

¿Qué es una integral?

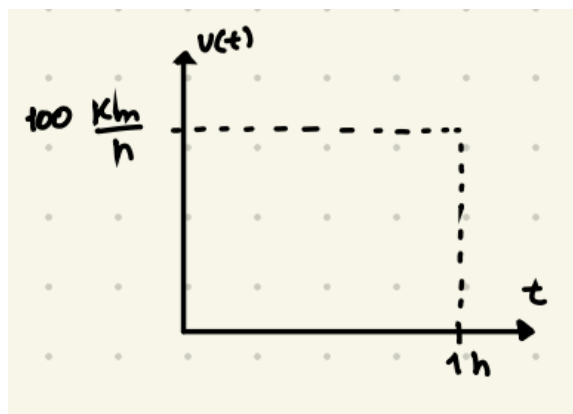
Se puede entender una integral como la función que tengo que derivar para que me dé la función original. Otra forma de entender lo que es una integral, es bajo el concepto "el área bajo la curva", durante esta sesión profundizaremos en esta definición y su significado.

En esta materia encontraremos una relación con lo ya visto en cálculo diferencial (derivadas, optimización, máximos, mínimos, etc.)

Ejemplo

v es la velocidad de un vehículo que se mueve a velocidad constante, por una ruta plana y recta. Velocidad a medida que el tiempo cambia no cambia, es constante

¿Qué distancia recorrió ese vehículo en una hora? Usando la lógica, se puede razonar que recorreremos 100 km en una hora



- Usando conocimientos de geometría, es posible calcular el área graficada

$$A = \text{base} \cdot \text{altura}$$

- Usando los datos graficados según el contexto

$$A = 1h \cdot 100 \frac{\text{km}}{h}$$

- Cancelando las unidades físicas

$$A = 1 \cancel{h} \cdot 100 \frac{\text{km}}{\cancel{h}}$$

$$A = 1 \cdot 100\text{km}$$

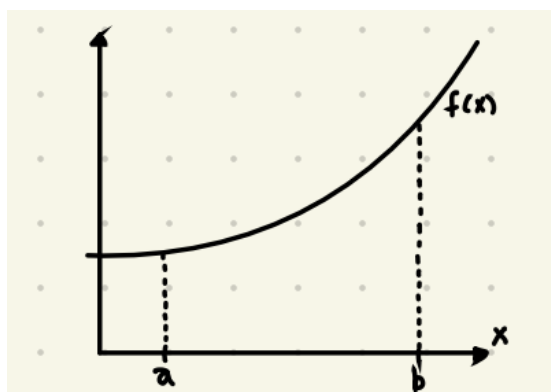
$$A = 100\text{km}$$

Tenemos que el área está con unidades de distancia, coincidiendo con lo que habíamos planteado según el razonamiento lógico, 100 kilómetros.

El concepto de calcular de manera matemática el área bajo la curva, mediante alguna figura geométrica, es la base del cálculo integral. Ya sea una función constante, "fácil" de encontrar su área mediante geometría, o ya sea una función que va cambiando, y por lo tanto, más "compleja", de igual forma en ambas, encontrando el área bajo la curva en el intervalo de tiempo que nos interesa, coincidirá con la distancia recorrida por el vehículo en ese intervalo de tiempo.

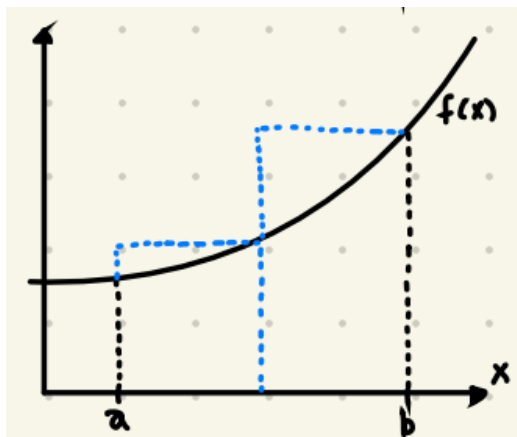
Suma de Riemann

¿De qué forma podemos aproximar el área bajo la curva de a hasta b ?

