Universidad de Chile
Facultad de Agronomía
Matemáticas 1
Curso: BBO-01C-001
Profesores: Carrasco, Contreras, Da Silva

Compendio - #9 ver 02
Tema: Derivadas
Semestre Primavera 2024

La matemática es como un faro que guía nuestra comprensión del mundo.

---

1. Derivadas

Problema 1. Determine la derivada de las siguientes funciones

1. $f_1(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 + 4$
2. $f_2(x) = \frac{x^2+2}{x}$
3. $f_3(x) = \frac{x+1}{x-1}$
4. $f_4(x) = \frac{5}{x^5}$
5. $f_5(x) = \sqrt{x}$
6. $f_6(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$
7. $f_7(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$
8. $f_8(x) = e^{4x}$
9. $f_9(x) = \frac{e^{2x}}{x^2}$
10. $f_{10}(x) = e^{3-x}$
11. $f_{11}(x) = xe^x$
12. $f_{12}(x) = \sin(x)\cos(x)$
13. $f_{13}(x) = \frac{e^x}{\sin(x)}$

Problema 2. Determina las derivadas de las siguientes funciones por trazos indicando los puntos del dominio en que la función NO es diferenciable

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ -x^3 & \leq 0 \end{cases}$
2. $g(x) = \begin{cases} \sin x & x > 0 \\ x & x \leq 0 \end{cases}$
3. $g_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} & x < -3 \\ -6x - 9 & \text{si} & |x| \leq 3 \\ \frac{54}{x} & \text{si} & x > 3 \end{cases}$
4. $g_2(x) = \begin{cases} x \cdot |x| & \text{si} & x < 2 \\ 4x & \text{si} & x > 2 \end{cases}$

Problema 3. Determine la ecuación de la recta tangente a las siguientes funciones en los puntos indicados

1. $h_1(x) = \sin(x) \qquad \text{en } a = \pi$
2. $h_2(x) = \ln(x) \qquad \text{en } a = e$
3. $h_3(x) = \sqrt{x} \qquad \text{en } a = 4$
4. $h_4(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{en } a = 1$

Problema 4. Chequee que los siguientes límites cumplen con las hipótesis (condiciones) para usar la regla de L'Hôpital y resuélvalos.

1. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)}$
2. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x \cdot \sin(x)}$
3. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$
4. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{2\ \sin(3x)}{2x - 3\ \sin(2x)}$
5. $\displaystyle \lim_{x\to 0} x^{\tan(x)}$
6. $\displaystyle \lim_{x\to 2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$
7. Del compendio de límites, aplique esta nueva herramienta a los límites que tienen forma indeterminada $\frac{0}{0}$. ¿Es más rápido el cálculo?

Problema 5. Resuelva los siguientes problemas

1. Se libera un grupo de 50 quokkas en una zona inhabitada de Australia. Por la abundancia de alimento y ausencia de depredadores, estos animales se reproducen tranquilamente. Si la función $q(t)$ que indica la población de quokkas en el área al cabo de t años y sabemos que cumple con:

$$q(0)$$
$$q'(t) = q(t)$$

   ¿Cuántos quokkas se estima que habrá al cabo de un mes?

2. En una isla conviven una especia de ratón de cola larga y el zorro chilla. Cuando la población de ratones es alta, éstos se reproducen rápidamente, sin embargo, también los zorros comen con avidez debido a la cantidad de presas. Esto produce que la población de zorros aumente y a su vez la cantida de ratones disminuya debido a la depredación. Al disminuir la población de ratones, los zorros mueren de hambre y esto permite al aumento en la población de ratones. Y así todo vuelve a empezar.

   Esta dinámica se puede expresar matemáticamente como:

$$\begin{aligned} r'(t) &= r(t) - \tfrac{3}{2}z(t) \\ z'(t) &= \tfrac{1}{3}r(t) - \tfrac{2}{3}z(t) \end{aligned}$$

   donde $r(t)$ y $z(t)$ son, respectivamente, la población de ratones y de zorros al cabo de t meses.

