Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Agronómicas

Matemáticas 1 | **Compendio #10**
Curso: BBO-01C-001 | **Tema: Análisis de Curvas**
Profesores: Carrasco, Contreras, Da Silva | Semestre Otoño 2024

El poder de la imaginación nos hace infinitos.

John Muir, naturalista

1. Ejercicios

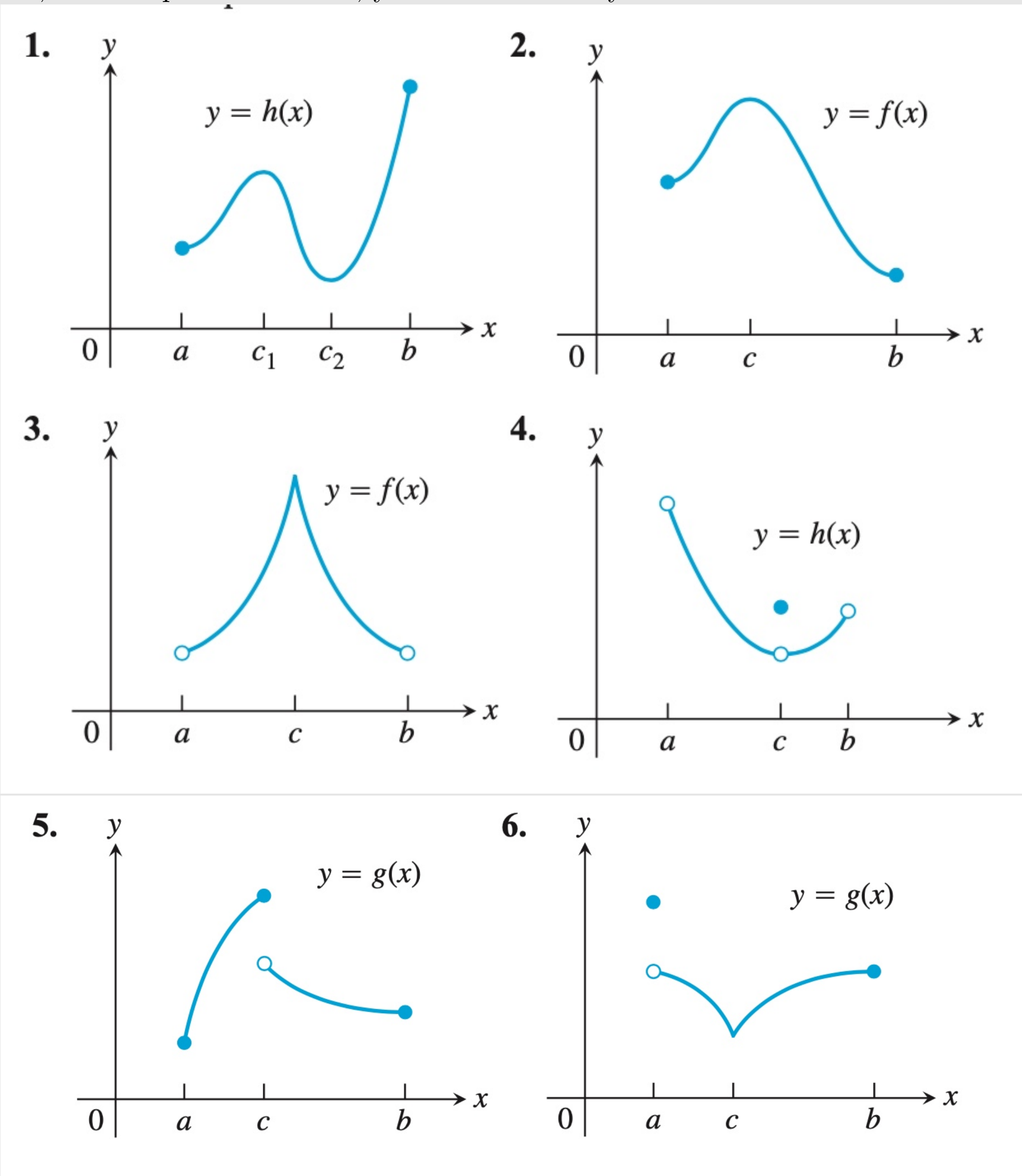
1. Determina si los siguientes puntos indicados son puntos críticos para las funciones dadas:

