Guía problemas

Tutor: Javier Huenupi
Programa Tutorías TIP FI1100

1. Introducción a la física cuántica

1.1. Principio de incertidumbre

A diferencia de la física clásica, para dimensiones pequeñas no se puede conocer la posición y velocidad exacta de una partícula en un mismo tiempo, esto se describe en la desigualdad

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar,$$

donde $x\Delta$ y Δp_x son las incertidumbres de la posición y el momentum respectivamente y $\hbar = h/2\pi$. También se tiene una relación similar para la energía,

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar,$$

donde ΔE es la incertidumbre de la energía y Δt el intervalo de tiempo en el que el sistema permanece en determinado estado.

P1.- Un electrón está confinado en una región de 1×10^{10} m de ancho.

1. Estime la incertidumbre mínima en la componente x de la cantidad de movimiento del electrón.
2. Si el electrón tiene cantidad de movimiento con una magnitud igual a la incertidumbre determinada en el inciso 1., ¿cuál es su energía cinética? Exprese el resultado en joules y en electrón volts.

P2.- Un fastidioso mosquito de 1.5 mg está zumbando cerca de usted mientras estudia física en su habitación, la cual mide 5 m de ancho y 2.5 m de alto. Decide aniquilar de un golpe al insecto cuando éste se aproxima a usted pero sabe que necesita estimar la rapidez del insecto para darle un golpe certero.

1. ¿Cuál es la incertidumbre máxima en la posición horizontal del mosquito?
2. ¿Qué límite impone en el principio de incertidumbre de Heisenberg a su capacidad de conocer la velocidad horizontal de este mosquito? ¿Dicha limitación es un impedimento serio en su intento por aniquilarlo?

P3.- Una canica de 10 g se coloca suavemente sobre una mesa horizontal que tiene 1.75 m de ancho.

1. ¿Cuál es la incertidumbre máxima en la posición horizontal de la canica?

2. Según el principio de incertidumbre de Heizenberg, ¿qué incertidumbre mínima tiene la velocidad horizontal de la canica?

3. A la luz de su respuesta al inciso 2., ¿cuál es el tiempo máximo que la canica podría permanecer el la mesa? Compare este tiempo con la edad del Universo, que es aproximadamente de 14 mil millones de años. (Sugerencia: ¿puede usted saber que la velocidad horizontal de la canica es exactamente cero?)

1.2. Mecánica cuántica

La función de onda describe la distribución de una partícula en el espacio y se calcula a partir de la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{r},t) + U(\vec{r},t)\Psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow \hat{H}\left|\Psi(t)\right\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\Psi(t)\right\rangle \tag{2}$$

que para estados estacionarios (energía E constante) y en una dimensión queda expresada como:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x) \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow \hat{H}\left|\Psi\right\rangle = E\left|\Psi\right\rangle \tag{4}$$

donde m es la masa de la partícula, Ψ la función de onda dependiente del tiempo y el espacio, ψ la función de onda independiente del tiempo, U la energía potencial y E la energía (constante) del sistema.

Para una partícula libre se tiene que esta función es de la forma:

$$\Psi(x,t) = \underbrace{Ae^{ikx}}_{\text{espacial}}\underbrace{e^{-i\omega t}}_{\text{temporal}} = A\cos(kx-\omega t) + iA\sin(kx-\omega t), \tag{5}$$

con $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ el número de onda.

También la función de onda nos indica la probabilidad de encontrar una partícula en un intervalo dx,

$$|\psi(x)|^2 dx, \tag{6}$$

donde debemos normalizarla usando las constantes para obtener:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1. \tag{7}$$

$\boxed{\textbf{P1}\text{.-}}$ Demuestre que la función de onda independiente del tiempo $\psi(x) = A_1e^{ikx} + A_2e^{-ikx}$ es la función de onda para una partícula libre, además calcule la energía.

$\boxed{\textbf{P2}\text{.-}}$ La naturaleza ondulatoria de las partículas da como resultado la situación mecánico-cuántica que una partícula confinada en una caja sólo puede tener longitudes de onda que causen ondas estacionarias en esa caja, con nodos en sus paredes. a) Demuestre que un electrón confinado en una caja unidimensional de longitud L tendrá niveles de energía definidos por

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$$

(Sugerencia: recuerde que la relación entre la longitud de onda de De Broglie y la rapidez de una partícula no relativista es $mv = h/\lambda$. La energía de la partícula es $\frac{1}{2}mv^2$.) b) Si un átomo de hidrógeno se modela como una caja unidimensional de longitud igual al radio de Bohr, ¿cuál es la energía (en electrón volts) del nivel mínimo de energía del electrón?

$\boxed{\textbf{P3.-}}$ (**Mardones**) Una partícula cuántica de masa m se mueve en un pozo de potencial infinito de longitud $2L$. Dentro de la región $-L < x < L$, tiene un potencial conocido dado por la expresión:

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 x^2}{mL^2(L^2 - x^2)}$$

Además, dentro de la región la partícula está en un estado estacionario descrito por la función de onda $\psi(x) = A(1 - x^2/L^2)$.

1. Determine la energía total de la partícula en términos de $\hbar$, m y L.
2. Demuestre que $A = \sqrt{\dfrac{15}{16L}}$
3. Determine la probabilidad de encontrar la partícula entre $x = -L/3$ y $x = L/3$

$\boxed{\textbf{P4.-}}$ (**Mardones-fabiperkin**) En un modelo sencillo de un núcleo radiactivo, una partícula alfa ($m = 6.64 \times 10^{-27}$ kg) queda atrapada por una barrera cuadrada de 2 fm de ancho, y 30 MeV de altura.

1. ¿Cuál es la probabilidad de tunelamiento cuando la partícula alfa encuentre la barrera, si su energía cinética es 1 MeV menor que el borde de la barrera?
2. ¿Cuál es la probabilidad de tunelamiento, si la energía de la partícula alfa es 10 MeV menor que la parte superior de la barrera?

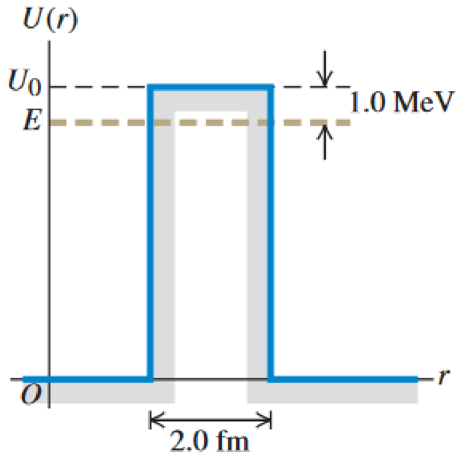


Figura 1: Barrera de potencial.

P5.- **Los 3 casos básicos para el potencial**

Considere un pozo de potencial definido como $U(x) = \infty$ para $x < 0$, $U(x) = 0$ para $0 < x < L$, y $U(x) = U_0 > 0$ para $x > L$, ver figura. Considere una partícula con masa m y energía cinética $E < U_0$ que está atrapada en el pozo.

1. ¿Cuál es la condición de frontera en la pared infinita ($x = 0$)? ¿Cuál debe ser la forma de la función $\psi(x)$ para $0 < x < L$, para que satisfaga tanto la ecuación de Schrödinger como esta condición en la frontera?

2. ¿Cuál es la condición para la función de onda cuando $x \to \infty$? ¿Cuál debe ser la forma de la función $\psi(x)$ para $x > L$, para que se satisfagan la ecuación de Schrödinger?

3. Imponga las condiciones en la frontera para que ψ y $d\psi/dx$ sean continuas en $x = L$. Demuestre que las energías de los niveles permitidos se obtienen a partir de la solución de la ecuación $k \cot kL = -\kappa$, donde $k = \sqrt{2mE/\hbar}$ y $\kappa = \sqrt{2m(U_0 - E)/\hbar}$

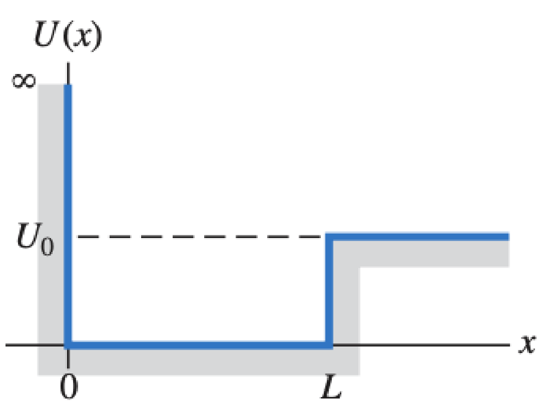


Figura 2: 3×1.

$\boxed{\textbf{P6.-}}$ Un átomo de sodio de masa 3.82×10^{-26} kg vibra en un cristal con movimiento armónico simple. La energía potencial aumenta 0.0075 eV cuando el átomo se desplaza 0.014 nm de su posición de equilibrio.

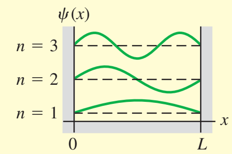
1. Determine la frecuencia angular, según la mecánica newtoniana.
2. Calcule las distancias entre los niveles de energía adyacentes, en electron volts.
3. Si un átomo emite un fotón durante una transición de un nivel de vibración al siguiente nivel menor, ¿cuál es la longitud de onda de ese fotón? ¿En cuál región del espectro electromagnético está?

CAPÍTULO 40 RESUMEN

Partícula en una caja: Los niveles de energía para una partícula de masa m en una caja (un pozo cuadrado de potencial, infinitamente profundo) de ancho L se determinan con la ecuación (40.9). Las funciones de onda normalizadas correspondientes para la partícula se determinan con la ecuación (40.13). (Véanse los ejemplos 40.1 y 40.2.)

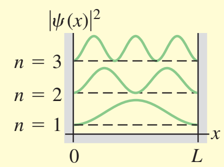
$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{n^2h^2}{8mL^2} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \qquad (40.9)$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{L} \qquad (40.13)$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

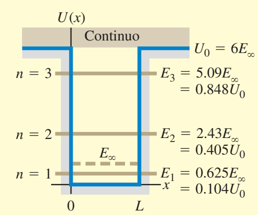


Funciones de onda y normalización: Para ser una solución de la ecuación de Schrödinger, la función de onda $\psi(x)$ y su derivada $d\psi(x)/dx$ deben ser continuas en todos los puntos, excepto donde la función de energía potencial $U(x)$ tenga una discontinuidad infinita. Las funciones de onda se suelen normalizar de tal modo que la probabilidad total de que la partícula se encuentre en algún lugar sea igual a la unidad.

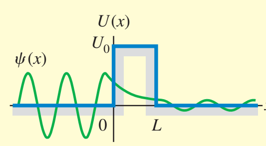
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\,dx = 1 \qquad (40.11)$$
(condición de normalización)



Pozo de potencial finito: En un pozo de potencial con profundidad finita U_0, los niveles de energía son menores que para un pozo infinitamente profundo del mismo ancho, y la cantidad de niveles de energía que corresponden a estados confinados es finita. Los niveles se obtienen haciendo coincidir las funciones de onda en las paredes del pozo, para satisfacer la continuidad de $\psi(x)$ y de $d\psi(x)/dx$. (Véanse los ejemplos 40.3 y 40.4.)

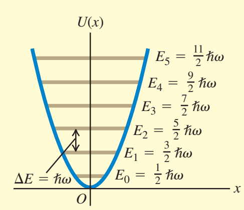


Barreras de potencial y tunelamiento: Hay cierta probabilidad de que una partícula penetre una barrera de energía potencial, aunque su energía cinética inicial sea menor que la altura de la barrera. A este proceso se le llama tunelamiento. (Véase el ejemplo 40.5.)



Oscilador armónico cuántico: Los niveles de energía del oscilador armónico, para el cual $U(x) = \frac{1}{2}k'x^2$, se determinan con la ecuación (40.26). La distancia entre dos niveles adyacentes cualesquiera es $\hbar\omega$, donde $\omega = \sqrt{k'/m}$ es la frecuencia angular de oscilación del oscilador armónico newtoniano correspondiente. (Véase el ejemplo 40.6.)

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\sqrt{\frac{k'}{m}} \qquad (40.26)$$
$$(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$



Problemas tridimensionales: La ecuación de Schrödinger para problemas tridimensionales es la ecuación (40.29).

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial z^2}\right) + U(x,y,z)\psi(x,y,z) = E\psi(x,y,z) \qquad (40.29)$$