Derivadas y rectas tangentes

Claudio Carrasco, Rodrigo Contreras y Geir Da Silva

by

Profesores Mates 1

Primavera 2024

Introducción

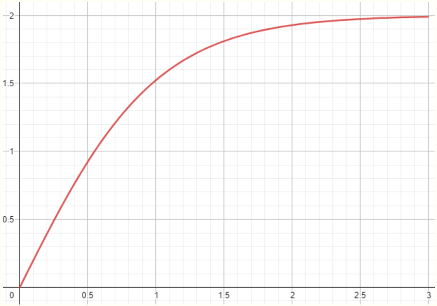
Materias que repasaremos

Temario

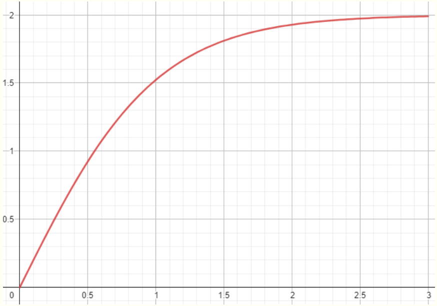
Definición

Motivación

Supongamos que tenemos un automóvil que se mueve en línea recta y hemos sido capaces de rastrear su avance en la siguiente gráfica *d* vs *t*:



Motivación



- ¿En qué momento el automóvil se movió con mayor velocidad?
- Más precisamente... **¿Cómo podemos conocer la velocidad del auto en un momento específico?**

Ejemplo simple

Comparemos tres autos moviéndose de la manera más sencilla posible y partiendo de la misma posición. El primero moviéndose a 1 m/s, el segundo a 2 m/s y el tercero está quieto.
Podemos representar sus movimientos en la siguiente tabla:

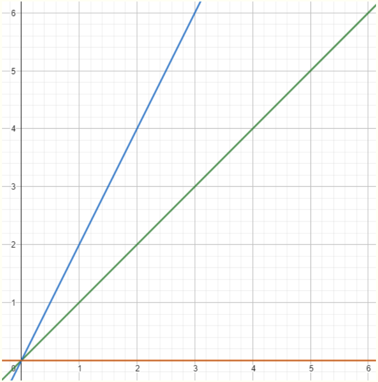
tiempo [s]	auto 1	auto 2	auto 3
0	0	0	0
1	1	2	0
2	2	4	0

Y con sus ecuaciones de movimiento:

- $x_1 = 1t$
- $x_2 = 2t$
- $x_3 = 0$

Representación gráfica

- $x_1 = 1t$ (verde)
- $x_2 = 2t$ (azul)
- $x_3 = 0$ (naranja)



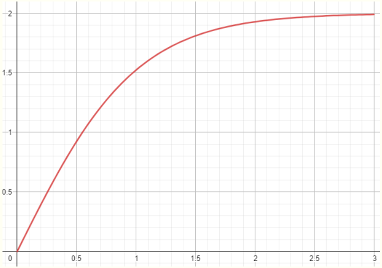
Moraleja

- Mientras **más inclinada** sea la gráfica de un movimiento, **más rápidez** está representando.
- Si la inclinación es nula (**horizontal)** su velocidad será **cero**.
- Si la pendiente va en **descenso** (pendiente negativa), entonces el movimiento será **en retroceso**.

Es decir, la pendiente de una gráfica de posición vs tiempo representa la velocidad del objeto.

Ejemplo no tan simple

Volvamos a nuestro gráfico inicial.



- ¿En qué momento el automóvil se movió con mayor velocidad?
- Más precisamente... **¿Cómo podemos conocer la velocidad del auto en un momento específico?**

Definición de derivada

La derivada es una herramienta que permite determinar la pendiente de una gráfica en cualquier punto.

La derivada de una función f en el punto a se define como:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{o bien} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Juguemos con la definición:

`https://www.geogebra.org/graphing/qeqsgkej`

Notación

Para referirnos a la derivada de la función f en el punto a, podemos escribir:

- $f'(a)$
- $\frac{df}{dx}(a)$

La derivada de una función también es, en sí, otra función. Por lo que usualmente la denotaremos de la primera forma.

La segunda notación expresa de manera más clara que la derivada representa **la razón de cambio de la función** f. Por lo que de todos modos vale la pena tenerla en mente.

Nuestra primera derivada

Tomemos la función, por ejemplo, $f(x) = mx + n$ (una función afín). Entonces:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{m(x+h) + n - (mx+n)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{mx + mh + n - mx - n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{mh}{h} = \lim_{h\to 0} m = m \end{aligned}$$

Nuestra segunda derivada

Tomemos la función $f(x) = x^2$, entonces:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}
\end{aligned}
$$

Nuestra segunda derivada

Tomemos la función $f(x) = x^2$, entonces:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x \end{aligned}$$

Ejercicios

Determine las derivadas de las siguientes funciones:

- $f(x) = c \qquad (c \text{ constante})$
- $g(x) = x^3$
- $h(x) = x^4$
- $k(x) = \frac{1}{x}$

Ejercicios

Determine las derivadas de las siguientes funciones:

- $f(x) = c \qquad (c \text{ constante})$
- $g(x) = x^3$
- $h(x) = x^4$
- $k(x) = \frac{1}{x}$

Respuestas:

- $f'(x) = 0$
- $g'(x) = 3x^2$
- $h'(x) = 4x^3$
- $k'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Tabla Derivadas Famosas

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$
2. $(e^x)' = e^x$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$
4. $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\cos x)' = -\sin x$
8. $(\tan x)' = \sec^2 x$
9. $(\csc x)' = -\sec x \cot x$
10. $(\sec x)' = \sec x \tan x$
11. $(\cot x)' = -\csc^2 x$

Propiedades de las derivadas

- $(k \cdot f)' = k \cdot f' \qquad (k \text{ constante})$
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(fg)' = f'g + g'f$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$
- $(f \circ g)' = g' \cdot (f' \circ g)$ Llamada Regla de la cadena.

Ejemplo 1

Calculemos la derivada de la función $f(x) = x^2 - 4x\,e^x$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(4xe^x)$$

Ejemplo 1

Calculemos la derivada de la función $f(x) = x^2 - 4x\, e^x$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(4xe^x) \\
&= 2x - 4\frac{d}{dx}(xe^x) \\
&= 2x - 4\left(\frac{d}{dx}(x)\cdot e^x + \frac{d}{dx}(e^x)\cdot x\right) \\
&= 2x - 4(1\cdot e^x + e^x\cdot x) \\
&= 2x - 4e^x - 4xe^x
\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Calculemos la derivada de la función $g(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$

$$g'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(2x+1)\cdot(x^2+1) - \frac{d}{dx}(x^2+1)\cdot(2x+1)}{(x^2+1)^2}$$

Ejemplo 2

Calculemos la derivada de la función $g(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{\frac{d}{dx}(2x+1)\cdot(x^2+1) - \frac{d}{dx}(x^2+1)\cdot(2x+1)}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{2\cdot(x^2+1) - 2x\cdot(2x+1)}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{2x^2+2-4x^2-2x}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{-2(x^2+x-1)}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

Ejercicios

Calcule las siguientes derivadas:

- $f(x) = x^5 + 7cos(x)$
- $f(x) = tan(x)$
- $f(x) = e^x sin(x)$
- $f(x) = \frac{2^x}{ln(x)}$
- $f(x) = \frac{x^2 - x}{e^x}$

Ejercicios

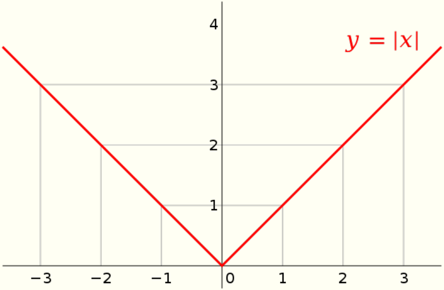
Calcule las siguientes derivadas:

- $f(x) = x^5 + 7cos(x)$
- $f(x) = tan(x)$
- $f(x) = e^x sin(x)$
- $f(x) = \frac{2^x}{ln(x)}$
- $f(x) = \frac{x^2 - x}{e^x}$

- $f'(x) = 5x^4 - 7sin(x)$
- $f'(x) = \frac{1}{cos^2(x)} = sec^2(x)$
- $f'(x) = e^x(sin(x) + cos(x))$
- $f'(x) = \frac{2^x ln(2^x) ln(x) - 2^x}{x(ln(x))^2}$
- $f'(x) = -e^{-x}(x^2 - 3x + 1)$

Casos especiales

Hay ocasiones en que una función no es diferenciable (no existe su derivada) en algún punto. Tomemos, por ejemplo, la función valor absoluto $f(x) = |x|$



Para valores negativos, su derivada es -1 y para valores positivos su derivada es 1 pero entonces, su derivada en cero... ¿cuál es su valor?

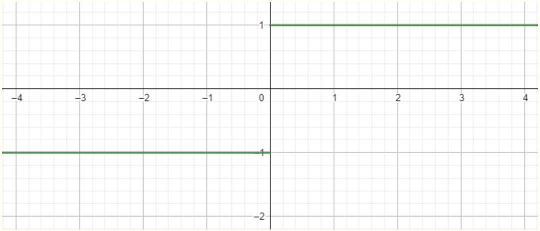
Valor absoluto

Calculemos su derivada:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \cdot \frac{|x+h| + |x|}{|x+h| + |x|} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{|x+h|^2 - |x|^2}{h(|x+h| + |x|)} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h(|x+h| + |x|)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h(|x+h| + |x|)} = \lim_{h\to 0} \frac{2x + h}{|x+h| + |x|} = \frac{x}{|x|}
\end{aligned}
$$

Valor absoluto

Ya hemos obtenido su derivada. Ésta se llama la *función signo* y su gráfica es la siguiente:



Como podemos observar, esta función presenta una discontinuidad en el valor $x = 0$. De hecho, ni siquiera tiene una imagen. Por ello decimos que la función no es diferenciable en $x = 0$

Ejercicios

Determine la derivada de las siguientes funciones y determine si son diferenciables en todos los puntos de su dominio:

- $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Ejercicios

Determine la derivada de las siguientes funciones y determine si son diferenciables en todos los puntos de su dominio:

- $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
- $f'(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Aplicaciones

Aplicaciones

La derivada nos da la idea de una tasa de cambio. Es decir, cuánto se espera que varíe la función en sus proximidades. Nos sirve para hacer predicciones en condiciones de incertidumbre y con poca información.

Ejemplo. Supongamos que tenemos la siguiente información sobre una función desconocida:

- $f(3) = 10$
- $f'(3) = -4$

No conocemos mucho de la función, pero nos gustaría hacer una aproximación de su comportamiento en las inmediaciones de $x = 3$.

Aplicaciones

Tenemos la siguiente información sobre una función desconocida:

- $f(3) = 10$
- $f'(3) = -4$

Entonces supondremos que cerca de $x = 3$ existe un comportamiento lineal:

$$f(3 + \Delta x) \approx f(3) + f'(x)\Delta x$$

Donde $\Delta x = x_{final} - x_{inicial}$

Esta aproximación usualmente es malísima, pero nos sirve como punto de partida para hacer mejores aproximaciones a futuro.

- $f(4) \approx 10 - 4 \cdot 1 = 6$
- $f(3{,}5) \approx 10 - 4 \cdot 0{,}5 = 8$

Problemas

1. Se determina que el movimiento de un péndulo está modelado con la siguiente función:

$$\alpha(t) = \frac{sin(t)}{t}$$

donde α es su posición angular medida en radianes y t es el tiempo medido en segundos. Calcule su velocidad en el instante $t = \frac{\pi}{2}$

Tangentes

Recordemos que la noción de derivada comenzó como el cálculo de la pendiente de la recta tangente a una función determinada. Es decir, si tomamos la función

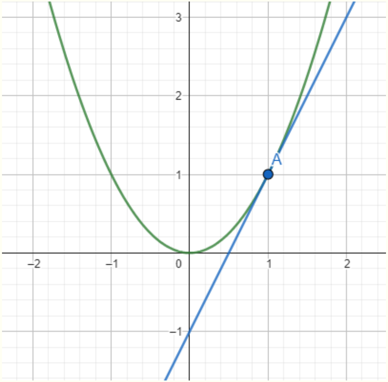
$$f(x) = x^2$$

y queremos conocer la pendiente de su recta tangente en el punto $x = 1$, debemos calcular su derivada y evaluarla en el punto deseado:

$$f'(x) = 2x \qquad f'(1) = 2$$

Tangentes

Ya sabemos que la recta tiene pendiente $m = 2$



Sólo nos falta calcular su coeficiente de posición.

Tangentes

Como queremos que sea tangente a la gráfica de la parábola, entonces la recta debe pasar por el punto $(1, f(1))$, es decir, $(1, 1)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y &= mx + n \\ 1 &= 2 \cdot 1 + n \\ n &= -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la recta tangente a la parábola $f(x) = x^2$ en el punto $(1, 1)$ es $y = 2x - 1$.

Ecuación Recta Tangente

La fórmula general para la recta tangente en el punto $x = a$ es:

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$$

Ejemplo

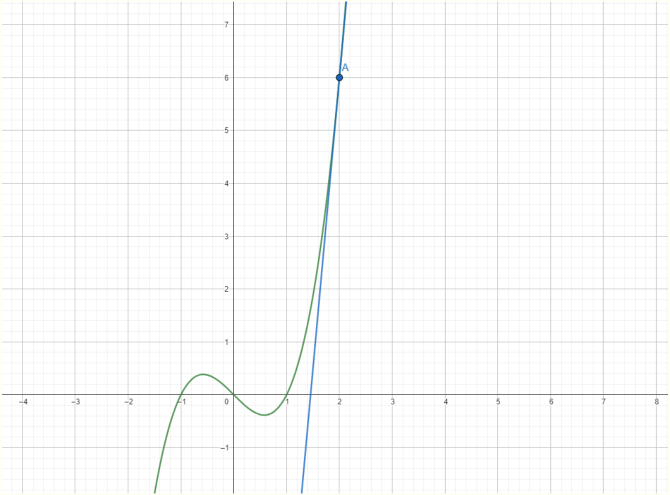
Encuentre la recta tangente a la función $f(x) = x^3 - x$ en el punto $x = 2$.

- Calculamos su derivada: $f'(x) = 3x^2 - 1$
- Evaluamos en el punto deseado: $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 1 = 11$.
- Encontramos el punto en el que queremos que se encuentren: $f(2) = 2^3 - 2 = 6$.
- Calculamos el coeficiente de posición:

$$\begin{aligned} y &= mx + n \\ 6 &= 11 \cdot 2 + n \\ n &= -16 \end{aligned}$$

Respuesta: la recta tangente en el punto deseado es $y = 11x - 16$

Ejemplo



Ejercicios

Encuentre y dibuje aproximadamente las rectas tangentes de las siguientes funciones en los puntos pedidos.

- $f(x) = sin(x)$ en $x = \frac{\pi}{2}$
- $g(x) = e^x$ en $x = 0$
- $h(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 3$
- $k(x) = x^2$ en $x = a$

Ejercicios

Encuentre y dibuje aproximadamente las rectas tangentes de las siguientes funciones en los puntos pedidos.

- $f(x) = sin(x)$ en $x = \frac{\pi}{2}$
- $g(x) = e^x$ en $x = 0$
- $h(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 3$
- $k(x) = x^2$ en $x = a$

- $y = 1$
- $y = x + 1$
- $y = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3}$
- $y = 2ax - a^2$

Problemas

2 Un recipiente contiene una solución de agua con sal. A esta solución se le está añadiendo agua destilada, de modo que la concentración de sal comienza a disminuir de acuerdo al modelo:

$$C(t) = \frac{2}{e^t}$$

donde C es la concentración medida en $[g/ml]$ y t es el tiempo medido en segundos. Determine en cuánto se espera que reduzca la concentración de la solución del segundo $t = 2$ al instante $t = 3$

Problemas

3 Un grupo de 50 ranitas de Darwin son abandonadas en una isla desierta en el Atlántico donde se les permite crecer tranquilamente. Con el tiempo la población de ranitas deja de crecer tan rápido debido a la falta de alimento (**es una isla!!!**). Se ha determinado que la cantidad de ranitas está modelada por la ecuación:

$$P(t) = \frac{100e^{\frac{t}{5}}}{e^{\frac{t}{5}} + 1}$$

donde t es la cantidad de años.

- ¿Cuántas ranitas se espera que nazcan en el tercer año?
- ¿Qué tal en el décimo año?
- ¿Seguirá la cantidad de ranitas aumentando indefinidamente apoderándose del mundo?

L'Hôpital

Al calcular un límite, en ocasiones nos topamos con indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$.

A veces podemos arreglar la situación factorizando:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

O a veces racionalizando:

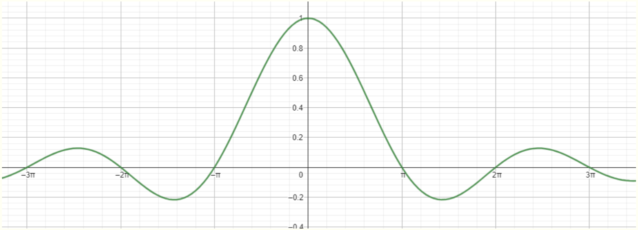
$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} \sqrt{x}+1 = 2$$

L'Hôpital

Sin embargo, hay situaciones más *peliagudas* como:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x}$$

En donde las herramientas ya mencionadas no nos sirven. En estos casos debemos buscar otras estrategias.



L'Hôpital

La regla de L'Hôpital indica que si:

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$
- $f'(x)$ y $g'(x)$ existen en las proximidades de $x = a$.
- $g' \neq 0$ (en las proximidades de $x = a$)

Entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to a} f'(x)^{g'(x)}$$

Ejemplo 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x}$$

Chequeemos que cumple con las condiciones previas:

- $\lim_{x \to 0} sin(x) = 0$ $\qquad$ $\lim_{x \to 0} x = 0$
- $\frac{d}{dx} sin(x) = cos(x)$ $\qquad$ $\frac{d}{dx} x = 1 \neq 0$

Entonces:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{cos(x)}{1} = 1$$

Ejemplo 2

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$$

Chequeemos las condiciones:

- $\lim_{x \to 1} x - 1 = 0$ $\qquad \lim_{x \to 0} x^2 - 1 = 0$
- $\frac{d}{dx}(x-1) = 1$ $\qquad \frac{d}{dx}(x^2-1) = 2x \neq 0$

Entonces:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 3

$$\lim_{x \to 1} (x-1)^{x^2-1}$$

Chequeemos las condiciones:

- $\lim_{x \to 1} x - 1 = 0$ $\qquad$ $\lim_{x \to 0} x^2 - 1 = 0$
- $\frac{d}{dx}(x-1) = 1$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(x^2-1) = 2x \neq 0$

Entonces:

$$\lim_{x \to 1} (x-1)^{x^2-1} = \lim_{x \to 1} 1^{2x} = \lim_{x \to 1} 1 = 1$$

Ejercicios

Calcule los siguientes límites usando la regla de L'Hôpital

- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$
- $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^4 + 2x^3 - 2x - 1}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x - 1}{sin(x)}$

Ejercicios

Calcule los siguientes límites usando la regla de L'Hôpital

- $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$
- $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$
- $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^4 + 2x^3 - 2x - 1}$
- $\lim_{x \to 0} \dfrac{2^x - 1}{sin(x)}$

- -4
- 1
- $\frac{-1}{2}$
- $\ln(2)$