   Si inicialmente hay $r(0) = 72$ ratones y $z(0) = 60$ zorros. ¿Cuántos de cada animal se espera que haya al cabo de un mes?

3. Un objeto cayendo en caída libre bajo la influencia de la gravedad y del roce con el aire se puede modelar con ecuación:

$$y(t) = kt + he^{-\alpha t}$$

con h, k, α constantes que dependen de la situación.

Sabiendo que la velocidad es la derivada de la posición y la aceleración la derivada de la velocidad. Si el objeto cae al piso al cabo de $t = 5$ segundos ¿con qué velocidad y aceleración impacta el suelo?

4. Al hacer un depósito a plazo en el banco, a Ariel le ofrecen un 5 % de interés anual. Si depositó \$1,200,000 en la cuenta, la ecuación que indica la cantidad de dinero es:

$$C(t) = 1200000(1{,}05)^t$$

con $C(t)$ la cantidad de dinero en pesos y t el tiempo medido en años.

Estime, usando derivadas, cuánto dinero tendrá Ariel al cabo de dos meses sabiendo que $\ln(1{,}05) \approx 0{,}048$

Problema 6. Encuentre las Rectas tangentes. Luego dibuje la función original y la recta tangente solicitada. Finalmente, si la curva original es $f(x)$ e $y(x)$ es una aproximación de ella, calcule los valores de ambas en los puntos solicitados y comente, ¿ $y(x$ es una buena aproximación de $f(x)$? ¿Cuándo es una buena aproximación?. Puede usar calculadora en este ítem.

1. A la curva $f(x) = x^2$ en el punto $x = 1$. Calcule $f(x)$ e $y(x)$, para $x = 2$, $x = 1,1$ y $x = 1,01$.
2. A la curva $f(x) = \sin(x)$ en el punto $x = \frac{\pi}{4}$. Calcule $f(x)$ e $y(x)$, para $x = 2$, $x = 1$ y $x = 0,78$
3. A la curva $f(x) = e^x$ en el punto $x = 0$. Calcule $f(x)$ e $y(x)$, para $x = 2$, $x = 0,5$ y $x = 0,01$
4. A la curva $f(x) = \ln(x)$ en el punto $x = 1$. Calcule $f(x)$ e $y(x)$, para $x = 2$, $x = 1,5$ y $x = 1,01$
5. A la curva $f(x) = x^3$ en el punto $x = 2$. Calcule $f(x)$ e $y(x)$, para $x = 4$, $x = 2,5$ y $x = 2,1$
6. A la curva $f(x) = \cos(x)$ en el punto $x = \pi$. Calcule $f(x)$ e $y(x)$, para $x = 5$, $x = 6$ y $x = 6,2$
7. A la curva $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto $x = 4$. Calcule $f(x)$ e $y(x)$, para $x = 2$, $x = 3$ y $x = 3,9$
8. A la curva $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto $x = 1$. Calcule $f(x)$ e $y(x)$, para $x = 2$, $x = 1,1$ y $x = 1,01$
9. A la curva $f(x) = \tan(x)$ en el punto $x = \frac{\pi}{6}$. Calcule $f(x)$ e $y(x)$, para $x = 0$, $x = 0,49$ y $x = 0,51$
10. A la curva $f(x) = x^2 + 3x + 2$ en el punto $x = -1$. Calcule $f(x)$ e $y(x)$, para $x = -2$, $x = -1,5$ y $x = -1,1$

Problema 7. Utilice la regla de la cadena para calcular la derivada de las siguientes funciones:

Recuerdo: Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ dos funciones con derivadas f' y g', respectivamente. Supongamos, además, que la función $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ está bien definida (a esta función se le conoce como la **función composición** entre f y g). Entonces la función $f \circ g$ se puede derivar y se cumple que:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

1. $h(x) = (x^2 + 1)^6$.
2. $h(x) = (x^3 + 4x^2 + 2)^2$
3. $h(x) = \sin(x^2)$.
4. $h(x) = 7\sin(x^4 + 3x^5 - 3)$.
5. $h(x) = \cos(-x^4 + 10x) + \sqrt[3]{x}$.
6. $h(x) = -\sin(e^x)$.
7. $h(x) = e^{\sin(x)} + x^9$.
8. $h(x) = \ln(x^2 + 1)$.
9. $h(x) = \sin(\cos(x))$.
10. $h(x) = x^2 \sin(x^7)$.
11. $h(x) = e^{x^2} + x^2 + \cos(x)$.
12. $h(x) = xe^{x^2} + \sin(x^7)$.
13. $h(x) = 5^{x^2}$.
14. $h(x) = \frac{\sin(x^2+1)}{x}$.
15. $h(x) = \frac{x\ln(x+x^2)}{\sin(x)}$.

1. Soluciones Derivadas

Solución 1. Determine la derivada de las siguientes funciones

1. $f_1'(x) = 8x^3 + 3x^2 - 2x$
2. $f_3'(x) = \frac{x^2-2}{x^2}$
3. $f_3'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$
4. $f_4'(x) = -\frac{25}{x^6}$
5. $f_5'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6. $f_6'(x) = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$
7. $f_7'(x) == \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
8. $f_8'(x) = 4e^{4x}$
9. $f_9'(x) = \frac{2e^{2x}(x-1)}{x^3}$
10. $f_{10}'(x) = -e^{3-x}$
11. $f_{11}'(x) = (1+x)e^x$
12. $f_{12}'(x) = cos^2(x) - sin^2(x)$
13. $f_{13}'(x) = e^x \csc(x) - e^x \cot(x)\csc(x)$

Solución 2. Determina las derivadas de las siguientes funciones por trazos indicando los puntos del dominio en que la función NO es diferenciable

1. $g_1'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \leq -3 \\ -6 & \text{si} \quad |x| < 3 \\ -\frac{54}{x^2} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

   No es diferenciable en $x = 3$

2. $g_2'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

   No es diferenciable en $x = 0$ ni $x = 2$

3. $g_3'(x) = 0 \qquad \text{si } x \neq 0$

   No es diferenciable en $x = 0$

4. $g_4'(x) = 0 \qquad \text{si } x \notin \mathbb{Z}$

   No es diferenciable en ningún número entero.

Solución 3. Determine la ecuación de la recta tangente a las siguientes funciones en los puntos indicados

1. $y_1 = -x + \pi$
2. $y_2 = \frac{x}{e}$
3. $y_3 = \frac{x}{4} + 1$
4. $y_4 = -x + 2$
5. $y_5 = \left\lfloor \frac{5}{3} \right\rfloor = 1$

Solución 4. Chequee que los siguientes límites cumplen con las hipótesis (condiciones) para usar la regla de L'Hôpital y resuélvalos.

1. 2
2. 0
3. 1
4. $-\frac{3}{2}$
5. 1
6. $\sqrt{e}$

Solución 5. Resuelva los siguientes problemas

1. $q\left(\frac{1}{2}\right) = q(0) + q'(0)\left(\frac{1}{2} - 0\right) \approx 54$

   Habrá aproximadamente 54 quokkas

2. $$r(1) = r(0) + r'(0)(1-0) = 54$$
   $$z(1) = z(0) + z'(0)(1-0) = 44$$

   Habrá aproximadamente 54 ratonez y 44 zorros.

3. Velocidad: $y'(5) = k - \alpha h e^{-5\alpha}$

   Aceleración: $y''(5) = \alpha^2 h e^{-5\alpha}$

4. Tendrá, aproximadamente, \$12,04,800 en su cuenta.

$$\begin{aligned} C\left(\tfrac{2}{12}\right) &= C(0) + C'(0)\left(\tfrac{2}{12} - 0\right) \\ &= 1200000 + 1200000 \cdot 0{,}048 \cdot \tfrac{1}{12} \\ &= 1200000 + 4800 \\ &= 1204800 \end{aligned}$$

