# {LÍMITES DERIVADAS}

RESUMEN PROFE DA SILVA
(UNIVERSIDAD DE CHILE - FACULTAD DE AGRONOMÍA)

## LÍMITE DE UNA FUNCIÓN:

### - Qué es el límite de una función?

El **límite de una función** es un concepto fundamental en cálculo matemático que describe el comportamiento de una función cuando su argumento se acerca a un determinado valor, o cuando tiende hacia el infinito. La idea de límite ayuda a entender el comportamiento de las funciones en puntos donde no están necesariamente definidas o en sus cercanías.

Formalmente, si existiera el límite de una función $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a un valor $c$ se denota como:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

y se lee como

"El límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a $c$ es $L$"

### . - Existencia del Límite

El límite de una función existe si sus límites laterales existen y son iguales.

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = L \iff \lim_{x\to c} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x) \implies \lim_{x\to c} f(x) \text{ no existe}$$

### - Propiedades Generales

Si $\lim_{x\to c} f(x) = F$ y $\lim_{x\to c} g(x) = G$ entonces

$$\lim_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = F \pm G$$

$$\lim_{x\to c}[a \cdot f(x)] = a \cdot F$$

$$\lim_{x\to c}[f(x)g(x)] = F \cdot G$$

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G} \quad \text{si } G \neq 0$$

$\lim_{x\to c} f(x)^n = F^n$ si $n$ es entero positivo

$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{F}$ si $n$ es entero positivo, y si $n$ es par $F > 0$

$\lim_{x\to c} a = a$

$\lim_{x\to c} x = c$

$\lim_{x\to c} ax + b = ac + b$

$\lim_{x\to c} x^r = c^r$ si $r$ es entero positivo

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty, & \text{si } r \text{ es impar} \\ +\infty, & \text{si } r \text{ es par} \end{cases}$$

## CONTINUIDAD Y LOGARITMO

### - Función Continua

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es **continua en un punto** $c$ si se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. $f(c)$ está definido.
2. $\lim_{x\to c} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

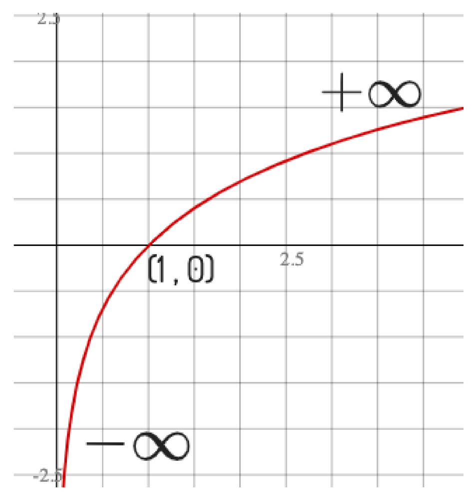
### - Logaritmo

$$\lim_{x\to 1} \ln(x) = \lim_{x\to 1} \log_a(x) = 0$$

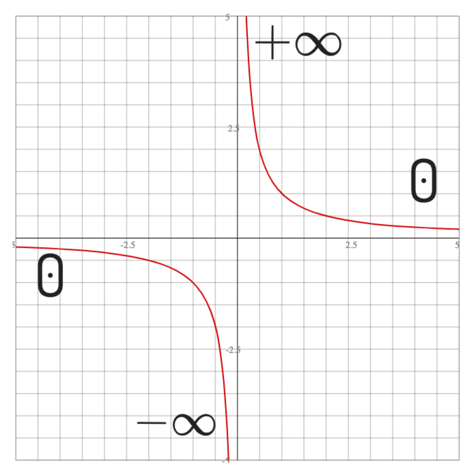
$$\lim_{x\to a} \log_a(x) = \log_a a = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = \lim_{x\to 0^+} \log_{10} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to \infty} \ln x = \lim_{x\to \infty} \log_{10} x = \infty$$




$f(x) = \ln x$




$f(x) = \frac{1}{x}$

### - Límite de funciones que hay que saber

$\lim_{x\to c} x^r = c^r$ si $r$ es entero positivo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty, & \text{si } r \text{ es impar} \\ +\infty, & \text{si } r \text{ es par} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = \sin(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$$

$$\lim_{x\to a} \sin(x) = \sin(a)$$

$$\lim_{x\to a} \cos(x) = \cos(a)$$

$$\lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$$

## LÍMITES DE FUNCIONES

### - Formas indeterminadas

Si $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma $\left[\frac{0}{0}\right]$ entonces diremos que tiene una Forma Indeterminada de $\left[\frac{0}{0}\right]$. Para evaluar la Forma Indeterminada se actúa como sigue:

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios entonces se trata de factorizar para **zafar** el cociente indeterminado. **Ejemplo:**

$$\lim_{x\to 3}\left[\frac{x^2-9}{x-3}\right] = \lim_{x\to 3}\left[\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}\right] = 6$$

- Si el numerador o el denominador, o ambos, tienen una función irracional se tratará de multiplicar por su conjugado. **Ejemplo:**

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}\right) = \frac{1}{2}$$

## DERIVADAS

La derivada de una función es la razón de cambio instantánea con la que varía el valor de dicha función según se modifique el valor de su variable independiente.

### - Propiedades

- $\frac{d}{dx}(c) = 0$
- $[cf(x)]' = cf'(x)$
- $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
- $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$
- $[f(x)g(x)]' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$
- $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$
- $f(g(x))' = f'(g(x))\,g'(x)$ Regla de la cadena

**Ejemplo:** regla de la cadena:

$$\left(\ln\left(x^2\right)\right)' = \ln'(x^2) \cdot (x^2)' = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$$

## APLICACIONES

### - Tabla de Derivadas

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$
2. $(e^x)' = e^x$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$
4. $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$
6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\cos x)' = -\sin x$
8. $(\tan x)' = \sec^2 x$
9. $(\csc x)' = -\sec x \cot x$
10. $(\sec x)' = \sec x \tan x$
11. $(\cot x)' = -\csc^2 x$

**Ejemplo:** Sea $f(x) = x^2 + \sin(x) - \ln(x)$, entonces $f'(x) = 2x + \cos(x) - \frac{1}{x}$.

### - Ecuación de la Recta Tangente

La fórmula general para la recta tangente que toca la función $f(x)$ en el punto $x = a$ es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

**Ejemplo:** Encontrar la Recta Tangente a la Función $f(x) = x^2 + 2$ en $x = 1$.
El valor de $a = 1$ y $f(1) = 3$. La derivada es $f'(x) = 2x$ y evaluada en el punto $f'(1) = 2$. Con estos datos ya podemos usar la fórmula:

$$y - 3 = 2(x - 1)$$

R: $y = 2x + 1$

### - Regla de L'Hôpital

- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \textbf{Casos}\left(\frac{0}{0}/\frac{\infty}{\infty}\right) \Rightarrow= \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

**Ejemplo Caso $\frac{0}{0}$:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1$$

- $\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \textbf{Casos}\left(\frac{0}{0}/\frac{\infty}{\infty}\right) \Rightarrow= \lim_{x\to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

**Ejemplo Caso $\frac{\infty}{\infty}$:**

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0$$