



FACULTAD DE CIENCIAS  
AGRONÓMICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

## Pruebas de comparaciones múltiples de medias

Erika Kania Kuhl  
Ing. Agr. Dr.

1

### Prueba de comparaciones múltiples

---

El análisis de varianza es un procedimiento poderoso para probar la homogeneidad de un conjunto de medias poblacionales (o grupos, o tratamientos).

Sin embargo, si se rechaza la hipótesis nula, de igualdad de medias:

**¿Cuál o cuáles de las medias poblacionales en estudio son las diferentes?**

2

## Prueba de comparaciones múltiples

Generalmente el investigador desea ir más allá de la simple conclusión de que hay diferencias entre las medias del conjunto, pues le interesa saber entre que poblaciones (o grupos) están las diferencias poblacionales en términos de sus medias.

Si se ha rechazado  $H_0$ , es obvio que la máxima diferencia observada entre los promedios de dos tratamientos debe corresponder a una diferencia verdadera entre las  $\mu$ , pero ¿Qué puede decirse de las diferencias entre los promedios intermedios?

Para responder esta interrogante se han planteado diversos procedimientos denominados pruebas de Comparaciones Múltiples.

3

## Prueba de comparaciones múltiples

Básicamente las pruebas consisten en calcular cada una de las diferencias ( $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2$ ) por ejemplo) y compararlas con un **valor crítico**

4

## Prueba de comparaciones múltiples

Existen varias alternativas para llevar adelante este tipo de pruebas:

- Tukey
- SNK
- Duncan
- LSD Fisher
- DGC
- Entre otras

5

## Ejemplo

Supongamos un ensayo en donde se aplican 4 tratamientos:

Para 4 tratamientos existen 6 pares posibles combinaciones:

$\mu_1 - \mu_2$

$\mu_1 - \mu_3$

$\mu_1 - \mu_4$

$\mu_2 - \mu_3$

$\mu_2 - \mu_4$

$\mu_3 - \mu_4$

$$H_0 : u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u$$

$$H_A : \text{existe } u_i \neq u$$

6

## Procedimiento

1) Establecer un cuadro con los promedios de los tratamientos



		MENOR			MAYOR
Tratamiento		$\bar{Y}_4$	$\bar{Y}_3$	$\bar{Y}_2$	$\bar{Y}_1$
MAYOR	$\bar{Y}_1$	$ (\bar{Y}_{\text{fila}} - \bar{Y}_{\text{columna}})  = d$			
	$\bar{Y}_2$				
	$\bar{Y}_3$				
MENOR	$\bar{Y}_4$				

Media muestral =  $\bar{Y}$   
Media poblacional =  $\mu$

7

## Procedimiento

1) Establecer un cuadro con los promedios de los tratamientos

$\bar{Y}_1 = 18$

$\bar{Y}_2 = 12$

$\bar{Y}_3 = 20$

$\bar{Y}_4 = 15$

Tratamiento		T2	T4	T1	T3
	$\bar{Y}_i$				
T3					
T1					
T4					
T2					

8

## Procedimiento

1) Establecer un cuadro con los promedios de los tratamientos

$$\bar{Y}_1 = 18$$

$$\bar{Y}_2 = 12$$

$$\bar{Y}_3 = 20$$

$$\bar{Y}_4 = 15$$

Tratamiento		T2	T4	T1	T3
	$\bar{Y}_i$	12	15	18	20
T3	20				
T1	18				
T4	15				
T2	12				

9

## Procedimiento

1) Establecer un cuadro con los promedios de los tratamientos

$$\bar{Y}_1 = 18$$

$$\bar{Y}_2 = 12$$

$$\bar{Y}_3 = 20$$

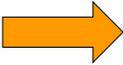
$$\bar{Y}_4 = 15$$

Tratamiento		T2	T4	T1	T3
	$\bar{Y}_i$	12	15	18	20
T3	20	8	5	2	-
T1	18	6	3	-	
T4	15	3	-		
T2	12	-			

10

## Procedimiento

2) Se establece un estadígrafo basado en la variabilidad de los datos (medida en términos de la variabilidad del CME) y de un valor de tabla que depende del tipo de prueba a utilizar

