

Problema 1

Un granjero tiene 2400 pies de cerca y desea cercar un campo rectangular que limita con un río recto. No necesita cercar a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones del campo que tiene el área más grande?

- Área = xy
- Perímetro = $2(y + x) = 2y + 2x$
- Perímetro sin cercar a lo largo del río = $y + 2x = 2400$

1. Despejar variable y

$$y = 2400 - 2x$$

2. Ya despejado y , reemplazar en formula del área

$$A = yx$$

$$A = (2400 - 2x)x$$

$$A = 2400x - 2x^2$$

3. Ahora que ya tenemos sólo una variable, procederemos a derivar

$$A'(x) = 2400 - 4x$$

4. Debido a que el enunciado nos pide un máximo, una vez derivada la función la igualaremos a 0

$$2400 - 4x = 0$$

$$-4x = -2400$$

$$x = \frac{2400}{4}$$

$$x = 600$$

5. Sustituir valor de x en el perímetro sin cercar

$$P = y + 2x$$

$$2400 = y + 2(600)$$

$$2400 = y + 1200$$

$$2400 - 1200 = y$$

$$1200 = y$$

6. Reemplazar valores de x e y en formula del Área

$$A = xy$$

$$A = 600 \cdot 1200$$

$$A = 720.000$$

7. Segunda derivada

$$A''(x) = -4$$

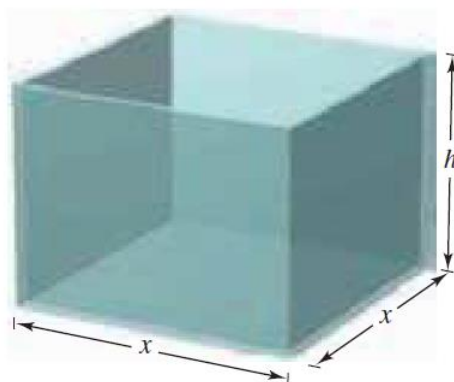
- Es cóncava hacia abajo y tiene como máximo $x = 600$

8. Respuesta contextualizada

Respuesta: Para alcanzar el área más grande, el campo rectangular que no necesita cercar a lo largo del río debe tener dimensiones de 600 pies de profundidad, y 1200 pies de ancho.

Problema 2

Un fabricante quiere diseñar una caja abierta que tenga una base cuadrada y un área superficial de 108 pulgadas cuadradas, como se muestra en la figura. ¿Qué dimensiones producirá una caja con un volumen máximo?



- $V = x \cdot x \cdot h = x^2 h$
- Superficie = $S = (\text{área de la base}) + (\text{área de los 4 lados}) = x^2 + 4xh$

1. Despejar h

$$S = x^2 + 4xh$$

$$108 = x^2 + 4xh$$

$$108 - x^2 = 4xh$$

$$h = \frac{108 - x^2}{4x}$$

$$h = \frac{108}{4x} - \frac{x}{4}$$

$$h = \frac{27}{x} - \frac{x}{4}$$

2. Reemplazar h en formula de volumen

$$V = x^2 h$$

$$V = x^2 \left(\frac{27}{x} + \frac{x}{4} \right)$$

$$V = 27x - \frac{x^3}{4}$$

3. Derivar

$$V'(x) = 27 - \frac{3x^2}{4}$$

4. Igualar a 0

$$V'(x) = 0$$

$$27 - \frac{3}{4}x^2 = 0$$

$$-\frac{3}{4}x^2 = -27$$

$$x^2 = \frac{27 \cdot 4}{3}$$

$$x_1 = 6$$

$$x_2 = -6$$

5. Nos quedamos con el valor positivo de x . Este lo utilizamos para determinar h

$$h = \frac{27}{6} - \frac{6}{4}$$

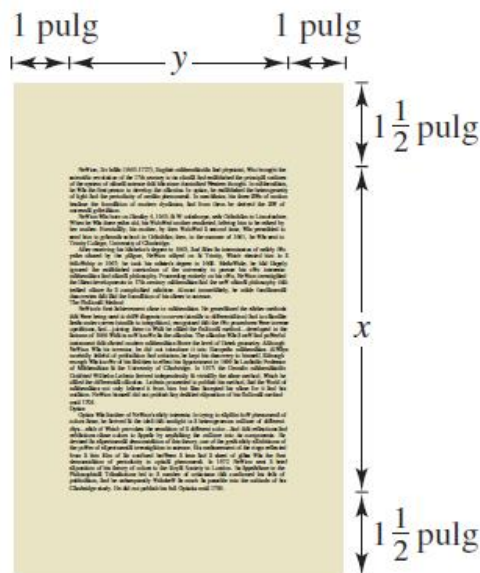
$$h = 3$$

6. Respuesta contextualizada

Respuesta: Para que esta caja ocupe un volumen máximo, cumpliendo con que el área superficial sea de 108 pulgadas, x debe medir 6 pulgadas y h debe medir 3 pulgadas.

Problema 3

Una página rectangular ha de contener 24 pulgadas cuadradas de impresión. Los márgenes de la parte superior y de la parte inferior de la página van a ser de 1.5 pulgadas, y los márgenes de la izquierda y la derecha corresponderán a 1 pulgada. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la página para que se use la menor cantidad de papel?



- Área xh
- Perímetro $2x + 2h$
- Área de impresión $xy = 24 \rightarrow 2 \text{ variables}$
- Área página $(x + 3)(y + 2)$
- Perímetro $= 2(x + 3) + 2(y + 2)$

1. Despejar y

$$y = \frac{24}{x}$$

2. Sustituir y en área de la página

$$A_p = (x + 3)(y + 2)$$

$$A_p = (x + 3) \left(\frac{24}{x} + 2 \right)$$

$$A_p = 30 + 2x + 3 \left(\frac{24}{x} \right)$$

3. Derivar

$$A'(x) = 2 - \frac{72}{x^2}$$

4. Igualar a 0

$$A'(x) = 0$$

$$2 - \frac{72}{x^2} = 0$$

$$\boxed{x_1 = 6}$$
$$x_2 = -6$$

5. Segunda derivada

$$A'' = \frac{144}{x^3}$$

$$A''(x) > 0$$

- Corresponde a un mínimo

6. Respuesta contextualizada

Respuesta: Las dimensiones de la página para que use la menor cantidad de papel deberían ser, como base 9 pulgadas y de alto 6 pulgadas