Asíntotas

Claudio Carrasco, Rodrigo Contreras y Geir Da Silva

by

Profesores Mates 1

Primavera 2024

Introducción

Materias que repasaremos

Temario

1. Asíntotas
   - 1.1 Límites al infinito
   - 1.2 Asíntotas
   - 1.3 Ejercicios
   - 1.4 Problemas

Límites

Límites al infinito (y más allá?)

A veces nos interesa comprender el comportamiento de una función en los casos extremos, *i.e.* qué ocurre si $x = \pm 10^9$

En esos casos, debemos estudiarlo calculando dos límites:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

Funciones racionales (definición)

Una función racional es aquella que está definida como una división de dos polinomios:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Límites de funciones racionales

Notemos que si x toma un valor muy alto, las siguientes expresiones son esencialmente las mismas:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{2x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Esto debido a que si $x = 1000000000$, no habrá mucha diferencia si a este valor le sumamos o restamos uno.

Límites de funciones racionales

Ocurre lo mismo si los polinomios no son de grado 1, es decir:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5x}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(x+5)}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot x}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

En general, sólo debemos quedarnos con los términos principales (de mayor grado) de cada polinomio.

Ejemplo

Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^5 - 6x^2 + 100}{-12x^5 + x^4 - x^3 + 6x} =$$

Ejemplo

Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^5 - 6x^2 + 100}{-12x^5 + x^4 - x^3 + 6x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^5}{-12x^5} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$$

Observación

Si la función contiene en su numerador o denominador una exponencial, ésta tiene *jerarquía* sobre los polinomios cuando su exponente tiende a $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4e^x + x^8}{e^x - 10x^9} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4e^x}{e^x} = 4$$

Y tiene la *jerarquía* más baja si su exponente tiende a $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4e^x + x^8}{e^x - 10x^9} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^8}{-10x^9} = 0$$

Ejercicios. Calcule:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{12x^6 - 8x + 1}{4x^6 - 100x + 500}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4e^x - 4x^5}{2x^5 + 2e^x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4e^x - 4x^5}{2x^5 + 2e^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + x + e^{-x}}{e^x + 5x - e^{-x}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x + x + e^{-x}}{e^x + 5x - e^{-x}}$$

Ejercicios. Calcule:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{12x^6 - 8x + 1}{4x^6 - 100x + 500} \qquad 3$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4e^x - 4x^5}{2x^5 + 2e^x} \qquad 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4e^x - 4x^5}{2x^5 + 2e^x} \qquad -2$$

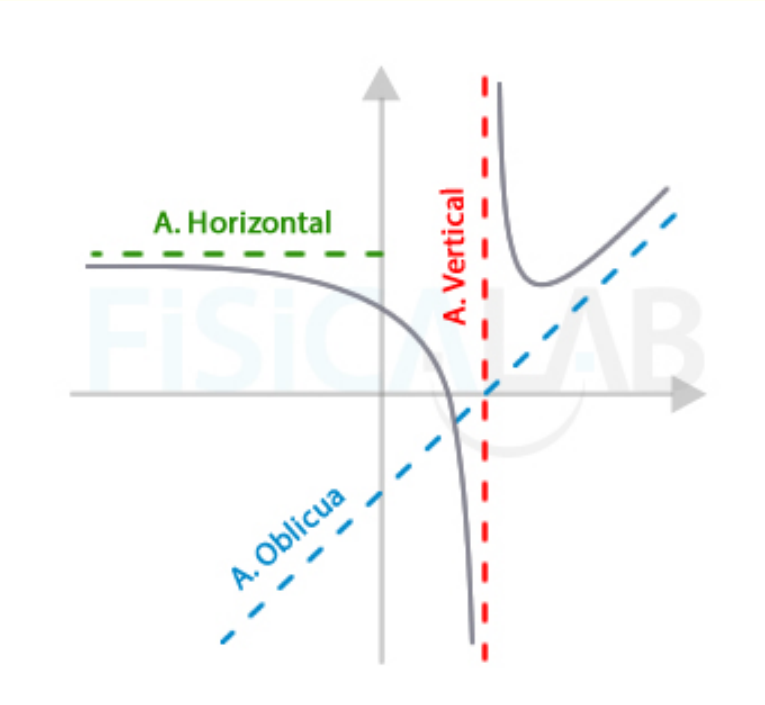
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + x + e^{-x}}{e^x + 5x - e^{-x}} \qquad 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x + x + e^{-x}}{e^x + 5x - e^{-x}} \qquad -1$$

Asíntotas

Asíntotas

Una asíntota es una recta que *aproxima* el comportamiento de una función en las vecindades de un punto cuando éste diverge (asíntotas verticales) o en el infinito.



Asíntotas

- Asíntota vertical: es cuando la función diverge al infinito en un punto:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$

- Asíntota horizontal: es cuando el límite de la derivada converge a cero en $\pm\infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f'(x) = 0$$

- Asíntota oblicua: es cuando el límite de la derivada converge a algún valor m en $\pm\infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f'(x) = m$$

Ejemplo

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x}$$

El denominador se anula en $x = 0$, por lo que es un punto crítico. Notemos, además, que:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{0} = \infty$$

Por lo que ahí podemos encontrar una asíntota vertical.

Ejemplo

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x}$$

Ahora calcularemos su derivada:

$$f'(x) = \frac{4x \cdot x - 1 \cdot (2x^2 + 1)}{x^2} = \frac{2x^2 - 1}{x^2}$$

Y calcularemos el límite de esta función cuando x tiende a infinito:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f'(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

Ejemplo

Es decir, conforme el valor de x incremente o decrezca, la función se verá como una recta de pendiente $m = 2$ ... pero entonces ¿cuál sería su coeficiente de posición?

$$y = 2x + n$$

En palabras técnicas, queremos que el siguiente límite sea nulo:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) - (mx + n) = 0$$

Porque eso significa que cuando x es muy grande, la función y la recta son **indistinguibles**.

Ejemplo

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x} \qquad f'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - (mx + n) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 1}{x} - 2x - n$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} - n\right) = n = 0$$

Es decir, la recta $y = 2x + 0$ aproxima a la función en el infinito.

Saquémosle el jugo al ejemplo 1

Si ya sabemos que su derivada es $f'(x) = \frac{2x^2-1}{x^2}$, encontremos sus puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Además, su segunda derivada es: $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, por lo tanto:

$$f(x_1) > 0 \wedge f(x_2) < 0$$

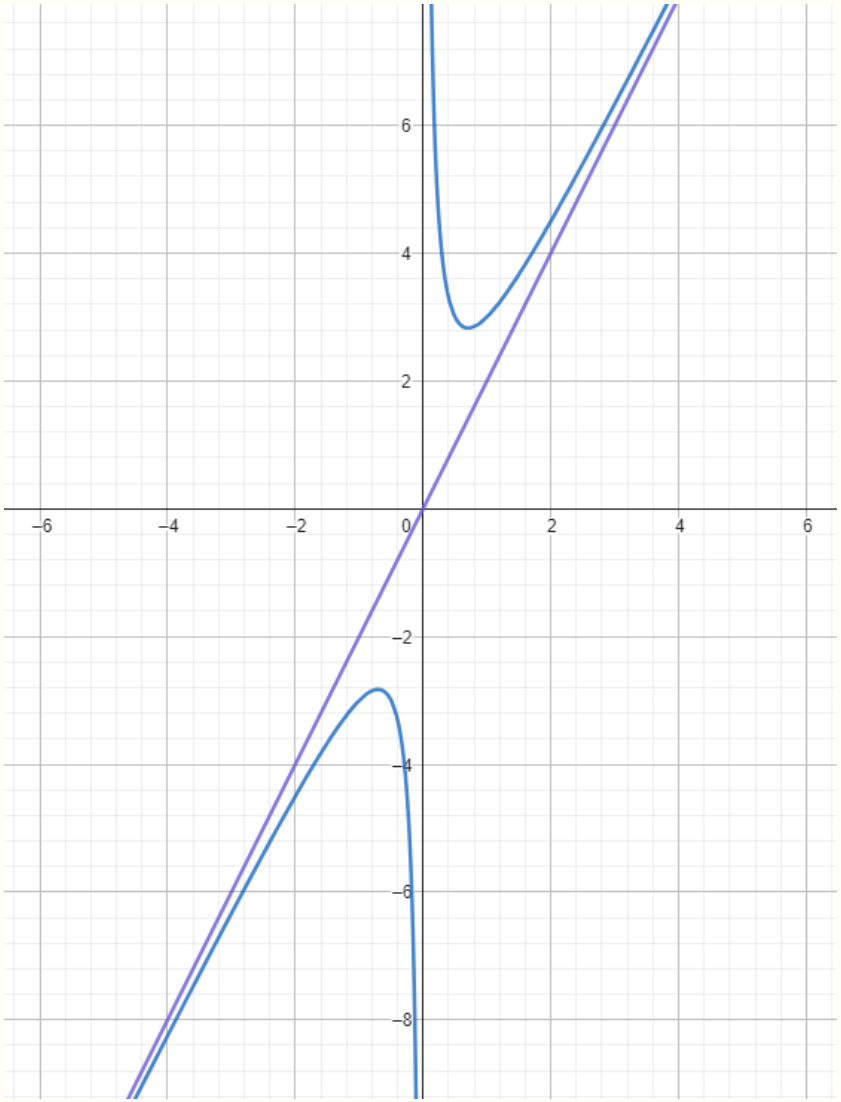
Es decir, los puntos x_1 y x_2 son, respectivamente, mínimo y máximo local.

Ahora grafiquemos

Sabemos:

- La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$
- Tiene mínimo local en $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- Tiene máximo local en $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
- Tiene asíntota oblícua $y = 2x$

Gráfica



Ejemplo 2

Analicemos una función famosa: la *tangente hiperbólica*.

$$tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Notemos que su denominador no puede ser cero ya que tanto e^x como e^{-x} son siempre positivos. Por lo tanto, no tiene asíntotas verticales.

Calculemos ahora su derivada:

$$tanh'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

Ejemplo 2

$$tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$tanh'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

Analicemos si es que tiene asíntotas horizontales u oblicuas:

$$\lim_{x \to +\infty} tanh'(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{(e^x)^2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} tanh'(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{(e^{-x})^2} = 0$$

Ejemplo 2

$$tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$tanh'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

Por lo tanto, tiene dos asíntotas horizontales. Encontremos sus coeficientes de posición:

$$n = \lim_{x \to +\infty} tanh(x) - mx = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$n = \lim_{x \to -\infty} tanh(x) - mx = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{-e^{-x}} = -1$$

Saquémosle el jugo al ejemplo 2

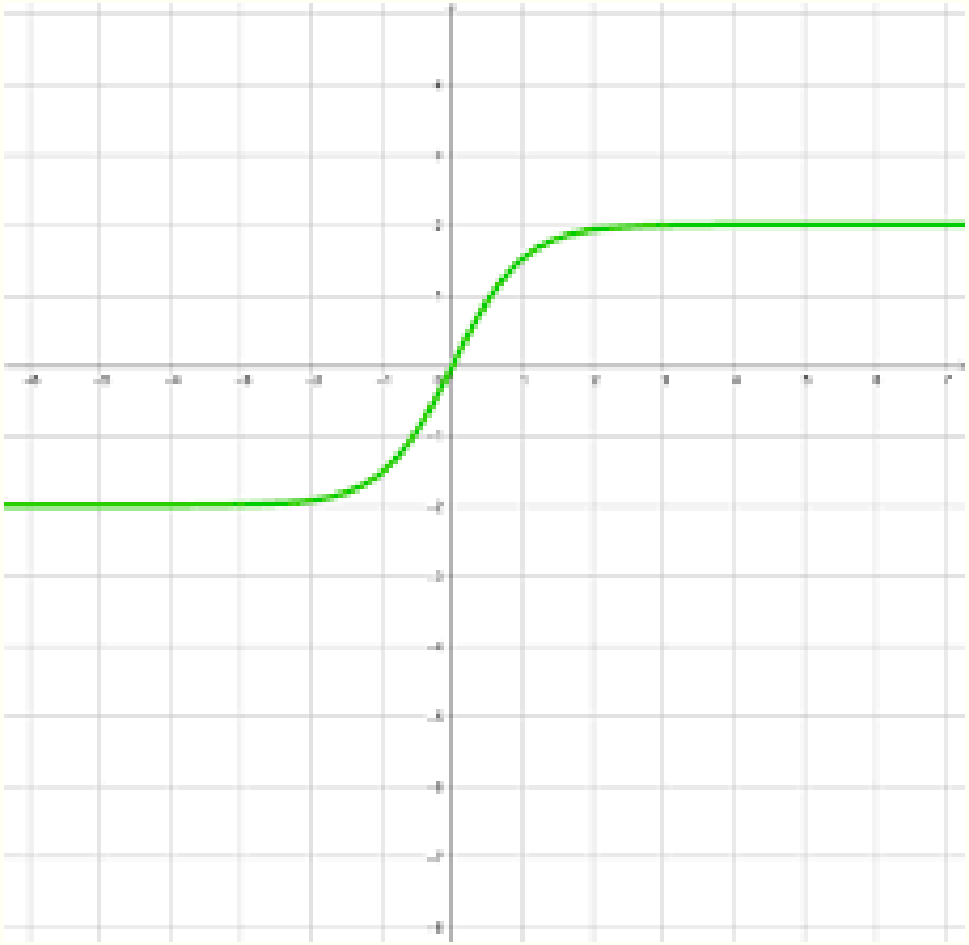
Notemos que su derivada es siempre estrictamente positiva:

$$tanh'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$$

Por lo tanto la función no tiene puntos críticos y es estrictamente creciente.

Por lo tanto, su gráfica empezará en -1 desde $-\infty$ y terminará en 1 hasta $+\infty$ siempre creciendo.

Gráfica



Ejercicios

Encuentre todas las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de las siguientes funciones. Luego intente graficarlas y compare usando GeoGebra.

- $f_1(x) = \frac{x+1}{x-1}$
- $f_2(x) = \frac{-4x+2}{x-5}$
- $f_3(x) = \frac{3x^3-x^2}{x^2-1}$
- $f_4(x) = \frac{x^4-1}{x^3-x^2}$
- $f_5(x) = cosech(x) = \frac{2}{e^x-e^{-x}}$
- $f_6(x) = \frac{e^x+x^2}{x^3}$