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, punto indicado: $x = 2$
2. $g(x) = e^x - 4x$, punto indicado: $x = 0$
3. $h(x) = \sin(x) + \cos(x)$, punto indicado: $x = \frac{\pi}{4}$
4. $p(x) = \log(x) + 2x$, punto indicado: $x = 1$
5. $q(x) = \frac{1}{x^2+1}$, punto indicado: $x = 0$
6. $r(x) = x^4 - 4x^2 + 4$, punto indicado: $x = 1$
7. $s(x) = 2x^5 - 5x^3 + x$, punto indicado: $x = 0$
8. $t(x) = \sqrt{x+3}$, punto indicado: $x = -2$
9. $v(x) = xe^{-x}$, punto indicado: $x = 1$

2. Determina los intervalos en los que las siguientes funciones son crecientes o decrecientes (confirme con una gráfica en Geogebra):

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$
2. $g(x) = e^x - x$
3. $p(x) = \log(x) + x^2$
4. $q(x) = \frac{1}{x} + x$
5. $r(x) = x^4 - 16x^2$
6. $s(x) = 3x^5 - 5x^3$
7. $u(x) = \sqrt{x+1}$
8. $f(x) = x^2 + 2x + 1$
9. $g(x) = -x^2 + 4x - 3$
10. $f(x) = x^3 - 2x - 2$

3. Discuta sobre las siguientes curvas los valores de máximo y mínimo absolutos, máximos y mínimos locales,si tienen puntos críticos , y zonas crecientes y decrecientes .



4.

1. Analiza la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ en el intervalo $[-1, 3]$. Determina los intervalos crecientes y decrecientes, los máximos y mínimos absolutos y relativos, y la concavidad.

2. Analiza la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ en el intervalo $[-2, 2]$. Determina los intervalos crecientes y decrecientes, los máximos y mínimos absolutos y relativos, y la concavidad.

3. Analiza la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ en el intervalo $[-2, 2]$. Determina los intervalos crecientes y decrecientes, los máximos y mínimos absolutos y relativos, y la concavidad.

4. Analiza la función $f(x) = x^2 e^{-x}$ en el intervalo $[0, 4]$. Determina los intervalos crecientes y decrecientes, los máximos y mínimos absolutos y relativos, y la concavidad.

5. Analiza la función $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ en el intervalo $[-2, 2]$. Determina los intervalos crecientes y decrecientes, los máximos y mínimos absolutos y relativos, y la concavidad.

6. Analiza la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ en el intervalo $[-2, 2]$. Determina los intervalos crecientes y decrecientes, los máximos y mínimos absolutos y relativos, y la concavidad.

5. Aplicaciones

1. En la carretera saliendo de una ciudad, la velocidad de los vehículos, medida en kilómetros por hora, que transitan entre las 2 pm y las 6 pm de un día viernes se modela mediante:

   $$v(t) = t^3 - 15t^2 + 72t + 8, \quad t \in [2, 6]$$

   donde t es la hora en que se hizo la medición.
   Determine en qué intervalos, entre las 2 pm y las 6 pm, la velocidad aumenta y en qué intervalos disminuye. ¿A qué hora se genera la máxima velocidad?

2. Una población de bacterias sigue el modelo de crecimiento $P(t) = 1000\left(1 + \frac{t}{10}\right)^2$ donde t es el tiempo en horas. Analiza esta función en el intervalo $[0, 20]$. Determina los intervalos de crecimiento, los máximos y mínimos relativos y absolutos, y la concavidad.

3. El beneficio $B(x)$ (en miles de dólares) de una empresa en función del número de unidades vendidas x está dado por $B(x) = -2x^2 + 24x - 50$. Analiza esta función en el intervalo $[0, 15]$. Determina los intervalos crecientes y decrecientes, los máximos y mínimos relativos y absolutos, y la concavidad.

2. Solucionario

1. Determina si son puntos críticos

1. Para $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, encontramos que $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Evaluando en $x = 2$,

$$f'(2) = 3(2)^2 - 6(2) = 0.$$

Por lo tanto, $x = 2$ es un punto crítico.

2. Para $g(x) = e^x - 4x$, calculamos $g'(x) = e^x - 4$. Evaluando en $x = 0$,

$$g'(0) = e^0 - 4 = -3.$$

Por lo tanto, $x = 0$ no es un punto crítico.

3. Para $h(x) = \sin(x) + \cos(x)$, obtenemos $h'(x) = \cos(x) - \sin(x)$. Evaluando en $x = \frac{\pi}{4}$,

$$h'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Por lo tanto, $x = \frac{\pi}{4}$ es un punto crítico.

4. Para $p(x) = \log(x) + 2x$, calculamos $p'(x) = \frac{1}{x} + 2$. Evaluando en $x = 1$,

$$p'(1) = \frac{1}{1} + 2 = 3.$$

Por lo tanto, $x = 1$ no es un punto crítico.