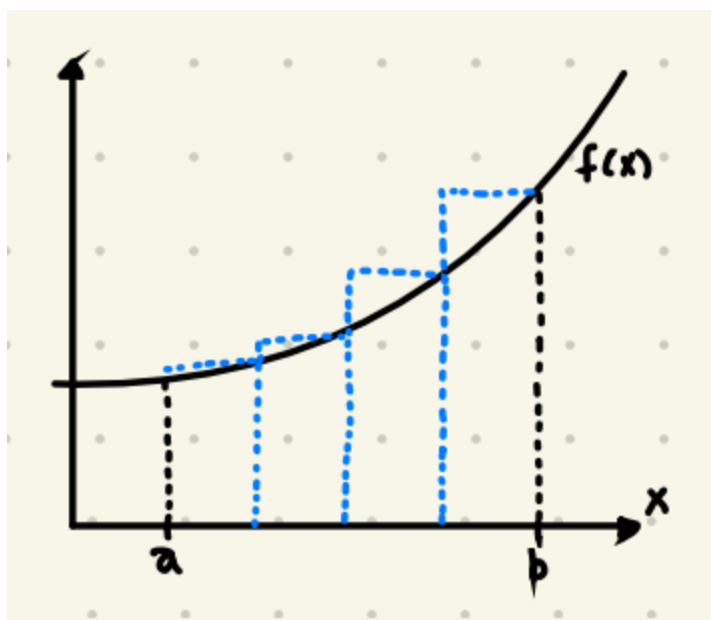


Una opción es usar un solo rectángulo usando la base de ab , y, como altura el valor de la derecha de b . Aunque sea un cálculo bastante pobre, sigue siendo una aproximación

Otra aproximación puede ser partir el intervalo en dos, y sumar el área de los dos rectángulos, donde el primer rectángulo va desde a hasta la mitad y la altura tomando la derecha

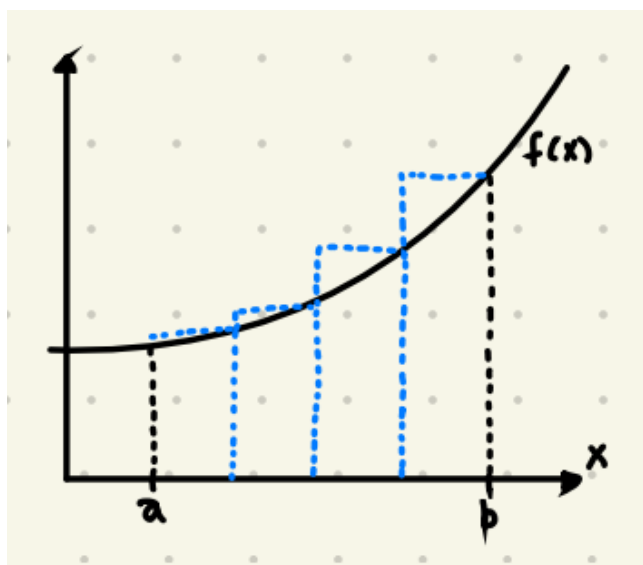


Otra opción, es partirlo en 4



Es importante entender que para poder encontrar la altura (de los rectángulos de interés) basta con evaluar la función conocida por lo que podemos evaluarla en el x que queremos

Esta idea de partir el intervalo general en una cierta cantidad, e ir sumando el área de cada uno de esos rectángulos es lo que se llama **Suma de Riemann**