Estadígrafo  VALOR CRÍTICO (VC)

Que es función de (CME, valor de tabla)

11

## Procedimiento

3) Se compara cada diferencia obtenida con un Valor Crítico

Si resulta que:

$d > VC$    $d$  es una diferencia significativa (promedios unidos por letras diferentes)

$d \leq VC$    $d$  es una diferencia no significativa (promedios unidos por letras iguales)

$H_0 : \mu_i = \mu_j$  Ns: no significativo

$H_A : \mu_i \neq \mu_j$  \* : Significativo

12

## Diferencias significativas

Es una **diferencia observada** muy improbablemente atribuida al **mero azar**. La diferencia significativa entre tratamientos indica **evidencia estadística** de una **diferencia real entre parámetros**, es decir, diferencias significativas entre medias muestrales implica diferencias significativas entre medias poblacionales.

$d > VC$    $d$  es una diferencia significativa  
(promedios unidos por letras diferentes)

13

## Diferencias no significativas

Es una **diferencia observada** atribuible al **puro azar**, es decir, diferencias no significativas entre medias muestrales implica igualdad de medias poblacionales

Tratamientos que comparten una misma letra no se pueden declarar como estadísticamente diferentes, es decir las medias muestrales observadas pueden haberse dado por el azar y por lo tanto no ser repetibles

$d \leq VC$    $d$  es una diferencia no significativa  
(promedios unidos por letras iguales)

14

## Procedimiento

3) Se compara cada diferencia obtenida con un Valor Crítico

Supongamos un VC = 4

Tratamiento		T2	T4	T1	T3
	$\bar{Y}_i$ .	<b>12</b>	<b>15</b>	<b>18</b>	<b>20</b>
T3	<b>20</b>	8	5	2	-
T1	<b>18</b>	6	3	-	
T4	<b>15</b>	3	-		
T2	<b>12</b>	-			

15

## Procedimiento

3) Se compara cada diferencia obtenida con un Valor Crítico

Supongamos un VC = 4

Tratamiento		T2	T4	T1	T3
	$\bar{Y}_i$ .	<b>12</b>	<b>15</b>	<b>18</b>	<b>20</b>
T3	<b>20</b>	8*	5*	2 <sup>ns</sup>	-
T1	<b>18</b>	6*	3 <sup>ns</sup>	-	
T4	<b>15</b>	3 <sup>ns</sup>	-		
T2	<b>12</b>	-			

16

## Procedimiento

3) Se compara cada diferencia obtenida con un Valor Crítico

$$\mu_3 \neq \mu_2$$

$$\mu_3 \neq \mu_4$$

$$\mu_1 \neq \mu_2$$

$$\mu_3 = \mu_1$$

$$\mu_1 = \mu_4$$

$$\mu_4 = \mu_2$$

Tratamiento		T2	T4	T1	T3
	$\bar{Y}_i$	12	15	18	20
T3	20	8*	5*	2 <sup>ns</sup>	-
T1	18	6*	3 <sup>ns</sup>	-	
T4	15	3 <sup>ns</sup>	-		
T2	12	-			

17

## Procedimiento

4) Se resume el resultado de las comparaciones múltiples en una tabla con promedios unidos por letras (Tabla con letras)

a=Mejor Tratamiento  
(+ grande en este caso)

Tratamiento	Nombre variable (unidad)
T3	20
T1	18
T4	15
T2	12

18

## Procedimiento

4) Se resume el resultado de las comparaciones múltiples en una tabla con promedios unidos por letras (Tabla con letras)

**a=Mejor Tratamiento  
(+ grande en este caso)**

Tratamiento	Nombre variable (unidad)
T3	20
T1	18
T4	15
T2	12

Leer de derecha a izquierda

-Partir con una "a" para todas las ns en la primera fila

-Partir con una "b" para todas las ns en la segunda fila....etc.

