Guía problemas

Tutor: Javier Huenupi
Programa Tutorías TIP para el ramo FI1100

1. Oscilaciones y ondas

1.1. Movimiento armónico simple

Un movimiento armónico simple es un movimiento periódico (se repite luego de cierto tiempo) que se da cuando la fuerza aplicada sobre cierta masa es proporcional al desplazamiento con respecto a la posición de equilibrio. Esta fuerza también deber ser restitutiva, o sea, intenta que la masa esté en la posición de equilibrio donde la fuerza es 0.

P1.- De alguna forma un pescador encuentra que el desplazamiento vertical de su bote está dado por:

$$y = (1.2\,\mathrm{m})\cos(0.5\,\mathrm{s}^{-1}t + \pi/6).$$

1. Determine amplitud, frecuencia angular, constante de fase, frecuencia y periodo
2. Calcule la posición, velocidad y aceleración inicial
3. ¿En qué posición se encuentra en $t = 1\,\mathrm{s}$?
4. Calcule la velocidad y aceleración en el mismo tiempo

P2.- **Si ya fue hecho en clases, repita el procedimiento, sino, siempre hay una primera vez para todo.**

Encuentre la ecuación de movimiento de una masa m sujeta a un resorte de constante de elasticidad k, proponga una solución para esta ecuación y explíquela.

P3.- Encuentre la ecuación de movimiento de un péndulo simple de largo L con una masa puntual m en el extremo. Realice la aproximación necesaria para linealizarla y proponga una solución para esta ecuación y explíquela.

P4.- Está realizando una apuesta y necesita que un péndulo simple, compuesto por una cuerda de largo L y una masa puntual en el extremo, llegue a la posición vertical lo antes posible solo soltándola (sin darle impulso), ¿qué preferiría: utilizar una masa más grande/pequeña o soltarla desde un ángulo mayor/menor?

Movimiento armónico simple

Posición: $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$
Velocidad: $v(t) = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$
Aceleración: $a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 x(t)$
Frecuencia angular general: $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$
Frecuencia angular resorte: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
Frecuencia angular péndulo: $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$
Energía: $E = K + U = \frac{1}{2}kA^2$

Oscilación forzada

Posición: $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$
Amplitud: $A(t) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$
Fase: $\tan\delta = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$

1.2. Movimiento ondulatorio

Las ondas transportan energía y momentum lineal a través del espacio **sin transportar materia**.

Las ondas mecánicas son las que necesitan un medio para producirse y transportarse, como las ondas en el agua o el sonido en el aire. Estas ondas son una perturbación a partir de su estado de equilibrio y se propagan debido a la interacción con la materia adyacente. Cuando la perturbación es perpendicular a la dirección de propagación se denomina onda transversal (un pulso en una cuerda) y cuando la perturbación es paralela a la propagación, es una onda longitudinal (el sonido).

1.2.1. Ecuación de onda

Usando que $F = ma$ se puede deducir que la ecuación que sigue una onda en una cuerda viene dada por las derivadas parciales (derivar c/r a una variable y la otra dejarla como constante) con respecto a su posición y el tiempo:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \tag{1}$$

con $v = \sqrt{T/\mu}$ la velocidad de propagación de la onda definida por la tensión de la cuerda y la densidad lineal de la misma.

P1.- Demostrar que toda onda de la forma $y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$ cumple la ecuación de onda.

P2.- Considerando ondas armónicas de la forma $y(x,t) = A\operatorname{sen} kx - \omega t$ con $v = \omega/k$, (k el número de onda) demostrar que estas ondas cumplen la ecuación de onda

1.2.2. Barreras

En **cuerdas** con cambios de densidad, la potencia incidente en la interfaz es igual a la suma de la potencia de los pulsos reflejados y transmitidos. La potencia media viene dada por:

$$P_m = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 A^2, \tag{2}$$

con μ la densidad lineal de la cuerda.

$\boxed{\textbf{P3.-}}$ Se juntan dos cables de densidad distinta, ambos están estirados bajo la misma tensión T y la velocidad de una onda en el primer alambre (de la izquierda) es el doble que la del segundo. Cuando una onda armónica proveniente del primer alambre llega a la unión, la onda reflejada tiene la mita de amplitud de la onda transmitida.

1. Si la amplitud de la onda incidente es A_1, ¿cuáles son las amplitudes de las ondas transmitida y reflejada, en función de la amplitud de la onda incidente?
2. ¿Qué fracción de la potencia incidente se refleja y qué fracción se transmite?

