Matemáticas II

Tutoría Disciplinar
Matemáticas II G2 – Sesión 6
Derivadas parciales y direccionales

Derivadas parciales

Derivamos en función de una variable, dejando las demás constantes.

Ejemplo

Si $u = e^x \sin y$, calcular $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \underbrace{(e^x)'}_{\text{se deriva}}\,\text{sen}(y) + e^x \underbrace{\cancel{\text{sen}(y)'}^{\,0}}_{\text{constante}} = e^x\,\text{sen}(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \underbrace{\cancel{(e^x)'}^{\,0}}_{\text{constante}}\,\text{sen}(y) + e^x \underbrace{\text{sen}(y)'}_{\text{se deriva}} = e^x \cos(y)$$

Derivadas direccionales

Tasa de cambio de una función a medida que se mueve en la dirección de un vector

$$D_u f = \underbrace{\nabla f(P)}_{\text{Gradiente}} \cdot \vec{u} \longrightarrow \text{Dirección} \quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|}$$

Gradiente

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Ejemplo

Calcular la derivada direccional de $f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$, en (-1,3) en la dirección que va de $P(-1,3)$ a $Q(1,-2)$

Calculando el gradiente:

$$\nabla f(x,y) = (6x\ ,\ -4y)$$

La dirección está dada por el vector $\overrightarrow{PQ}$:

$$\overrightarrow{PQ} = (1,-2) - (-1,3) = (2,-5)$$

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{(2,-5)}{\sqrt{2^2+5^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{-5}{\sqrt{29}}\right)$$

Finalmente la derivada direccional en P(-1,3) queda como:

$$D_u f = (6(-1), -4(3)) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{-5}{\sqrt{29}}\right)$$

$$= -\frac{12}{\sqrt{29}} + \frac{60}{\sqrt{29}} = -\frac{67}{\sqrt{29}} \ //$$

Matemáticas II

Ejercicios propuestos

1. Sea $u = \sin(y+z)\ln\sqrt{xy}$, calcule $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial z}$

2. Calcule la derivada direccional de $f(x,y) = x\sec(y)$ en el punto $(0,\frac{\pi}{4})$ en la dirección que va de $P(0,\frac{\pi}{4})$ a $Q(\pi, 2\pi)$

3. Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie $y = x(2z-1)$ en el punto $(4,4,1)$

Solución:

1.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin(y+z)}{2x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\sin(y+z)}{2y} + \frac{\ln(xy)\cos(y+z)}{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\ln(xy)\cos(z+y)}{2}$$

2.

$$\frac{\sqrt{2}(16+7\pi)}{4\sqrt{65}}$$

3.

$$-x + y - 8z + 8 = 0$$