19

		T2	T4	T1	T3
	$\bar{Y}_i$	12	15	18	20
T3	20	8*	5*	2 <sup>ns</sup>	-
T1	18	6*	3 <sup>ns</sup>	-	
T4	15	3 <sup>ns</sup>	-		
T2	12	-			

Trat	Nombre variable (unidad)
T3	20 a
T1	18 a
T4	15
T2	12

20

		T2	T4	T1	T3	Trat	Nombre variable (unidad)
	$\bar{Y}_i$	12	15	18	20		
T3	20	8*	5*	2 <sup>ns</sup>	-	T3	20 a
T1	18	6*	3 <sup>ns</sup>	-		T1	18 a b
T4	15	3 <sup>ns</sup>	-			T4	15 b
T2	12	-				T2	12

21

		T2	T4	T1	T3	Trat	Nombre variable (unidad)
	$\bar{Y}_i$	12	15	18	20		
T3	20	8*	5*	2 <sup>ns</sup>	-	T3	20 a
T1	18	6*	3 <sup>ns</sup>	-		T1	18 a b
T4	15	3 <sup>ns</sup>	-			T4	15 b c
T2	12	-				T2	12 c

22

## Procedimiento

4) Se resume el resultado de las comparaciones múltiples en una tabla con promedios unidos por letras (Tabla con letras)

Tratamiento	Nombre variable (unidad)	$\alpha$ =Mejor Tratamiento (+ grande en este caso)
T3	20 a	
T1	18 a b	
T4	15 b c	
T2	12 c	

Promedios unidos por letras iguales en sentido vertical indican diferencias estadísticamente no significativas entre los tratamientos, según la prueba de \_\_\_\_\_ (p-value > 0,05)

23

## Procedimiento

4) Se resume el resultado de las comparaciones múltiples en una tabla con promedios unidos por letras (Tabla con letras)

Tratamiento	Nombre variable (unidad)
T3	20 a
T1	18 a b
T4	15 b c
T2	12 c

En la PCM no se aplican las relaciones de equivalencia, es incorrecto decir:

Si  $\mu_1 = \mu_3$  y  $\mu_1 = \mu_4$ , entonces  $\mu_3 = \mu_4$

24

## Procedimiento

4) Se resume el resultado de las comparaciones múltiples en una tabla con promedios unidos por letras (Tabla con letras)

Tratamiento	Nombre variable (unidad)
T3	20 a
T1	18 a b
T4	15 b c
T2	12 c

En la PCM no se aplican las relaciones de equivalencia, es incorrecto decir:

Si  $\mu_1 = \mu_3$  y  $\mu_1 = \mu_4$ , entonces  ~~$\mu_3 = \mu_4$~~

25

## Procedimiento

4) Se resume el resultado de las comparaciones múltiples en una tabla con promedios unidos por letras (Tabla con letras)

Tratamiento	Nombre variable (unidad)
T3	20 a
T1	18 a b
T4	15 b c
T2	12 c

Es incorrecto hablar de tratamientos "similares", solamente:

- Existen diferencias estadísticamente significativas o
- No existen diferencias estadísticamente significativas

26

## Ejemplo 2

Tratamiento		T6	T5	T2	T4	T1	T3
	$\bar{Y}_i$						
T3		*	*	*	*	ns	
T1		*	*	*	ns		
T4		*	*	ns			
T2		*	*				
T5		*					
T6							

27

## Ejemplo 2

---

Tratamiento Promedio

---

T3

T1

T4

T2

T5

T6

---

28

## Ejemplo 2

		Trat		T6	T5	T2	T4	T1	T3
Tratamiento Promedio			ȳ <sub>i</sub> .						
T3	a	T3		*	*	*	*	ns	
T1	a b	T1		*	*	*	ns		
T4	b c	T4		*	*	ns			
T2	c	T2		*	*				
T5		T5		*					
T6		T6							

29

## Ejemplo 2

		Trat		T6	T5	T2	T4	T1	T3
Tratamiento Promedio			ȳ <sub>i</sub> .						
T3	a	T3		*	*	*	*	ns	
T1	a b	T1		*	*	*	ns		
T4	b c	T4		*	*	ns			
T2	c d	T2		*	*				
T5	e	T5		*					
T6		T6							

30

## Ejemplo 2

---

Tratamiento Promedio

---

T3                    a

T1                    a b

T4                    b c

T2                    c d

T5                    e

T6                    f

---

31

## Ejemplo 2

---

Tratamiento Promedio

---

T3                    a                    a

T1                    a b                    a b

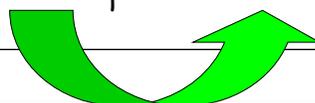
T4                    b c                    b c