Hint: Considere que la frecuencia angular es la misma para los 3 pulsos.

1.2.3. Refracción y difracción

Difracción: Fenómeno ondulatorio que ocurre cuando una onda se encuentra con un obstáculo.
Refracción: Cambio de la dirección de propagación de una onda. La luz sigue la Ley de Snell,

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}, \tag{3}$$

con v_i, n_i y θ_i la velocidad de la luz, índice de refracción y ángulo con respecto a la horizontal, respectivamente, en cada medio.

1.2.4. Superposición

Cuando dos o más ondas se combinan, la onda resultante es la suma algebraica de las ondas individuales $y = y_1 + y_2$.

1.2.5. Ondas estacionarias

Si se fijan los extremos de una cuerda y en alguna parte la movemos con cierta frecuencia (frecuencias de resonancia) hacia arriba y hacia abajo, se obtienen patrones armónicos con nodos, puntos que no se mueven, y antinodos. Estos patrones característicos se definen por su modo de vibración.

Tenemos la relación entre el largo de la cuerda L, el modo de vibración n y la longitud de onda del armónico n-ésimo λ_n:

$$L = n\frac{\lambda_n}{2}. \tag{4}$$

Como $v = f_n\lambda_n$ se obtiene que la frecuencia del n-ésimo armónico es $f_n = nf_1$.

$\boxed{\textbf{P4.-}}$ Para saber si la calidad de la cuerda de un piano es adecuada, un trabajador utiliza un pedazo de 3 m de esta cuerda con densidad lineal $2.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$. Tocando un rato encuentra que las frecuencias de resonancia de dos modos consecutivos son 252 Hz y 336 Hz. Su misión es encontrar el valor de la frecuencia fundamental de la cuerda y con esta calcular la tensión que soporta, ya que si pasa los 650 N es muy probable que se corte y pueda generar un accidente.

Otra situación es cuando se tiene un extremo fijo (normalmente este extremo está vibrando pero con una amplitud muuy pequeña) y el otro atado a un anillo que puede moverse con toda libertad hacia arriba y hacia abajo por una varilla vertical sin roce. Analizando geométricamente se obtienen las relaciones:

$$L = n\frac{\lambda_n}{4} \Rightarrow f_n = nf_1. \tag{5}$$

La función de onda para una onda estacionaria es:

$$y_n(x,t) = A_n(x)\cos(\omega_n t + \delta_n) = A_n \sin k_n x \cos(\omega_n t + \delta_n) \tag{6}$$

$\boxed{\textbf{P5.-}}$ Considere las funciones de onda de dos ondas $y_1 = y_0 \sin(kx - \omega t)$ e $y_2 = y_0 \sin(kx + \omega t)$.

1. ¿En qué sentido se propaga cada onda?

2. Demuestre que la superposición de estas dos ondas es una onda estacionaria

$\boxed{\textbf{P6.-}}$ Una onda estacionaria en una cuerda está definida por la función:

$$y(x,t) = (2.4 \times 10^{-2}\,\mathrm{m})\sin(52.3\,\mathrm{m}^{-1}x)\cos(480\,\mathrm{s}^{-1}t),$$

calcule la velocidad de las ondas sobre la cuerda y la distancia entre los nodos para las ondas estacionarias.

1.3. Ondas acústicas

Cuando una onda acústica se transmite por el aire, los elementos de este vibran produciendo cambios en la densidad y la presión a lo largo de la dirección de movimiento de la onda.

La rapidez de las ondas sonoras dependen de la compresibilidad y la densidad del medio,

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}, \tag{7}$$

con B el módulo volumétrico (resistencia a la compresión).

1.3.1. Potencia e intensidad de las ondas acústicas

Para un elemento de aire dentro de un pistón que oscila sinusoidalmente con una frecuencia angular ω, la potencia, o rapidez de transferencia de energía, viene dada por:

$$P = \frac{1}{2}\rho A v \omega^2 s_{máx}^2, \tag{8}$$

con A el área de la sección transversal del pistón, v la velocidad de propagación y $s_{máx}$ la posición máxima con respecto a la posición de equilibrio de un elemento pequeño del medio. Mientras que la intensidad de una onda, o potencia por unidad de área, es:

$$I = \frac{P}{A}. \tag{9}$$

$\boxed{\textbf{P1}\text{.-}}$ El parlante bazooka del carrete emite la música con una potencia promedio de 80 W, ¿con qué intensidad se escucha a 3 metros?