5. Para $q(x) = \frac{1}{x^2+1}$, encontramos $q'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$. Evaluando en $x = 0$,

$$q'(0) = -\frac{2(0)}{(0^2+1)^2} = 0.$$

Por lo tanto, $x = 0$ es un punto crítico.

6. Para $r(x) = x^4 - 4x^2 + 4$, calculamos $r'(x) = 4x^3 - 8x$. Evaluando en $x = 1$,

$$r'(1) = 4(1)^3 - 8(1) = -4.$$

Por lo tanto, $x = 1$ no es un punto crítico.

7. Para $s(x) = 2x^5 - 5x^3 + x$, encontramos $s'(x) = 10x^4 - 15x^2 + 1$. Evaluando en $x = 0$,

$$s'(0) = 10(0)^4 - 15(0)^2 + 1 = 1.$$

Por lo tanto, $x = 0$ no es un punto crítico.

8. Para $t(x) = \sqrt{x+3}$, calculamos $t'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$. Evaluando en $x = -2$,

$$t'(-2) = \frac{1}{2\sqrt{-2+3}} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $x = -2$ no es un punto crítico.

9. Para $v(x) = xe^{-x}$, obtenemos $v'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$. Evaluando en $x = 1$,

$$v'(1) = e^{-1} - 1e^{-1} = 0.$$

Por lo tanto, $x = 1$ es un punto crítico.

---

2. Encontrar intervalos crecientes o decrecientes:

1. Para $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, calculamos $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Resolviendo $f'(x) = 0$,

$$f'(x) = 3x(x-2) = 0 \implies x_1 = 0 \text{ o } x_2 = 2.$$

Encontramos dos Puntos Críticos por lo que evaluaremos según la siguiente Tabla de Signos

$x \in$	$]-\infty, 0[$	0	$[0, 2]$	2	$[2, +\infty[$
x	$-$	0	$+$	2	$+$
$(x-2)$	$-$	-2	$-$	0	$+$
$3x(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	0	$\nearrow$

Evaluamos el signo de $f'(x)$ en los intervalos determinados por estos puntos:

- $(-\infty, 0)$: $f'(x)$ es positiva (función creciente).
- $(0, 2)$: $f'(x)$ es negativa (función decreciente).
- $(2, \infty)$: $f'(x)$ es positiva (función creciente).

2. Para $g(x) = e^x - x$, calculamos $g'(x) = e^x - 1$. Resolviendo $g'(x) = 0$,

$$e^x = 1 \implies x = 0.$$

Encontramos sólo un punto crítico que usaremos en nuestra Tabla de Signos

$x \in$	$]-\infty, 0[$	0	$[2, +\infty[$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Entonces, según la Tabla de Signos de $g'(x)$:

- $(-\infty, 0)$: $g'(x)$ es negativo (función decreciente).
- $(0, \infty)$: $g'(x)$ es positivo (función creciente).

3. Para $p(x) = \log(x) + x^2$ y $x \in R^+$ el dominio de $\log(x)$, $p'(x) = \frac{1}{x} + 2x$. Resolviendo $p'(x) = 0$,

$$\frac{1}{x} + 2x = 0 \text{ no tiene soluciones reales positivas.}$$

$p'(x)$ es siempre positivo para $x > 0$ (función creciente).

4. Para $q(x) = \frac{1}{x} + x$, $q'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1$. Los Puntos Críticos serían $q'(x) = 0$,

$$-\frac{1}{x^2} + 1 = 0 \implies x = \pm 1.$$

Además, el punto crítico donde $q`(x)$ se indefine $x_3 = 0$.

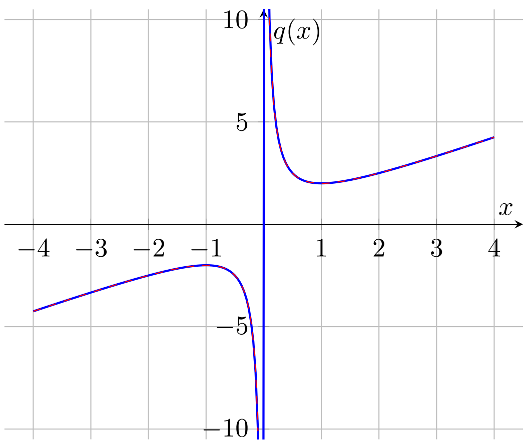
Reescribimos

$$q(x) = \frac{-1 + x^2}{x^2}$$

Usamos la Tabla de Signos considerando que $x^2 \geq 0$ para todo el dominio. Además, ordenamos los Puntos Críticos de menor a mayor.