Aquí el intervalo general tiene longitud $b - a$

Si lo partimos en 4

$$\frac{b - a}{4}$$

O si decidimos partirlo en n

$$\frac{b - a}{n}$$

Tenemos que cada base de cada rectángulo es

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Y la altura es la función evaluada en un x determinado

$$f(x_i)$$

- Tenemos que x_i es un valor dentro del intervalo i esimo

Podemos tener n intervalos y con i identificar en cual estoy

Con esta idea podemos calcular el área del rectángulo i -ésimo

$$\Delta x \cdot f(x_i)$$

Si sumamos cada intervalo tenemos:

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^n \Delta x \cdot f(x_i)$$

- Esto es una aproximación al área exacta bajo la curva $\tilde{A}$

Por consiguiente, podemos deducir que mientras mayor sea n , mayores particiones estoy haciendo al intervalo original y más se aproxima al área verdadera

El área exacta se podrá calcular cuando el límite cuando n se hace muy grande en $\tilde{A}$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x \cdot f(x_i)$$

Esto es una forma de calcular de manera exacta el área de esta función de a hasta b

Definición integral definida

$$f(x) \quad [a, b]$$

Dada una función de variable real, continua en el intervalo cerrado a b , **se define como integral definida entre a y b :**

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x \cdot f(x_i)$$

Para la notación de integral se escribe una S alargada (puesto que es una suma) desde a hasta b , ya que estamos encontrando el área desde a hasta b de $f(x)dx$ (o diferencial de x)

$$\int_a^b f(x)dx$$

- Se dice que, si el límite el existe, es decir, si se puede encontrar el área haciendo esta cuenta, entonces la función $f(x)$ es integrable en este intervalo $[a, b]$, bien siendo continua en ab o tener discontinuidades finitas

$$\int_a^b f(x)dx$$

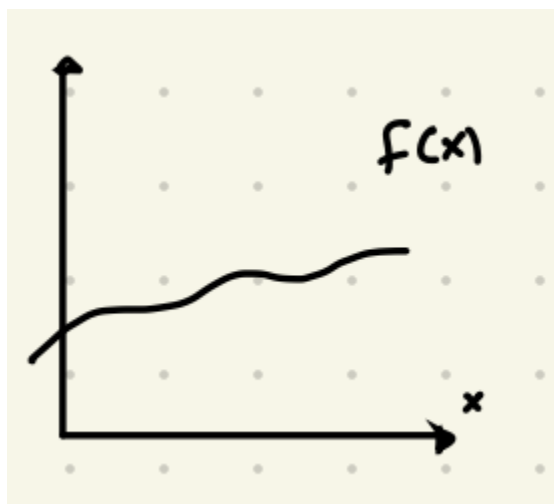
$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x \cdot f(x_i)$$

- La dx es la función, según James Stewart en su libro de cálculo, toda la notación es un símbolo en sí mismo, no hay que dividirlo para encontrarle significado a sus partes. Todo esto significa integral definida de f entre a y b . Solamente sirve para indicar que la variable de integración es x
- Haciendo una analogía, dx tiene relación con Δx . dx es un diferencial, que se puede interpretar como una pequeña parte del eje de la variable que su longitud tiende a 0. En Δx cuando n se hace muy grande, la base Δx se hace cada vez más pequeña

Teorema fundamental del Cálculo (Primera parte)

El teorema plantea que existe una relación con la materia vista en cálculo diferencial (derivadas) y el área a calcular.

Dada una función $f(x)$ continua en $[a, b]$



Si armamos una nueva función que se encuentra calculando el área

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Armamos $g(x)$ como la integral va desde a hasta x de la función original

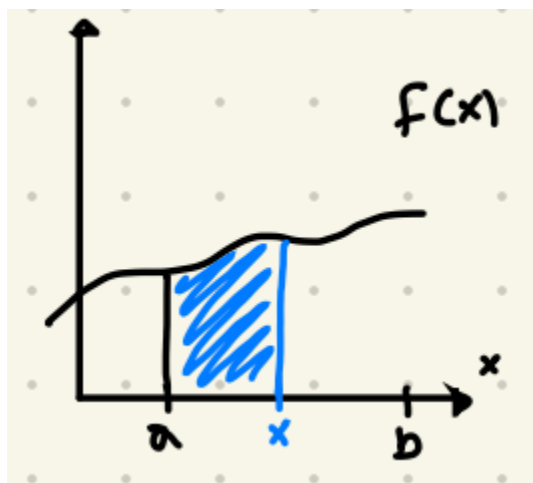
La variable de integración dt es sólo un operador que al final desaparece, dado que la integral definida es un número, no una función

Si evaluamos g en a , entonces la integral va desde a hasta a , por lo que quedamos sin área

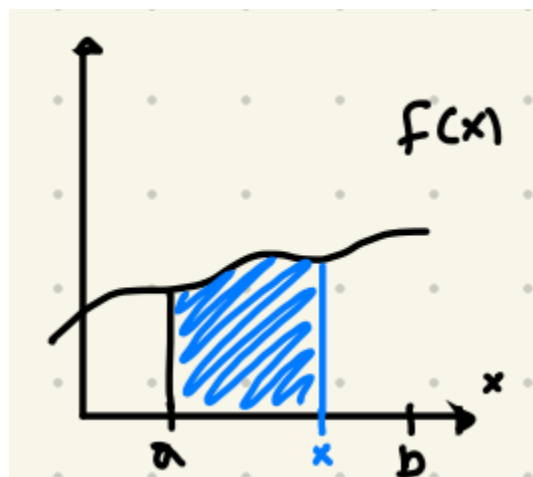
$$g(a) = \int_a^a f(t) dt$$

$$g(a) = 0$$

A medida que x aumenta, imaginemos que g en este valor de x vale 3



Ahora g evaluado en este x vale 8



Entonces $g(x)$ es el área desde a hasta x . Todo esto en el intervalo $[a, b]$

La primera parte del teorema fundamental del cálculo nos dice que si definimos esta función

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Tenemos que g

- es continua en el cerrado $[a, b]$,
- derivable en el abierto (a, b)
- Si derivamos g tenemos la función original

$$g'(x) = f(x)$$

Antiderivada

Dada una función $f(x)$ se define como antiderivada $F(x)$ dentro del intervalo de interés a una función que derivada $F'(x)$ da $f(x)$

$$F'(x) = f(x)$$

Ejemplo

Tenemos la función

$$f(x) = x^2$$

Encontrar la antiderivada

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$F'(x) = \frac{1}{3}(x^3)$$

$$F'(x) = \frac{1}{3}(3x^{3-1})$$

$$F'(x) = \frac{1}{\cancel{3}}(\cancel{3}x^2)$$

$$F'(x) = x^2$$

¿Pero que pasa si le agregamos un número constante?

$$F(x) = \frac{x^2}{3} + 1$$

$$F(x) = \frac{x^2}{3} + 4$$

Cuando derivamos estas también da la misma función, por lo tanto tenemos varias antiderivadas

Por lo tanto, para poder incorporar a todas las antiderivadas, se agrega la constante C

$$F(x) = \frac{x^2}{3} + C$$

Teorema fundamental del cálculo, parte 2

Si tenemos $g(x)$ que es antiderivada de $f(x)$, y $F(x)$ también es antiderivada

Por lo tanto, si $g(x)$ y $F(x)$ son antiderivadas de $f(x)$, entonces difieren en una constante

$$F(x) = g(x) + C$$

Teníamos que

$$g'(x) = f(x)$$

Que se podía escribir como

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Y también

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Si evaluamos g en a

$$g(a) = \int_a^a f(t)dt$$
$$g(a) = 0$$

Si calculamos g en b

$$g(b) = \int_a^b f(t)dt$$

¿Cuanto vale $F(b) - F(a)$?

F(b) puede describir como

$$F(b) = g(b) + C$$

$$g(b) = \int_a^b f(t)dt$$

Por tanto,

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt + C$$

$F(a)$ se puede describir como

$$F(a) = g(a) + C$$

$$g(a) = 0$$

$$F(a) = 0 + C$$

$F(b) - F(a)$ se puede describir como

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt + \cancel{C} - \cancel{0} - \cancel{C}$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

Tenemos que la integral que va desde a hasta b de f , es $F(b)$ menos $F(a)$ donde F es antiderivada de f

La integral de a hasta b en f , ahora se hace evaluando solamente una antiderivada en b , se resta la misma antiderivada en a , se calcula y ese cálculo coincide con el área que se busca calcular

$$A = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

Para no hacer todo el trabajo matemático de la suma de Riemann, se resume en evaluar una primitiva o antiderivada en dos valores y hacer la cuenta

Integral indefinida

Dada una función $f(x)$, si encontramos la antiderivada $F(x)$, entonces una forma de reescribir la antiderivada es

$$F(x) = \int f(x)dx$$

En esta notación no se tienen los límites

Ejemplo

Si necesitamos calcular

$$\int x^2 dx$$

Lo que nos están pidiendo acá es encontrar la antiderivada de x^2 , por eso que al resolver se le agrega la constante C

Propiedades de las integrales definidas

$$\int_a^b c \, dx = c(b - a), \quad \text{donde } c \text{ es cualquier constante}$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx$$

$$\int_a^b c f(x) \, dx = c \int_a^b f(x) \, dx, \quad \text{donde } c \text{ es cualquier constante}$$

$$\int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$$

$$\text{Si } f(x) \geq 0 \text{ para } a \leq x \leq b, \text{ entonces } \int_a^b f(x) \, dx \geq 0$$

$$\text{Si } f(x) \geq g(x) \text{ para } a \leq x \leq b, \text{ entonces } \int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b g(x) \, dx$$

$$\text{Si } m \leq f(x) \leq M \text{ para } a \leq x \leq b,$$

$$\text{entonces } m(b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b - a)$$

Propiedades de antiderivadas (*constante de integración omitida*)

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x$$

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x|$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x$$

$$\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x|$$

$$\int \tan x dx = \ln |\sec x|$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x|$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x$$

Ejemplo (suma de Riemann)

Tenemos la función x^2 y se quiere calcular el area bajo la curva desde 0 hasta 1



$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x \cdot f(x_i)$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\Delta x = \frac{1-0}{n}$$

$$\Delta x = \frac{1}{n}$$

$f(x_i)$ podemos decir que es el valor extremo derecha del intervalo que queramos

Para encontrar x_i

$$x_i = a + i\Delta x$$

Cuando $i = 1$ estoy en el primer intervalo, entonces acá evaluamos la función para encontrar la altura del primer rectángulo

- En el ejemplo, $a = 0$

$$x_i = a + i\Delta x$$

$$x_i = 0 + i\Delta x$$

$$x_i = i\Delta x$$

$$x_i = i \frac{1}{n}$$

$$x_i = \frac{i}{n}$$

Entonces la función evaluada en x_i es x^2

$$f(x_i) = \left(\frac{i}{n}\right)^2$$

La suma de Reimann queda

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^2$$
$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{i^2}{n^2}$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^3}$$

Esta suma donde varía i , entonces como estamos cambiando i solamente lo que dependa de n lo podemos sacar fuera de la sumatoria quedando

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2$$

Esta sumatoria sería $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots n^2$

Se puede demostrar que esto es equivalente a

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Simplificando y distribuyendo queda

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{6n^3} + \frac{3n}{6n^3} + \frac{1}{6n^2} \right)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{6} + \frac{3}{6n} + \frac{1}{6n^2} \right)$$

Si los límites existen, puedo hacer suma de límites. En este caso al estar $n \rightarrow \infty$ dividiendo da 0

