

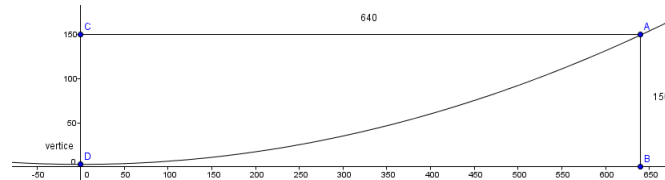


Universidad de Chile
Facultad de Arquitectura y Urbanismo
Escuela de Pregrado Unificada.

Prueba Recuperativa 2do Semestre

NOMBRE:

1.- El puente Golden Gate, en San Francisco, California, es un puente en suspensión cuya forma es aproximada a una parábola. Los cables del tramo principal se suspenden entre dos torres que se encuentran separadas 1280 metros y cuyo borde superior se ubica a 150mts por arriba de la autopista. El cable se extiende a 3 metros arriba del punto medio de la autopista entre las dos torres. Encuentre la ecuación que represente la forma del cable.



Este gráfico se obtiene a partir de los datos del enunciado.

Note que la ecuación de una parábola de vértices (h, k) , y directriz una recta paralela al eje x es $(y - k)^2 = 4p(x - h)^2$. Por otro lado desde el enunciado el vértice de la parábola es $(0, 3)$ luego,

$$(y - 3) = 4p(x - 0)^2$$

De nuevo, desde el enunciado el punto $(640, 150)$ está en la parábola. Así,

$$(150 - 3) = 4p(640)^2.$$

De esta manera, $p = \frac{147}{1638400}$. Por lo tanto

$$y - 3 = 4 \cdot \frac{147}{1638400} x^2$$

es la ecuación de la parábola buscada.

2.- Hallar las dimensiones que hacen mínimo el costo de un contenedor cerrado que tiene forma de paralelepípedo rectangular, sabiendo que su volumen es de $16m^3$, uno de los lados de su base mide $2m$ y el costo de construcción por m^2 es de 5000 um para la base, 6000 um para cada pared lateral y 7000 um para la tapa (um unidades monetarias)

En este caso tenemos una caja **con tapa**. Por lo tanto su superficie lateral es

$$S(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$$

Note que es una función de tres variables.

Uno de los lados basales es 2 supongamos que tal lado es y , Luego

$$S(x, z) = S(x, 2, z) = 4x + 2xz + 4z$$

Note ahora que la función se reduce a una de dos variables.

Pero el volumen de la caja es 16, i.e. $xyz = 16$ ó $2xz = 16$. Así, $xz = 8$ y $z = \frac{8}{x}$. Luego,

$$S(x) = S(x, 2, \frac{8}{x}) = 4x + 16 + \frac{32}{x}$$

Note que $S(x)$ depende de sólo una variable, y $S(x)$ es la función que calcula el área lateral de la caja. Si minimizamos el área lateral minimizamos el coste de producción.

Calculamos $S'(x)$

$$S'(x) = 4 - \frac{32}{x}$$

Por otro lado, note que $S'(x) = 0$ sólo para $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}$ pero x debe ser positivo pues representa una magnitud. Así, nuestro único candidato a punto mínimo es $x_0 = 2\sqrt{2}$.

Finalmente obtenemos $S''(x)$

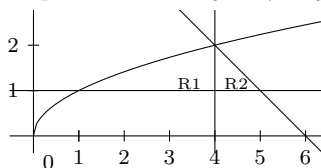
$$S''(x) = \frac{64}{x^3}$$

Note que $S''(x_0) > 0$.

Por lo tanto x_0 es un mínimo para $S(x)$. En otras palabras, la caja de volumen 16, un lado basal de medida $y = 2$ y de menor superficie posible es aquella que sus otras dos dimensiones son $x = 2\sqrt{2}$, y $z = 2\sqrt{2}$ (recuerde que $z = 8/x$).

(Atención lo que sigue no era necesario en este caso) Ahora, xy representa el área basal luego, $5000 \cdot xy = 5000 \cdot 4\sqrt{2}$ es el costo del piso. El área de las paredes es $2xz + 2yz$ luego, $6000 \cdot (2xz + 2yz) = 6000 \cdot (16 + 4\sqrt{2})$ es el costo de las paredes. Finalmente el área de la tapa es xy luego, $7000 \cdot xy = 7000 \cdot 4\sqrt{2}$ es el costo de la tapa. La suma de tales costos es el costo total mínimo.

3.- Calcule el área total ($R_1 + R_2$) limitada por las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = -x + 6$ e $y = 1$



Determinamos R_1 mediante el calculo

$$R_1 = \int_1^4 \sqrt{x} - 1 \, dx = \left(\frac{2}{3} x^{3/2} - x \right) \Big|_1^4 = \frac{5}{3}$$

Note que $\int_1^4 1 \, dx$ es sólo el área del rectángulo bajo R_1 .

De igual manera determinamos R_2 mediante el calculo

$$R_2 = \int_4^5 -x + 6 - 1 \, dx = \left(5x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_4^5 = \frac{1}{2}$$

De nuevo, note que $\int_4^5 1 \, dx$ es sólo el área del rectángulo bajo R_2 .

Por lo tanto $R_1 + R_2 = \frac{5}{3} + \frac{1}{2}$

4.- Trace la gráficos de una función f que tiene las siguientes propiedades

- (1) $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$.
- (2) f es discontinua de primera especie en $x = -1$ y de segunda especie en $x = 3$.
- (3) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$, y f tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.
- (4) $f(0) = f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$, $f(1) = 3$.
- (5) $f'(0)$ y $f''(0)$ no existen
- (6) $f'(x) > 0$ para $x < -1$ y para $0 < x < 1$. $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 0$ para $1 < x < 3$ y para $3 < x < \infty$

(7) $f''(x) > 0$ para $x < -1$ para $-1 < x < 0$ y para $x > 3$. $f''(x) < 0$ para $0 < x < 3$

La condición $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$ significa que el gráfico de $f(x)$ se “corta” al pasar por $-1, 3$.

Que f sea discontinua de primera especie en $x = -1$ quiere decir que los límites laterales

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

son diferentes. Mientras que $f(x)$ sea discontinua de segunda especie en $x = 3$ quiere decir, por ejemplo, que $f(x)$ tiene una asíntota vertical de ecuación $x = 3$.

Las condiciones $f(0) = f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$, $f(1) = 3$ son obvias.

Por otro lado la exigencia de que las derivadas $f'(0)$ y $f''(0)$ no existan puede significar que el gráfico de $f(x)$ tiene una punta en $(0, f(0))$. Luego, $f'(0)$ no existe. Para que $f''(0)$ exista al menos debe existir $f'(0)$. Por lo tanto obtenemos las dos condiciones.

Que $f'(x) > 0$ sobre $]-\infty, -1[\cup]0, 1[$ equivale a decir que $f(x)$ es creciente sobre ese conjunto. De la misma manera imponer que $f'(x) < 0$ sobre $]-1, 0[\cup]1, 3[\cup]3, \infty[$ equivale a decir que $f(x)$ es decreciente sobre $]-1, 0[\cup]1, 3[\cup]3, \infty[$.

Finalmente las condiciones sobre el signo de $f''(x)$ dan cuenta de los intervalos de concavidad de $f(x)$ (Si $f''(x) > 0$, $f(x)$ es una función convexa. Si $f''(x) < 0$, $f(x)$ es una función concava)

Con este análisis ya es posible obtener un gráfico para $f(x)$