-1}\lambda} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

Matriz de parentesco

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,5 & -0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_3 = f_3 - \frac{1}{2}f_2$$



Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + \boxed{A^{-1}\lambda} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

Matriz de parentesco

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,5 & -0,5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$F_3 = f_3 * 2$$



Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + \boxed{A^{-1}\lambda} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

Matriz de parentesco

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,5 & 0,5 & -1 \\ 0,5 & 1,5 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = f_1 - \frac{1}{2}f_3$$

$$F_2 = f_2 - \frac{1}{2}f_3$$



Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + \boxed{A^{-1}\lambda} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

↓
Matriz de parentesco

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1,5 & 0,5 & -1 \\ 0,5 & 1,5 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1,5 & 0,5 & -1 \\ 0,5 & 1,5 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \frac{1 - h^2}{h^2} = \frac{1 - 0,7}{0,7} = 0,43$$

$$h^2 = 0,7$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 0,43$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1,5 & 0,5 & -1 \\ 0,5 & 1,5 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}\lambda = \begin{bmatrix} 1,5 & 0,5 & -1 \\ 0,5 & 1,5 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} * 0,43 = \begin{bmatrix} 0,65 & 0,22 & -0,43 \\ 0,22 & 0,65 & -0,43 \\ -0,43 & -0,43 & 0,86 \end{bmatrix}$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$X'Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ \boxed{Z'X} & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$Z'X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & \boxed{Z'Z} + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$Z'Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & \boxed{Z'Z + A^{-1}\lambda} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$Z'Z + A^{-1}\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,65 & 0,22 & -0,43 \\ 0,22 & 0,65 & -0,43 \\ -0,43 & -0,43 & 0,86 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,65 & 0,22 & -0,43 \\ 0,22 & 0,65 & -0,43 \\ -0,43 & -0,43 & 1,86 \end{bmatrix}$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$X'Y = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \end{bmatrix} = 20$$

Estimación a través del Método BLUP

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$Z'Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$X'X = 2$$

$$X'Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = 20$$

$$Z'X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Z'Z + A^{-1}\lambda = \begin{bmatrix} 1,65 & 0,22 & -0,43 \\ 0,22 & 0,65 & -0,43 \\ -0,43 & -0,43 & 1,86 \end{bmatrix}$$

$$Z'Y = \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1,65 & 0,22 & -0,43 \\ 0 & 0,22 & 0,65 & -0,43 \\ 1 & -0,43 & -0,43 & 1,86 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 20 \\ 13 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$X'X = 2$$

$$X'Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = 20$$

$$Z'X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Z'Z + A^{-1}\lambda = \begin{bmatrix} 1,65 & 0,22 & -0,43 \\ 0,22 & 0,65 & -0,43 \\ -0,43 & -0,43 & 1,86 \end{bmatrix}$$

$$Z'Y = \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1,65 & 0,22 & -0,43 \\ 0 & 0,22 & 0,65 & -0,43 \\ 1 & -0,43 & -0,43 & 1,86 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 20 \\ 13 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,22 & -1,72 & -0,55 & -1,72 \\ -1,72 & 1,99 & 0,29 & 1,45 \\ -0,55 & 0,29 & 1,99 & 0,82 \\ -1,72 & 1,45 & 0,82 & 1,99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 13 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

$$X'X = 2$$

$$X'Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = 20$$

$$Z'X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Z'Z + A^{-1}\lambda = \begin{bmatrix} 1,65 & 0,22 & -0,43 \\ 0,22 & 0,65 & -0,43 \\ -0,43 & -0,43 & 1,86 \end{bmatrix}$$

$$Z'Y = \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1,61 \\ -1,61 \\ -1,62 \end{bmatrix}$$



Ecuaciones importantes

Modelo Animal Aditivo (en notación matricial)

$$y = Xb + Za + e$$

Donde:

y es el vector de las observaciones (fenotipo)

b es el vector de los efectos fijos (factores ambientales)

a es el vector de los efectos aleatorios (genético-aditivos)

e es el vector de los efectos residuales (aleatorios)

X y Z son las matrices de incidencia, a través de las cuales son asociados los efectos fijos y aleatorios, respectivamente, a cada una de las observaciones

Ecuaciones de los modelos mixtos de Henderson

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'X & X'Z \\ Z'X & Z'Z + A^{-1}\lambda \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'Y \\ Z'Y \end{bmatrix}$$

Donde:

$\hat{u}$ es el vector de los efectos fijos estimados

$\hat{a}$ es el vector de los efectos genético-aditivos predichos

X y Z son las matrices de incidencia, a través de las cuales son asociados los efectos fijos y aleatorios, respectivamente, a cada una de las observaciones

Y es el vector de las observaciones (fenotipo)

A es la matriz de parentesco

λ equivale a una relación entre la varianza de los efectos residuales (σ_e^2) y la varianza genético-aditiva (σ_a^2)