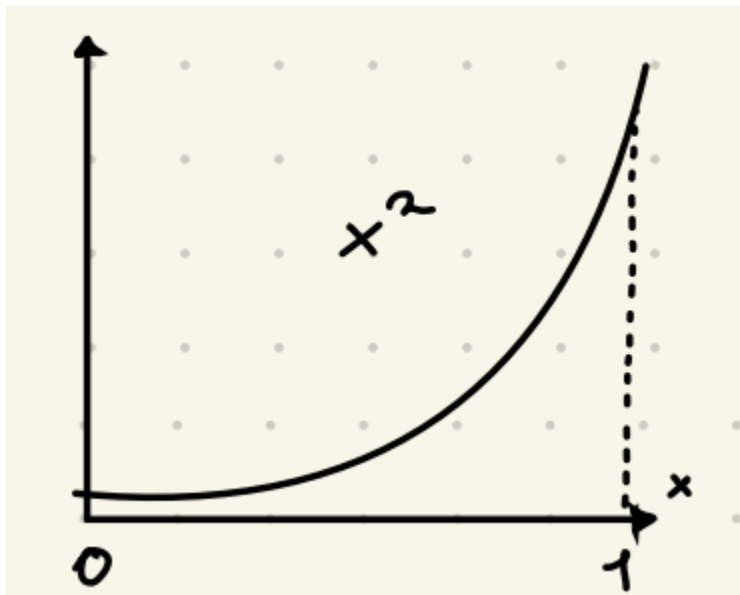
$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{6} + 0 + 0 \right)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{6} \right)$$

$$A = \left(\frac{1}{3} \right)$$

Ejemplo (teorema fundamental de cálculo)

Tenemos la función x^2 y se quiere calcular el area bajo la curva desde 0 hasta 1



$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

Sustituyendo

$$\int_0^1 x^2 dt$$

La antiderivada de x^2 es

$$\frac{x^3}{3}$$

$$\frac{x^3}{3} \Big|_0^1$$

- $\Big|_0^1$ es evaluada, esto significa evaluar la expresión en 1 menos evaluar la expresión en 0

$$\begin{aligned} &= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \\ &= \frac{1^3}{3} - 0 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Metodos de integración

Si no es posible resolver un ejercicio mirando la tabla de propiedades y antiderivadas, existen dos metodos de integración

1. Sustitución o "cambio de variable"
2. Integración por partes

Esto es aplicable tanto para integrales definidas como para integrales indefinidas

Integración por sustitución

Se usa para convertir una función en otra más fácil de integrar

$$\int \frac{6x + 2}{3x^2 + 2x} dx$$

1. Elegir una expresión para u

$$\begin{aligned} &\int \frac{6x + 2}{3x^2 + 2x} dx \\ &u = 3x^2 + 2x \end{aligned}$$

2. Calcular du

$$u = 3x^2 + 2x$$
$$du = (6x + 2)dx$$

3. Reemplazar todo por u

$$\int \frac{du}{u} dx$$

4. Calcular la integral

$$= \ln|u| + C$$

5. Reemplazar nuevamente

$$= \ln|3x^2 + 2x| + C$$

Integración por partes

Sirve cuando el integrando está formado por un producto o división, el cual se puede escribir como producto

$$\int u dv = uv - \int v du$$

"Un día ví una vaca sin cola vestida de uniforme"

ILATE

1. Inversa sen^{-1}
2. Logaritmica Ln
3. Algebra x^3
4. Trigonométrica sen
5. Exponencial e^x

$$\int x \cos x dx$$

Elegimos los terminos según ILATE, el término que tenga mayor prioridad en la lista será a quien lo usemos como u y el otro será dv junto con el dx

$$u = x$$

$$du = dx$$

$$dv = \cos x dx$$

$$v = \text{sen} x$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x \cos x dx = x \cdot \text{sen} x - \int \text{sen} x \cdot dx$$

$$= x \text{sen} x - (-\cos x) + C$$

$$= x \text{sen} x + \cos x + C$$

¡Mucho ánimo en sus estudios!

Un abrazo <3