1.3.2. Efecto Doppler

La frecuencia con la que percibimos un sonido cambia si hay un movimiento relativo entre el emisor y el receptor.

$$f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_e} f_e, \tag{10}$$

donde v es la velocidad de la onda, u la velocidad del receptor o el emisor y f la frecuencia emitida o recibida. Para saber qué signo elegir, pensamos en que la frecuencia aumenta (se escucha más agudo) cuando el receptor se mueve hacia el emisor (el numerador tendría que ser más grande, entonces tomamos el signo positivo) o cuando el emisor se acerca hacia el receptor (el numerador debe ser más pequeño, por lo que se toma el signo negativo).

$\boxed{\textbf{P2}\text{.-}}$ La frecuencia de la bocina de un auto parado es 400 Hz. Considerando que la velocidad del sonido en el aire es $340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, calcule:

1. La longitud de onda y frecuencia recibida si el auto se mueve con una velocidad $34\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ hacia el receptor que está quieto
2. La frecuencia recibida si ahora el auto está parado y el receptor se mueve hacia el auto con velocidad $34\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

$\boxed{\textbf{P3}\text{.-}}$ Debido a que le cuesta despertar, configura su celular para que la alarma de la mañana suene con una frecuencia de 600 Hz (bastante agudo). Un día no para de sonar, por lo que no encuentra nada mejor que tirarlo por la ventana de su pieza que está a 15 metros sobre el suelo, ¿con qué frecuencia escuchará sonar la alarma justo antes de tocar el suelo y que se rompa?

2. Óptica geométrica y ondulatoria

2.1. Luz visible y ondas electromagnéticas

Debido a que la longitud de onda de la luz es muy pequeña en comparación a los obstáculos que atraviesa, se puede despreciar la difracción y se puede considerar que la luz se mueve en línea recta a una velocidad de $299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}} \approx 3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ en el vacío.

2.2. Reflexión y refracción

La ley de reflexión nos dice que el ángulo incidente es el mismo que el reflejado $\theta_1 = \theta_1'$.

Cuando la luz pasa de un medio transparente a otro medio transparente, parte de la luz se refracta cambiando su longitud de onda, pero **no** su frecuencia, y de la forma:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2, \tag{11}$$

con n_i (índice de refracción) la razón entre la rapidez de la luz en el vacío y la rapidez en el medio.

Se puede llegar a estos dos resultados ocupando el principio de Fermat que menciona que la luz sigue el camino que le toma menos tiempo en recorrer o el principio de Huygens.

P1.- Un haz luminoso pasa por un medio 1 a un medio 2 y sale nuevamente al medio 1. El medio 2 es una capa gruesa de material con índice de refracción n_2. Muestre que el haz que emerge del medio 2 es paralelo al incidente.

P2.- Calcule, en función de los índices de refracción, el ángulo en el que debe incidir un haz de luz para que no alcance a pasar al medio incidente, ¿qué condición deben cumplir los índices de refracción para que esto sea posible?

P3.- Un haz de luz entra en el punto P con un ángulo de incidencia θ en un prisma triangular que tiene un ángulo recto, como se muestra en la Figura 1. Luego una parte del haz se refracta en el punto Q con un ángulo de refracción de 90°.

1. Calcule el índice de refracción del prisma en función de θ suponiendo que el índice de refracción del aire es 1
2. Determine el índice de refracción máximo para que ocurra este fenómeno

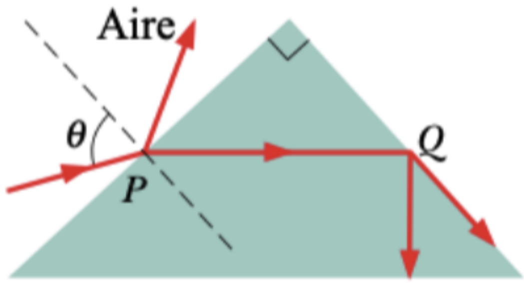


Figura 1

2.3. Espejos y lentes

2.3.1. Espejos

Para obtener las imágenes generadas por la reflexión de un espejo plano, usamos que el ángulo incidente es el mismo que el reflejado y se proyectan los rayos reflejados, ya que las imágenes formadas son virtuales.