$x \in$	$]-\infty,-1[$	-1	$]-1,0[$	0	$]0,1[$	1	$]1,+\infty[$
$(-1+x^2)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
(x^2)	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{(-1+x^2)}{x^2}$	$+$	0	$-$	I	$-$		$+$
$f'(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	I	$\searrow$	0	$\nearrow$

El gráfico es el siguiente



Evaluamos el signo de $q'(x)$:

- $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$: $q'(x)$ es positivo (función creciente).
- $(-1, 0)$ y $(0, 1)$: $q'(x)$ es negativo (función decreciente).

5. Para $r(x) = x^4 - 18x^2$, $r'(x) = 4x^3 - 36x$.

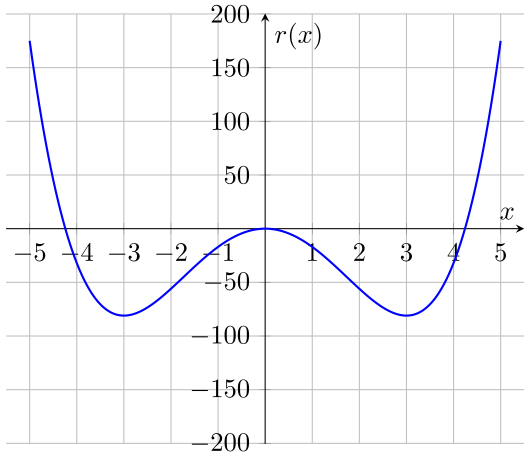
Buscamos los puntos críticos con $r'(x) = 0$,

$$4x(x^2 - 9) = 0 \implies x = 0, \pm 3.$$

La Tabla de Signos para 3 Puntos Críticos queda como

$x \in$	$]-\infty,-3[$	-3	$]-3,0[$	0	$]0,3[$	3	$]3,+\infty[$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
(x^2-9)	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$4x(x^2-9)$	$+$	0	$-$	0	$-$		$+$
$r'(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	0	$\searrow$	0	$\nearrow$

El gráfico es el siguiente



Evaluamos el signo de $r'(x)$:

- $(-\infty, -3)$ y $(0, 3)$: $r'(x)$ es negativa (función decreciente).
- $(-3, 0)$ y $(3, \infty)$: $r'(x)$ es positiva (función creciente).

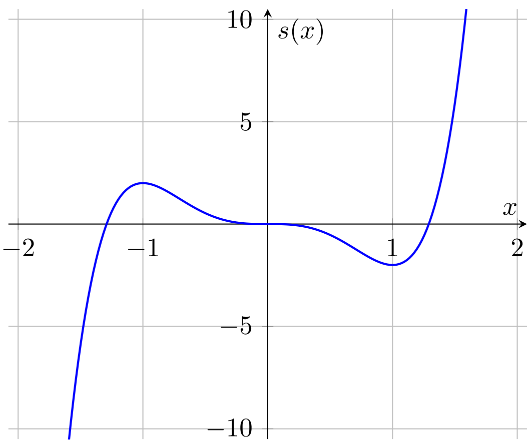
6. Para $s(x) = 3x^5 - 5x^3$, $s'(x) = 15x^4 - 15x^2$. Resolviendo $s'(x) = 0$,

$$15x^2(x^2 - 1) = 0 \implies x = 0, \pm 1.$$

Realice la Tabla de signos para los 3 Puntos Críticos.

(Llenar con la Tabla de signos e indicar intervalos de crecimiento y decrecimiento).

El gráfico de la función es el siguiente:



7. Para $u(x) = \sqrt{x+1}$, $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, que siempre es positivo para $x > -1$. Por lo tanto, $u(x)$ es siempre creciente para $x > -1$.

8. Para $f(x) = x^2 + 2x + 1$ es creciente para $x \geq -1$ y decreciente para $x \leq -1$

9. Para $g(x) = -x^2 + 4x - 3$ es creciente para $x \leq 2$ y decreciente para $x \geq 2$.

10. Para $f(x) = x^3 - 2x - 2$ encuentre la solución y discuta con compañeras/os.

3. Discusión:
Discuta entre compañeras/os sobre las siguientes curvas los valores de máximo y mínimo absolutos, máximos y mínimos locales, zonas crecientes y decrecientes, y si tienen puntos críticos.