T2                    c d                    c

T5                    e                    d

T6                    f                    e

---



32

### Ejemplo 3

Tratamiento		T6	T5	T2	T4	T1	T3
	$\bar{Y}_i$						
T3		*	*	*	*	ns	
T1		*	ns	ns	ns		
T4		*	ns	ns			
T2		*	ns				
T5		*					
T6							

33

### Ejemplo 3

---

Tratamiento Promedio

---

T3

T1

T4

T2

T5

T6

---

34

### Ejemplo 3

---

Tratamiento Promedio

---

T3	a
T1	a b
T4	b c
T2	b c d
T5	b c d e
T6	f

---

35

### Ejemplo 3

---

Tratamiento Promedio

---

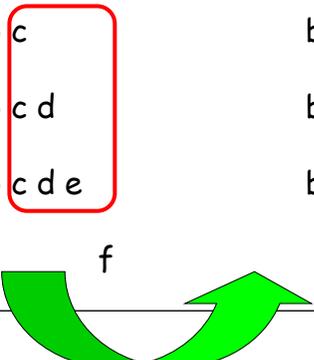
T3	a
T1	a b
T4	b c
T2	b c d
T5	b c d e
T6	f

---

36

### Ejemplo 3

Tratamiento Promedio		
T3	a	a
T1	a b	a b
T4	b c	b
T2	b c d	b
T5	b c d e	b
T6	f	c



37

### ¿Cómo leer o interpretar los Cuadros?

Hay que expresar todas las diferencias significativas

#### Ejemplo 4

Tratamiento Promedio	
T4	a
T3	a b
T5	a b
T1	a b
T2	b

38

## ¿Cómo leer o interpretar los Cuadros?

Hay que expresar todas las diferencias significativas

### Ejemplo 4

Tratamiento	Promedio
T4	a
T3	a b
T5	a b
T1	a b
T2	b

¿Cuál diferencia es estadísticamente significativa?

39

## ¿Cómo leer o interpretar los Cuadros?

Hay que expresar todas las diferencias significativas

### Ejemplo 4

Tratamiento	Promedio
T4	a
T3	a b
T5	a b
T1	a b
T2	b

$\mu_4 \neq \mu_2$   
(Promedio poblacional 4 presenta diferencias estadísticamente significativas con el promedio poblacional 2)

40

## ¿Cómo leer o interpretar los Cuadros?

Hay que expresar todas las diferencias significativas

### Ejemplo 4

Tratamiento	Promedio		
T4	a	Mayor	Supongamos que la variable respuesta es: Rendimiento
T3	a b		
T5	a b		-Encuentre el o los mejores tratamientos
T1	a b		-Encuentre el o los peores tratamientos
T2	b	Menor	-Justifique

41

## ¿Cómo leer o interpretar los Cuadros?

Hay que expresar todas las diferencias significativas

### Ejemplo 4

Tratamiento	Promedio		
T4	Mayor a		<u>Los mejores tratamientos</u> : T4, T3, T5, T1 (por tener los mayores rendimientos y estar unidos por la letra "a")
T3	a b		
T5	a b		
T1	a b		<u>Los peores tratamientos</u> : T3, T5, T1, T2 (por tener los menores rendimientos y estar unidos por la letra "b")
T2	Menor b		

42

## ¿Cómo leer o interpretar los Cuadros?

Hay que expresar todas las diferencias significativas

### Ejemplo 5

Tratamiento	Promedio
T4	a
T3	a
T5	a b
T1	b
T6	b c
T2	c

43

## ¿Cómo leer o interpretar los Cuadros?

Hay que expresar todas las diferencias significativas

### Ejemplo 5

Tratamiento	Promedio	
T4	a	$\mu_4 \neq \mu_1$
		$\mu_4 \neq \mu_6$
		$\mu_4 \neq \mu_2$
T3	a	
T5	a b	$\mu_3 \neq \mu_1$
		$\mu_3 \neq \mu_6$
T1	b	$\mu_3 \neq \mu_2$
T6	b c	
T2	c	$\mu_5 \neq \mu_2$
		$\mu_1 \neq \mu_2$

44

## Prueba de Tukey

45

### Valor Crítico

$d > VC$  → d es una diferencia significativa (\*)

$d \leq VC$  → d es una diferencia no significativa

$$VC = q \times \sqrt{CME/r}$$

Donde:

q: es un **valor de tabla**

CME: cuadrado medio del error

r: número de repeticiones por tratamiento (observaciones por grupo)

46

## Ejemplo Prueba de Tukey

En un ensayo con 5 tratamientos y 5 repeticiones por tratamiento se obtuvieron los siguientes resultados:

CME: 108

$\bar{Y}_1 = 52$

$\bar{Y}_2 = 69$

$\bar{Y}_3 = 82$

$\bar{Y}_4 = 85$

$\bar{Y}_5 = 94$

Variable respuesta: altura de planta (cm)

47

## Procedimiento

1) Establecer un cuadro con los promedios de los tratamientos




		MENOR			MAYOR
Tratamiento		$\bar{Y}_4$	$\bar{Y}_3$	$\bar{Y}_2$	$\bar{Y}_1$
MAYOR	$\bar{Y}_1$	$(\bar{Y}_{\text{fila}} - \bar{Y}_{\text{columna}})   = d$			
	$\bar{Y}_2$				
	$\bar{Y}_3$				
MENOR	$\bar{Y}_4$				

48

## Procedimiento

1) Establecer un cuadro con los promedios de los tratamientos

$\bar{Y}_1 = 52$   
 $\bar{Y}_2 = 69$   
 $\bar{Y}_3 = 82$   
 $\bar{Y}_4 = 85$   
 $\bar{Y}_5 = 94$

Tratamiento		T1	T2	T3	T4	T5
	$\bar{Y}_i$	52	69	82	85	94
T5	94					
T4	85					
T3	82					
T2	69					
T1	52					

49

## Procedimiento

1) Establecer un cuadro con los promedios de los tratamientos

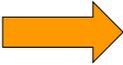
$\bar{Y}_1 = 52$   
 $\bar{Y}_2 = 69$   
 $\bar{Y}_3 = 82$   
 $\bar{Y}_4 = 85$   
 $\bar{Y}_5 = 94$

Tratamiento		T1	T2	T3	T4	T5
	$\bar{Y}_i$	52	69	82	85	94
T5	94	42	25	12	9	-
T4	85	33	16	3	-	-
T3	82	30	13	-	-	-
T2	69	17	-	-	-	-
T1	52	-	-	-	-	-

50

## Procedimiento

2) Se establece un estadígrafo basado en la variabilidad de los datos (medida en términos de la variabilidad del CME) y de un valor de tabla que depende del tipo de prueba a utilizar

Estadígrafo  VALOR CRÍTICO (VC)

$$VC (Tukey) = q \times \sqrt{CME/r}$$

51

## Prueba de Tukey

2) Se establece un estadígrafo basado en la variabilidad de los datos (medida en términos de la variabilidad del CME) y de un valor de tabla que depende del tipo de prueba a utilizar

$$VC (Tukey) = q \times \sqrt{CME/r}$$

$$VC (Tukey) = 4,232 \times \sqrt{108/5}$$

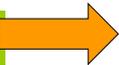
$$VC (Tukey) = 19,7 \text{ (cm)}$$

52

## Procedimiento

3) Se compara cada diferencia obtenida con un Valor Crítico

Si resulta que:

$d > VC (19,7)$   d es una diferencia significativa

$d \leq VC (19,7)$   d es una diferencia no significativa

53

## Procedimiento

1) Establecer un cuadro con los promedios de los tratamientos

$\bar{Y}_1 = 52$ $\bar{Y}_2 = 69$ $\bar{Y}_3 = 82$ $\bar{Y}_4 = 85$ $\bar{Y}_5 = 94$  $VC: 19,7$	Tratamiento		T1	T2	T3	T4	T5
		$\bar{Y}_i$	<b>52</b>	<b>69</b>	<b>82</b>	<b>85</b>	<b>94</b>
	T5	<b>94</b>	42	25	12	9	-
	T4	<b>85</b>	33	16	3	-	-
	T3	<b>82</b>	30	13	-	-	-
	T2	<b>69</b>	17	-	-	-	-
	T1	<b>52</b>	-	-	-	-	-

54

## Procedimiento

1) Establecer un cuadro con los promedios de los tratamientos

$\bar{Y}_1 = 52$ $\bar{Y}_2 = 69$ $\bar{Y}_3 = 82$ $\bar{Y}_4 = 85$ $\bar{Y}_5 = 94$  VC: 19,7	Tratamiento		T1	T2	T3	T4	T5
		$\bar{Y}_i$	52	69	82	85	94
	T5	94	42 *	25 *	12	9	-
	T4	85	33 *	16	3	-	-
	T3	82	30 *	13	-	-	-
	T2	69	17	-	-	-	-
	T1	52	-	-	-	-	-

55

## Procedimiento

4) Se resume el resultado de las comparaciones múltiples en una tabla con promedios unidos por letras (Tabla con letras)

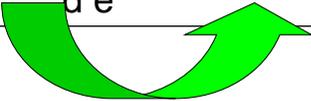
Tratamiento	Altura planta (cm)
T5	94 a
T4	85 b
T3	82 c
T2	69 d
T1	52 e

56

## Procedimiento

4) Se resume el resultado de las comparaciones múltiples en una tabla con promedios unidos por letras (Tabla con letras)

Tratamiento	Altura planta (cm)
T5	94 a
T4	85 a b
T3	82 a b c
T2	69 b c d
T1	52 d e

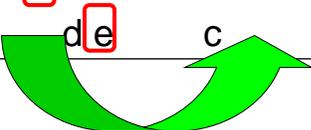


57

## Procedimiento

4) Se resume el resultado de las comparaciones múltiples en una tabla con promedios unidos por letras (Tabla con letras)

Tratamiento	Altura planta (cm)	
T5	94 a	a
T4	85 a b	ab
T3	82 a b c	ab
T2	69 b c d	bc
T1	52 d e	c



58

## Presentación de resultados

Cuadro XX. Título..

Tratamiento	Altura planta (cm)	
T5	94	a
T4	85	ab
T3	82	ab
T2	69	bc
T1	52	c

Promedios unidos por letras iguales en sentido vertical indican diferencias estadísticamente no significativas entre los tratamientos, según la prueba de Tukey (p-value > 0,05)

59

Tratamiento	Promedio	Tukey	SNK	Duncan
T5	94	a	a	a
T4	85	ab	ab	a
T3	82	ab	ab	ab
T2	69	bc	b	b
T1	52	c	c	c

60

## Expresando todas las diferencias significativas

Tukey	SNK	Duncan
$\mu_5 \neq \mu_2$	$\mu_5 \neq \mu_2$	$\mu_5 \neq \mu_2$

61

## Expresando todas las diferencias significativas

Tukey	SNK	Duncan
$\mu_5 \neq \mu_2$	$\mu_5 \neq \mu_2$	$\mu_5 \neq \mu_2$
$\mu_5 \neq \mu_1$	$\mu_5 \neq \mu_1$	$\mu_5 \neq \mu_1$
$\mu_4 \neq \mu_1$	$\mu_4 \neq \mu_1$	$\mu_4 \neq \mu_2$
$\mu_3 \neq \mu_1$	$\mu_3 \neq \mu_1$	$\mu_4 \neq \mu_1$
	$\mu_2 \neq \mu_1$	$\mu_3 \neq \mu_1$
		$\mu_2 \neq \mu_1$

62

<b>Tukey</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Es + exigente</li> <li>•Muy conservadora</li> <li>•Encuentra menos diferencias</li> </ul>
<b>SNK</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Es + sensible que Tukey</li> <li>•Encuentra + fácil las diferencias que Tukey</li> </ul>
<b>Duncan</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•Es menos estricta</li> <li>•Es + sensible que Tukey y SNK</li> <li>•Encuentra + fácil las diferencias que Tukey y SNK</li> </ul>

63



FACULTAD DE CIENCIAS  
AGRONÓMICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

## Pruebas de comparaciones múltiples de medias

Erika Kania Kuhl  
Ing. Agr. Dr.

64