Solución 6. Rectas tangentes

1. Para $f(x) = x^2$ en $x = 1$:

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(1) = 2$$

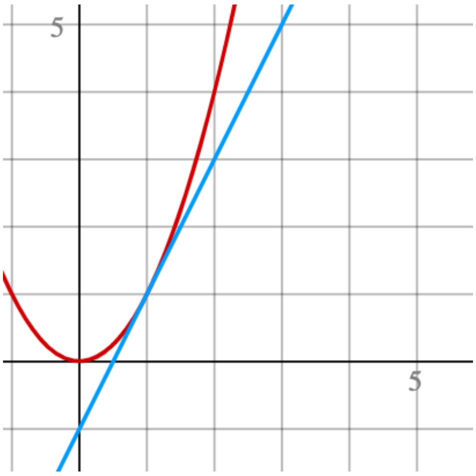
Ecuación de la recta tangente:

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 1$$

Para los puntos solicitados

x	$f(x)$	$y(x)$	
2,00	4,00	3,00	mala aprox
1,10	1,21	1,20	
1,01	1,02	1,02	buena aprox



2. Para $f(x) = \sin(x)$ en $x = \frac{\pi}{4}$:

$$f'(x) = \cos(x)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ecuación de la recta tangente:

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

3. Para $f(x) = e^x$ en $x = 0$:

$$f'(x) = e^x$$

$$f'(0) = 1$$

Ecuación de la recta tangente:

$$y - 1 = 1(x - 0)$$

$$y = x + 1$$

4. Para $f(x) = \ln(x)$ en $x = 1$:

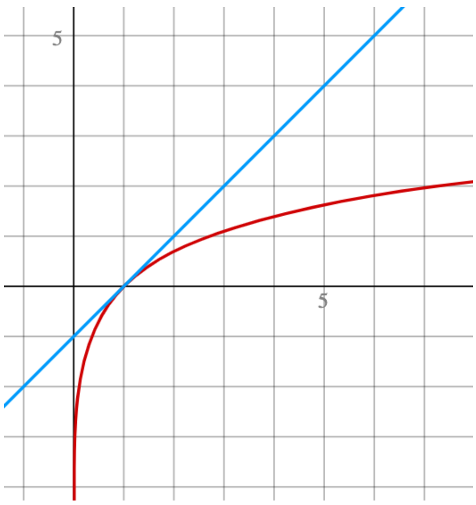
$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(1) = 1$$

Ecuación de la recta tangente:

$$y - 0 = 1(x - 1)$$

$$y = x - 1$$



5. Para $f(x) = x^3$ en $x = 2$:

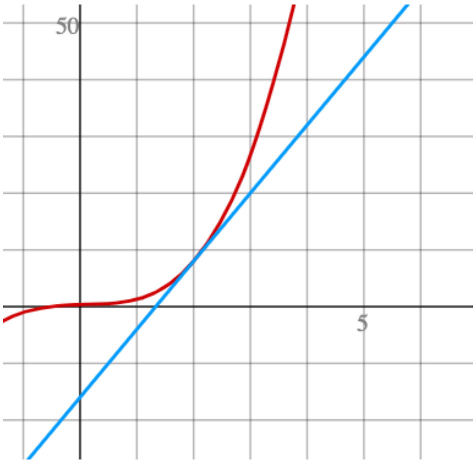
$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(2) = 12$$

Ecuación de la recta tangente:

$$y - 8 = 12(x - 2)$$

$$y = 12x - 16$$



6. Para $f(x) = \cos(x)$ en $x = \pi$:

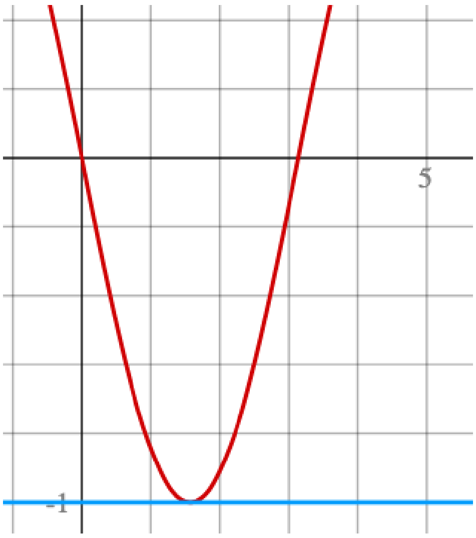
$$f'(x) = -\sin(x)$$

$$f'(\pi) = 0$$

Ecuación de la recta tangente:

$$y - (-1) = 0(x - \pi)$$

$$y = -1$$



7. Para $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 4$:

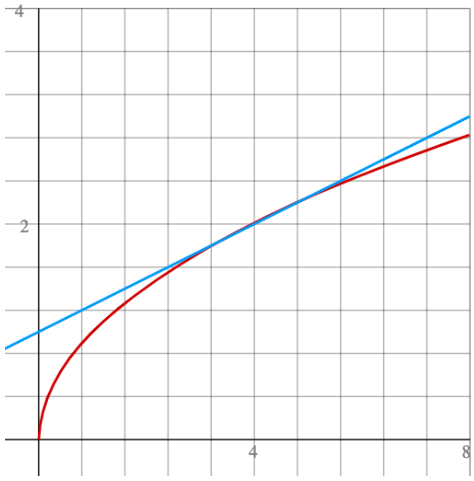
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(4) = \frac{1}{4}$$

Ecuación de la recta tangente:

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1$$



8. Para $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 1$:

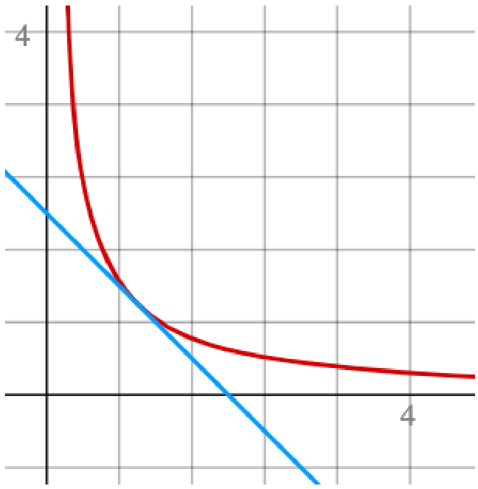
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(1) = -1$$

Ecuación de la recta tangente:

$$y - 1 = -1(x - 1)$$

$$y = -x + 2$$



9. Para $f(x) = \tan(x)$ en $x = \frac{\pi}{6}$:

$$f'(x) = \sec^2(x)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sec^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{3}$$

Ecuación de la recta tangente:

$$y - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{4\pi}{18} + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

10. Para $f(x) = x^2 + 3x + 2$ en $x = -1$:

$$f'(x) = 2x + 3$$

$$f'(-1) = 1$$

Ecuación de la recta tangente:

$$y - 0 = 1(x + 1)$$

$$y = x + 1$$

Solución 7. Regla de la cadena

1. $h'(x) = 12x(x^2 + 1)^5$.
2. $h'(x) = 2(x^3 + 4x^2 + 2)(3x^2 + 8x)$.
3. $h'(x) = 2x\cos(x^2)$.
4. $h'(x) = 7\cos(x^4 + 3x^5 - 3)(4x^3 + 15x^4)$
5. $h'(x) = -\sin(-x^4 + 10x)(-4x^3 + 10) + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$.
6. $h'(x) = -\cos(e^x)e^x$.
7. $h'(x) = e^{\sin(x)}\cos(x) + 9x^8$.
8. $h'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.
9. $h'(x) = -\cos(\cos(x))\sin(x)$.
10. $h'(x) = 2x\sin(x^7) + 7x^8\cos(x^7)$.
11. $h'(x) = 2xe^{x^2} + 2x - \sin(x)$.
12. $h'(x) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2} + 7x^6\cos(x^7)$.
13. $h'(x) = 2\ln(5)x5^{x^2}$.
14. $h'(x) = \frac{2x^2\cos(x^2+1) - \sin(x^2+1)}{x^2}$.
15. $h'(x) = \frac{(\ln(x+x^2) + \frac{1+2x}{1+x})\sin(x) - x\ln(x+x^2)\cos(x)}{(\sin(x))^2}$.