4. Análisis de curvas

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ en el intervalo $[-1, 3]$

   - Derivada: $f'(x) = 3x^2 - 6x$
   - Puntos Críticos: $3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

     Ambos puntos críticos están dentro del dominio.
   - Tabla de signos de $f'(x)$:

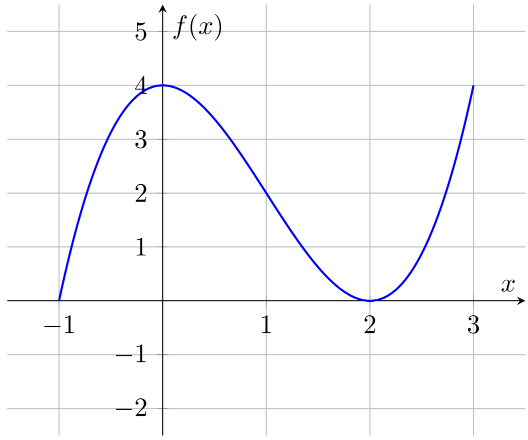
$x \in$	$[-1, 0[$	0	$]0, 2[$	2	$]2, 3]$
x	$-$	0	$+$	2	$+$
$(x-2)$	$-$	-2	$-$	0	$+$
$3x(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	0	$\nearrow$

   - Intervalos crecientes: $(-1, 0) \cup (2, 3)$
   - Intervalos decrecientes: $(0, 2)$
   - Máximos y mínimos relativos:
     - Máximo relativo en $x = 0$, con $f(0) = 4$
     - Mínimo relativo en $x = 2$, con $f(2) = 0$
     - Mínimo relativo en el borde inferior $f(-1) = 0$
     - Máximo relativo en el borde superior $f(3) = 4$.
   - Concavidad:
     - Segunda derivada: $f''(x) = 6x - 6$
     - Raíces de la segunda derivada: $x = 1$
     - Tabla de signos de $f''(x)$:

x	$-\infty$	1	∞
$f''(x)$	-	0	$+$

     - Concavidad hacia abajo: $(-\infty, 1)$
     - Concavidad hacia arriba: $(1, \infty)$
     - Punto de inflexión en $x = 1$
   - Máximo absoluto: No hay.
   - Mínimo absoluto: No hay.

El gráfico de la función es



2. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ en el intervalo $[-2, 2]$

   - Derivada: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4$
   - Raíces de la derivada: $4(x-1)^3 = 0 \Rightarrow x = 1$
   - Tabla de signos de $f'(x)$:

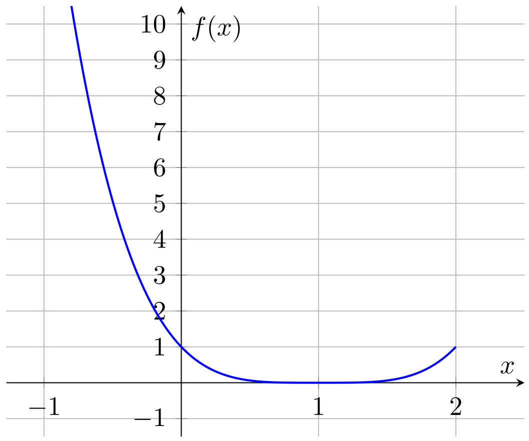
x	$-\infty$	1	∞
$f'(x)$	-	0	$+$

   - Intervalos crecientes: $(1, \infty)$
   - Intervalos decrecientes: $(-\infty, 1)$
   - Máximos y mínimos relativos:
     - Mínimo relativo en $x = 1$
   - Concavidad:
     - Segunda derivada: $f''(x) = 12x^2 - 24x + 12$
     - Raíces de la segunda derivada: $x = 1$
     - Tabla de signos de $f''(x)$:

x	$-\infty$	1	∞
$f''(x)$	$+$	0	$+$

     - Concavidad hacia arriba: $(-\infty, \infty)$
     - No hay puntos de inflexión.
   - Máximo absoluto: $f(-2) = 49$
   - Mínimo absoluto: $f(1) = 0$

El gráfico de la función es el siguiente



3.
- Derivada: $f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$
- Raíces de la derivada: $\cos(x) = \sin(x) \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + n\pi$
- Tabla de signos de $f'(x)$:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	2π	
$f'(x)$	$+$	0	-	0	$+$

- Intervalos crecientes: $(0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{5\pi}{4}, 2\pi)$
- Intervalos decrecientes: $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo en $x = \frac{\pi}{4}$
  - Mínimo relativo en $x = \frac{5\pi}{4}$
- Concavidad:
  - Segunda derivada: $f''(x) = -\sin(x) - \cos(x)$
  - Tabla de signos de $f''(x)$:

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	
$f''(x)$	$+$	0	-	0	$+$

  - Concavidad hacia arriba: $(0, \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$
  - Concavidad hacia abajo: $(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$
  - Puntos de inflexión en $x = \frac{3\pi}{4}$ y $x = \frac{7\pi}{4}$
- Máximo absoluto: $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$
- Mínimo absoluto: $f(\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2}$

4. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ en el intervalo $[-2, 2]$

- Derivada: $f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - x^2(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$
- Raíces de la derivada: $2x = 0 \Rightarrow x = 0$
- Tabla de signos de $f'(x)$:

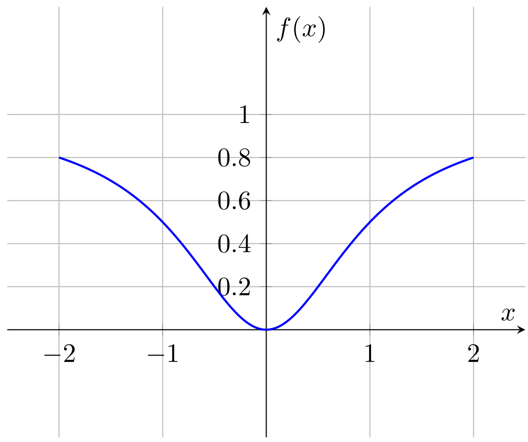
x	$-\infty$	0	∞
$f'(x)$	-	0	$+$

- Intervalos crecientes: $(0, \infty)$
- Intervalos decrecientes: $(-\infty, 0)$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Mínimo relativo en $x = 0$
- Concavidad:
  - Segunda derivada: $f''(x) = \frac{2(x^2+1)^2 - 2x \cdot 2x \cdot (x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^3}$
  - Raíces de la segunda derivada: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$
  - Tabla de signos de $f''(x)$:

x	$-\infty$	-1	0	1	∞
$f''(x)$	$+$	0	-	0	$+$

  - Concavidad hacia arriba: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
  - Concavidad hacia abajo: $(-1, 1)$
  - Puntos de inflexión en $x = \pm 1$
- Máximo relativo : $f(2) = f(-2) = \frac{4}{5}$
- Mínimo absoluto: $f(0) = 0$

El gráfico es el siguiente

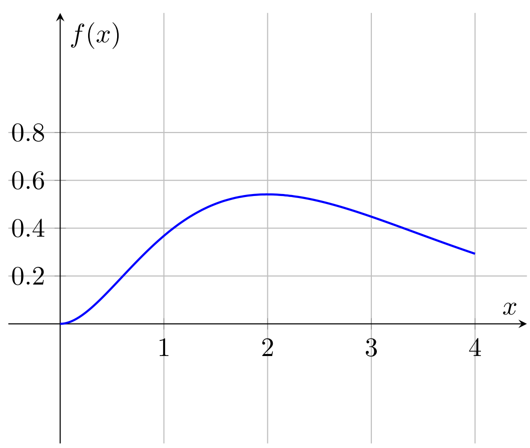


5. $f(x) = x^2 e^{-x}$ en el intervalo $[0, 4]$

- Derivada: $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(2 - x)$
- Raíces de la derivada: $x = 0$ y $x = 2$
- Tabla de signos de $f'(x)$:
  Ambos puntos críticos se encuentran dentro del dominio. Además, $e^{-x} > 0$

$x \in$	0	$]0, 2[$	2	$]2, 4[$	4
x	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$(2 - x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$xe^{-x}(2 - x)$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f'(x)$	0	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\searrow$

El gráfico es el siguiente



- Intervalos crecientes: $(0,2)$
- Intervalos decrecientes: $(2,4)$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo en $x=2$
- Concavidad:
  - Segunda derivada: $f''(x) = e^{-x}(2-4x+x^2)$
  - Raíces de la segunda derivada: $2-4x+x^2=0 \Rightarrow x=2$
  - Tabla de signos de $f''(x)$:

x	0	2	4
$f''(x)$	+	0	-

  - Concavidad hacia arriba: $(0,2)$
  - Concavidad hacia abajo: $(2,4)$
  - Punto de inflexión en $x=2$
- Máximo absoluto: $f(2)=4e^{-2}$
- Mínimo absoluto: $f(0)=0$

6. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ en el intervalo $[-2,2]$

- Derivada: $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$
- Punto Crítico: $x=0$
- Tabla de signos de $f'(x)$:

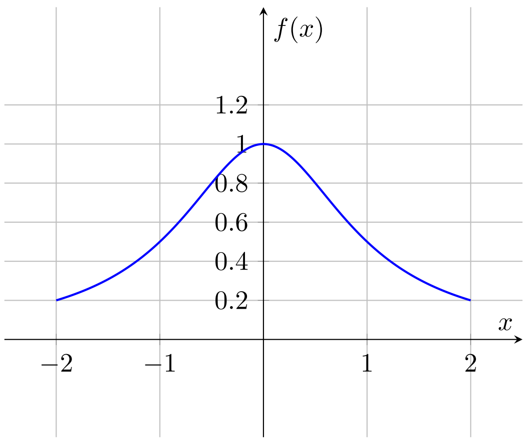
x	$-\infty$	0	∞
$f'(x)$	+	0	-

- Intervalos crecientes: $(-\infty,0)$
- Intervalos decrecientes: $(0,\infty)$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo en $x=0$
- Concavidad:
  - Segunda derivada: $f''(x) = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^3}$
  - Raíces de la segunda derivada: $x=\pm 1$
  - Tabla de signos de $f''(x)$:

x	$-\infty$	-1	0	1	∞
$f''(x)$	+	0	-	0	+

  - Concavidad hacia arriba: $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$
  - Concavidad hacia abajo: $(-1,1)$
  - Puntos de inflexión en $x=\pm 1$
- Máximo absoluto: $f(0)=1$
- Mínimo absoluto: $f(2)=\frac{1}{5}$

El gráfico de la función es



7. $f(x) = x^3-3x+1$ en el intervalo $[-2,2]$

- Derivada: $f'(x) = 3x^2-3$
- Puntos Críticos: $3(x^2-1)=0 \Rightarrow x=\pm 1$.

  Ambos puntos críticos se encuentran dentro del dominio.
- Tabla de signos de $f'(x)$:

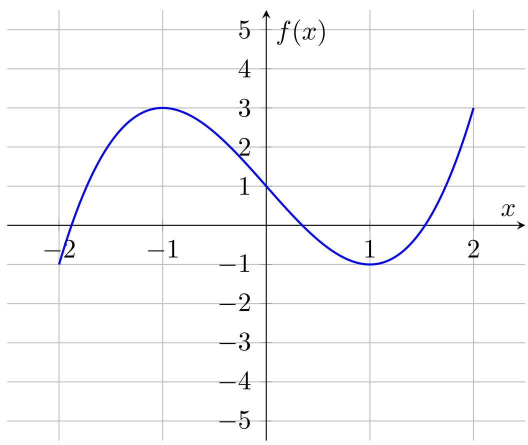
x	$-\infty$	-1	0	1	∞
$f'(x)$	+	0	-	0	+

- Intervalos crecientes: $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$
- Intervalos decrecientes: $(-1,1)$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximos relativos en $x=-1$ y 2.
  - Mínimos relativos en $x=-2$ y 1
- Concavidad:
  - Segunda derivada: $f''(x)=6x$
  - Raíces de la segunda derivada: $x=0$
  - Tabla de signos de $f''(x)$:

x	$-\infty$	0	∞
$f''(x)$	-	0	+

  - Concavidad hacia abajo: $(-\infty,0)$
  - Concavidad hacia arriba: $(0,\infty)$
  - Punto de inflexión en $x=0$
- Máximo absoluto: No hay.
- Mínimo absoluto: No hay.

El gráfico es el siguiente



8. $f(x) = 2x^4-4x^2+1$ en el intervalo $[-2,2]$

Estudie y discuta con sus compañeras/os.

5. *Aplicación*

1. La derivada de la velocidad $v(t)$ es:

$$\begin{aligned} v'(t) &= 3t^2 - 30t + 72 \\ &= 3(t^2 - 10t + 24) \\ &= 3(t-4)(t-6) \end{aligned}$$

- La **velocidad aumenta** cuando la función $v(t)$ es **estrictamente creciente**, es decir, cuando $v'(t) > 0$.
- La **velocidad disminuye** cuando la función $v(t)$ es **estrictamente decreciente**, es decir, cuando $v'(t) < 0$.

Para contestar es necesario realizar la tabla de análisis de signos

Primero encontramos, si es que existen, los Puntos Críticos.

$$\begin{aligned} v'(t) &= 0 \\ v'(t) &= 3(t-4)(t-6) \end{aligned}$$

Por lo anterior los Puntos Críticos son $t_1 = 4$ y $t_2 = 6$

El análisis se hará desde el borde inferior del intervalo hasta el primer PC, luego entre ambos PCs, y finalmente entre el segundo PC hasta el borde superior del intervalo. En este caso, el segundo PC es el borde superior del intervalo.

