

Derivadas parciales

Derivamos en función de una variable, dejando las demás constantes.

Ejemplo

Si $u = e^x \sin y$, calcular $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \underbrace{(e^x)'}_{\text{se deriva}} \sin(y) + \underbrace{e^x \sin(y)'}_{\text{constante}} = e^x \sin(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \underbrace{(e^x)'}_{\text{constante}} \sin(y) + \underbrace{e^x \sin(y)'}_{\text{se deriva}} = e^x \cos(y)$$

Derivadas direccionales

Tasa de cambio de una función a medida que se mueve en la dirección de un vector

$$D_{\vec{u}}f = \underbrace{(\nabla f(P))}_{\text{Gradiente}} \cdot \underbrace{(\vec{u})}_{\text{Dirección}} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|}$$

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Ejemplo

Calcular la derivada direccional de $f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$, en $(-1, 3)$ en la dirección que va de $P(-1, 3)$ a $Q(1, -2)$

Calculando el gradiente:

$$\nabla f(x, y) = (6x, -4y)$$

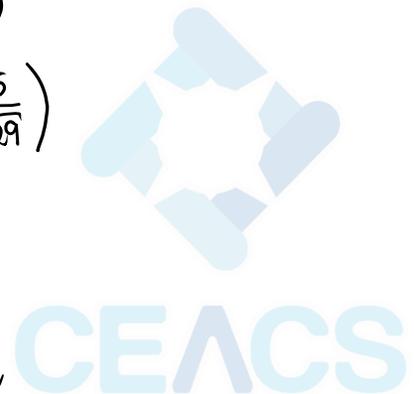
La dirección está dada por el vector \overrightarrow{PQ} :

$$\overrightarrow{PQ} = (1, -2) - (-1, 3) = (2, -5)$$

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{(2, -5)}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{-5}{\sqrt{29}} \right)$$

Finalmente la derivada direccional en $P(-1, 3)$ queda como:

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f &= (6(-1), -4(3)) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{-5}{\sqrt{29}} \right) \\ &= \frac{-12}{\sqrt{29}} + \frac{60}{\sqrt{29}} = \frac{-67}{\sqrt{29}} // \end{aligned}$$



Ejercicios propuestos

1. Sea $u = \sin(y + z) \ln \sqrt{xy}$, calcule $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial z}$
2. Calcule la derivada direccional de $f(x, y) = x \sec(y)$ en el punto $(0, \frac{\pi}{4})$ en la dirección que va de $P(0, \frac{\pi}{4})$ a $Q(\pi, 2\pi)$
3. Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie $y = x(2z - 1)$ en el punto $(4, 4, 1)$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin(y+z)}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sin(y+z)}{2x\sqrt{xy}} \\
 & \frac{\partial u}{\partial y} = \cos(y+z) \ln \sqrt{xy} + \frac{\sin(y+z)}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y} = \cos(y+z) \ln \sqrt{xy} + \frac{\sin(y+z)}{2y\sqrt{xy}} \\
 & \frac{\partial u}{\partial z} = \cos(y+z) \ln \sqrt{xy} + \frac{\sin(y+z)}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} = \cos(y+z) \ln \sqrt{xy} + \frac{\sin(y+z)}{2z\sqrt{xy}}
 \end{aligned}$$

1.