En el caso de los espejos esféricos tenemos la ecuación del espejo:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f}, \tag{12}$$

donde p es la distancia al objeto que se desea reflejar, q la distancia a la imagen, R el radio de curvatura del espejo y f la distancia focal (todas las distancias medidas desde el espejo y considerando el eje positivo hacia la izquierda). Notemos que la ecuación del espejo nos indica dónde se forman las imágenes y si el espejo es cóncavo o convexo ($f > 0$ cóncavo y $f < 0$ convexo), además tenemos que la razón entre la altura de la imagen y del objeto original es:

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p}, \tag{13}$$

donde el signo nos dice si están invertida o derecha, por lo que hay que considerar los signos de q y p.

P1.- Considere un espejo esférico con longitud focal 10 cm.

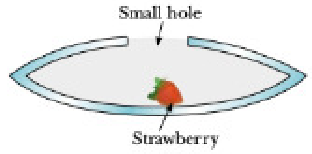
1. ¿Es un espejo cóncavo o convexo?
2. Localice y describa la imagen para distancias al objeto de:
   a) 25 cm
   b) 10 cm. Explique físicamente qué sucede en este caso
   c) 5 cm

P2.- En un parking se encuentra con un espejo y decide sacarse una foto, pero antes desea saber cómo se vería la imagen formada por usted sabiendo que la longitud focal es de -0.25 m. Se coloca a 3 m del espejo y responde/calcula:

1. ¿Qué tipo de espejo es?
2. Distancia a la que se ve formada la imagen
3. Razón entre el tamaño de la imagen y su estatura real

P3.- Un espejo cóncavo esférico tiene un radio de curvatura $R = 30$ cm. Si usted pone su cara a 10 cm del vértice de dicho espejo ¿Cuál será la magnificación? ¿Cómo cambian sus resultados si el espejo es convexo? Incluya un diagrama de rayos.

P4.- Se puede generar una ilusión de una frutilla flotante si es que se colocan dos espejos parabólicos, cada uno con distancia focal 7.5 cm, mirando uno al otro de tal forma que sus centros están a 7.5 cm de distancia (ver figura). Si una frutilla se coloca en el espejo de abajo (justo en el punto focal del espejo de arriba), la imagen de la frutilla se va a formar en la pequeña apretura que se encuentra en el centro del espejo superior. Muestre que la imagen final se forma en esa ubicación y describa sus características. porco ilusão.



2.3.2. Lentes

Para lentes tenemos la misma ecuación de los espejos, pero es un poco más complicado los signos, tenemos:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}, \tag{14}$$

con p la posición del objeto, que es positiva a la izquierda (enfrente del lente); q la posición de la imagen creada, que es positiva (imagen real) a la derecha (detrás del lente); y f la distancia focal que es positiva para lentes convergentes y negativa para divergentes.

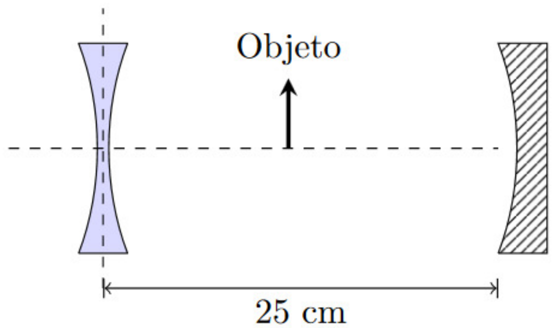
La ecuación del fabricante para un lente de índice de refracción n_{lente} y con radios de curvatura R_1 y R_2 es:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_{lente}}{n_{medio}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right), \tag{15}$$

donde R_1 y R_2 son positivos si el centro de curvatura está a la derecha (detrás del lente).

$\boxed{\textbf{P5.-}}$ Un lente de vidrio convergente ($n = 1.52$) tiene una longitud focal de 40 cm en el aire, encuentre su longitud focal cuando está inmerso en agua, que tiene un índice de refracción de 1.33.

$\boxed{\textbf{P6.-}}$ En el sistema óptico de la figura, el objeto está a la mitad del camino entre el lente y el espejo. El radio de curvatura del espejo es de 20 cm y el lente tiene un largo focal de -16.7 cm. Considerando sólo la luz que deja el objeto y que viaja primero hacia el espejo, localice la imagen final formada por el sistema. ¿Es real o virtual? ¿Es derecha o invertida? ¿Cuál es el aumento total?


Objeto
25 cm