$t \in$	$[2,4[$	4	$]4,6[$	6
$(t-4)$	$-$	0	$+$	$+$
$(t-6)$	$-$	$-$	$-$	0
$v'(t) = 3(t-4)(t-6)$	$+$	0	$-$	0
$v'(t)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	0

Por lo tanto, de la Tabla de Signos podemos deducir que la velocidad aumenta entre las $[2,4]$ y disminuye entre las $[4,6]$. Y que la máxima velocidad vehicular.

Si derivamos una segunda vez la velocidad podemos encontrar la concavidad en los puntos críticos y determinar si son máximos o mínimos.

$$v''(t) = 6t - 30$$

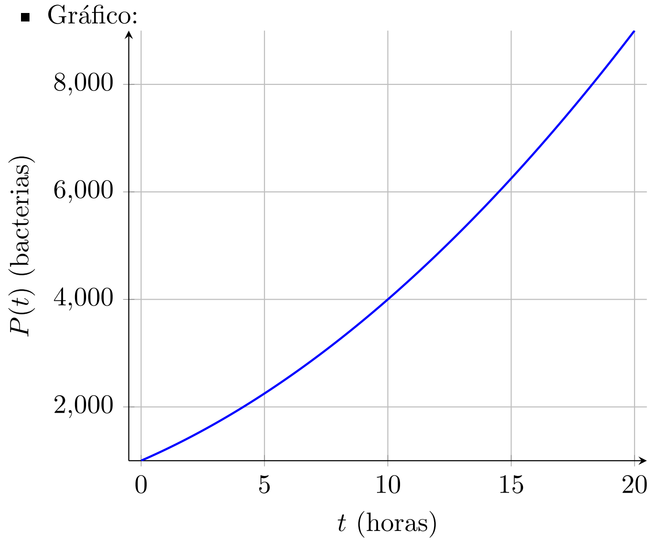
La evaluación en los PCs es

$$\begin{aligned} v''(t_1 = 4) &= 6 \cdot 4 - 30 = -2 < 0 \\ v''(t_2 = 6) &= 6 \cdot 6 - 30 = 6 > 0 \end{aligned}$$

Nos confirma que a las 4 de la tarde se logra la máxima velocidad en la carretera.

2. La población de bacterias está dada por $P(t) = 1000\left(1 + \frac{t}{10}\right)^2$ en el intervalo $[0, 20]$

- Derivada: Para encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento primero se debe determinar la derivada (con regla de la cadena)
$P'(t) = 200\left(1 + \frac{t}{10}\right)$
- Puntos Críticos (derivadas nulas): La derivada no tiene raíces, siempre es positiva, $P'(t) > 0$ para $t \geq 0$
- Intervalos de crecimiento: Si la derivada es siempre positiva, entonces en nuestro intervalo $(0, 20)$ es creciente.
- No hay máximos ni mínimos relativos. Porque la derivada no tiene ceros.
- Concavidad:
  - Segunda derivada: $P''(t) = 20$
  - $P''(t) > 0$ para todo t
  - La función es cóncava hacia arriba en todo el intervalo.
- El mínimo absoluto será el borde inferior, y el máximo absoluto será el borde superior.
- Gráfico:



3. $B(x) = -2x^2 + 24x - 50$ en el intervalo $[0, 15]$

- Derivada: $B'(x) = -4x + 24 = -4(x-6)$
- Puntos Críticos: $-4x + 24 = 0 \Rightarrow x_1 = 6$
- Intervalos crecientes: $(0, 6)$ Tomamos un $x_{piloto} = 4$ a la izquierda del Punto Crítico y evaluamos. $B'(4) = -4 \cdot (-2) = 8 > 0$. Derivada positiva, creciente.
- Intervalos decrecientes: $(6, 15)$ Tomamos un $t_{piloto} = 8$ a la derecha del Punto Crítico y evaluamos.$B'(8) = -4 \cdot (2) = -8 < 0$. Derivada negativa, decreciente.
- Máximo relativo en $x = 6$
- Concavidad:

- Segunda derivada: $B''(x) = -4$
- $B''(x) < 0$ para todo x, en especial para $x_1 = 6$
- La función es cóncava hacia abajo en todo el intervalo. Por lo tanto el máximo local encontrado x_1 es un máximo absoluto.

- Máximo absoluto: $B(6) = 22$
- Mínimo absoluto: $B(15) = -200$
- Gráfico: