Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Agronómicas

Matemáticas 1 | **Compendio #07**
Curso: BBO-01C-001 | **Tema: Trigonometría**
Profesores: Carrasco, Contreras, Da Silva | Semestre Otoño 2024

”La trigonometría puede parecer abstracta, pero está en el corazón de muchas aplicaciones prácticas en ingeniería, física y arquitectura.”

- William Thomson, Lord Kelvin

1. Ejercicios

Problema 1. Trigonometría

1. Llenar de memoria la siguiente tabla

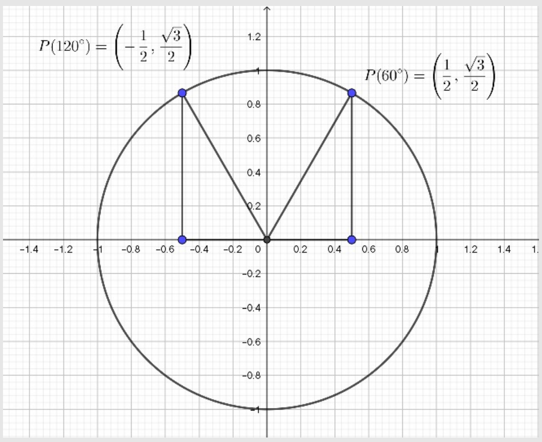
	ÁNGULO α				
Radianes					
Grados	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$					
$\cos\alpha$					
$\tan\alpha$					

2. Conviertir entre grados y radianes según corresponda

   a) 45° a radianes.
   b) $\frac{\pi}{3}$ radianes a grados.
   c) 120° a radianes.
   d) $\frac{5\pi}{6}$ radianes a grados.
   e) 270° a radianes.
   f) $-\frac{\pi}{2}$ radianes a grados.

3. Usando el nemotécnico TODAS SIN TACOS y triángulos rectángulos adecuados determine la ubicación de los siguientes grados en el el círculo unitario indicado. Defina su ubicación en el cuadrante respectivo y sus coordenadas (x, y).

   Ejemplo: $P(120^o) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ se ubica en $C2$.



   a) $P(60^o) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ se ubica en $C1$.
   b) $P(120^o) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ se ubica en $C2$.
   c) $P(30^o)$
   d) $P(45^o)$
   e) $P(150^o)$
   f) $P(-30^o)$
   g) $P(210^o)$
   h) $P(240^o)$
   i) $P(-180^o)$
   j) $P(300^o)$

Problema 2. Dibuje y use el Teorema de Pitágoras

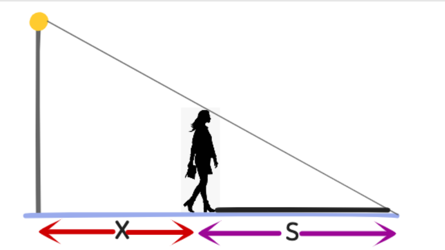
1. Encuentra la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo si los catetos miden 3 metros y 4 metros.
2. Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa de 10 metros y un cateto de 6 metros. ¿Cuál es la longitud del otro cateto?
3. En un triángulo rectángulo, los catetos miden 5 metros y 12 metros. Calcula la longitud de la hipotenusa.
4. Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa de 13 metros y un cateto de 5 metros. Determina la longitud del otro cateto.
5. Si un triángulo rectángulo tiene un cateto de 8 metros y una hipotenusa de 17 metros, ¿cuál es la longitud del otro cateto?
6. Un triángulo rectángulo tiene catetos de 7 metros y 24 metros. Calcula la longitud de la hipotenusa.

Problema 3. Resuelve. Usar calculadora sólo en caso necesario.

1. Un avión vuela a una altitud de 3,000 metros y observa un punto en el suelo a un ángulo de depresión de 30°. ¿Qué distancia hay entre el avión y el punto en el suelo?
2. Una escalera de 10 metros de largo está apoyada contra una pared, formando un ángulo de 60° con el suelo. ¿Qué altura alcanza la escalera en la pared?
3. Un edificio proyecta una sombra de 20 metros cuando el ángulo de elevación del sol es de 45°. ¿Cuál es la altura del edificio?
4. Un barco avista una señal a 4 kilómetros de distancia con un ángulo de elevación de 5°. ¿Cuál es la altura de la señal sobre el nivel del mar?
5. Un poste de luz de 12 metros proyecta una sombra de 7 metros. ¿Cuál es el ángulo de elevación del sol?
6. Un observador situado en el suelo ve la parte superior de un edificio con un ángulo de elevación de 25°. Si la distancia entre el observador y el edificio es de 30 metros, ¿cuál es la altura del edificio?
7. Un río tiene un ancho de 50 metros. Desde un punto en una orilla, el ángulo de elevación a la parte superior de un árbol en la orilla opuesta es de 10°. ¿Cuál es la altura del árbol?
8. Un avión asciende a un ángulo de 15° respecto al suelo. ¿Qué altura alcanzará después de haber volado 5 kilómetros?
9. Un piloto observa un aeropuerto a un ángulo de depresión de 7°. Si la altitud del avión es de 2 kilómetros, ¿qué distancia horizontal hay hasta el aeropuerto?
10. Un radar detecta un objeto a una distancia de 1 kilómetro y a una altura de 300 metros. ¿Cuál es el ángulo de elevación del objeto desde el radar?
11. Una torre de control de tráfico aéreo de 50 metros de altura observa un avión a una distancia de 2 kilómetros con un ángulo de elevación de 10°. ¿A qué altitud vuela el avión?
12. Una antena de 30 metros de altura proyecta una sombra de 40 metros. ¿Cuál es el ángulo de elevación del sol?

Problema 4. Ejercicios combinados

1. Encontrar la altura de un farol si una mujer de 1.7 metros tiene una sombra de largo de 3 metros, y la distancia desde la base del farol a la posición de la persona es de 1 metro.

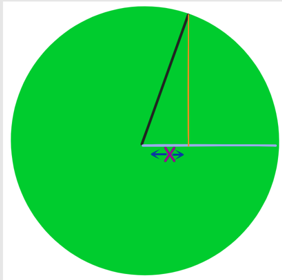


2. Un agricultor quiere medir la altura de un silo utilizando un teodolito. Desde un punto a 50 metros del silo, el ángulo de elevación al tope del silo es de 30°. ¿Cuál es la altura del silo?

3. Un campo rectangular es atravesado por un camino en diagonal que forma un ángulo de 60° con respecto a uno de sus lados más cortos. Si la longitud del lado más corto es de 200 metros, ¿cuál es la longitud del lado más largo?

4. Una plantación de árboles está dispuesta en hileras que forman un ángulo de 45° con respecto a una carretera recta. Si la distancia perpendicular desde el primer árbol de la primera hilera hasta la carretera es de 20 metros, ¿cuál es la distancia, siguiendo la linea de la hilera, desde el primer árbol hasta la carretera?

5. Un sistema de riego gira en un círculo y tiene un brazo de riego de 100 metros de largo. Si el brazo forma un ángulo de 75° con respecto al punto de inicio, ¿cuál es la **distancia horizontal** desde el punto de inicio hasta el extremo del brazo?

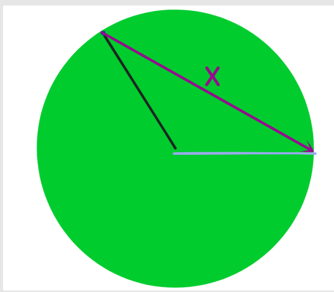


6. Un agricultor quiere calcular la distancia entre dos puntos de un campo inclinado. Desde un punto A en la base del campo, se observa un punto B en la cima con un ángulo de elevación de 25°. La distancia horizontal entre A y B es de 200 metros. ¿Cuál es la distancia directa entre los dos puntos?

7. En un terreno inclinado, un agricultor mide un ángulo de inclinación de 10°. Si el terreno tiene una pendiente de 150 metros, ¿cuál es la diferencia de altura entre la base y la cima de la pendiente?

8. Un árbol proyecta una sombra de 30 metros cuando el ángulo de elevación del sol es de 45°. ¿Cuál es la altura del árbol?

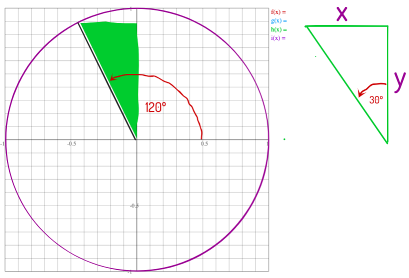
9. Un sistema de riego pivote central tiene un brazo de riego de 150 metros de largo. Si el brazo forma un ángulo de 120° con respecto a su punto de origen, ¿cuál es la distancia entre el extremo del brazo y el extremo del brazo inicial?



2. Solucionario

Solución 1. Trigonometría

1. a) $45° = \frac{\pi}{4}$ radianes
   b) $\frac{\pi}{3}$ radianes $= 60°$
   c) $120° = \frac{2\pi}{3}$ radianes
   d) $\frac{5\pi}{6}$ radianes $= 150°$
   e) $270° = \frac{3\pi}{2}$ radianes
   f) $-\frac{\pi}{2}$ radianes $= -90°$
2. Estudiemos el punto $P(120°)$



El triángulo verde debe tener el ángulo inferior de 30° ya que son los grados que sobran al pasar los 90° del eje y.
El valor x del triángulo verde se calcula como

$$\sin 30° = \frac{x}{1}$$

recordemos que la hipotenusa, en este caso, es el radio unitario del círculo. Y el valor de y con

$$\cos 30° = \frac{y}{1}.$$

Según la tabla de valores de las funciones trigonométricas, que hay que saber de memoria, $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Para definir los signos, en este caso en el cuadrante 2, el valor de x queda sobre el eje x negativo, y el valor de y sobre el eje y positivo. Finalmente el punto $P(120°) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Solución 2. Pitágotras

1. Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} \\ &= \sqrt{25} = 5 \, \text{metros} \end{aligned}$$

2. Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} \\ &= \sqrt{100 - 36} \\ &= \sqrt{64} = 8 \, \text{metros} \end{aligned}$$

3. Utilizando el teorema de Pitágoras para encontrar un cateto:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} \\ &= \sqrt{25 + 144} \\ &= \sqrt{169} = 13 \, \text{metros} \end{aligned}$$

4. Utilizando el teorema de Pitágoras para encontrar un cateto:

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} \\ &= \sqrt{169 - 25} \\ &= \sqrt{144} = 12 \, \text{metros} \end{aligned}$$

5. Utilizando el teorema de Pitágoras para encontrar un cateto:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} \\ &= \sqrt{289 - 64} \\ &= \sqrt{225} = 15 \, \text{metros} \end{aligned}$$

6. Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} \\ &= \sqrt{49 + 576} \\ &= \sqrt{625} = 25 \, \text{metros} \end{aligned}$$

Solución 3. Resuelve

1. $d = \frac{3000}{\tan 30°} \approx 5196{,}15\,\text{m}$
2. $h = 10 \sin 60° \approx 8{,}66\,\text{m}$
3. $h = 20 \tan 45° = 20\,\text{m}$
4. $h = 4000 \tan 5° \approx 349{,}84\,\text{m}$
5. $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{12}{7}\right) \approx 59{,}74°$
6. $h = 30 \tan 25° \approx 13{,}98\,\text{m}$
7. $h = 50 \tan 10° \approx 8{,}81\,\text{m}$
8. $h = 5000 \sin 15° \approx 1294{,}1\,\text{m}$
9. $d = \frac{2000}{\tan 7°} \approx 16303{,}92\,\text{m}$
10. $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{300}{1000}\right) \approx 16{,}70°$
11. $h = 2000 \tan 10° + 50 \approx 401{,}57 + 50 = 451{,}57\,\text{m}$
12. $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{30}{40}\right) \approx 36{,}87°$

Solución 4. Ejercicios combinados

1. Para resolver el problema, utilizamos el concepto de triángulos semejantes ya que hay dos triángulos rectángulos con igual ángulo. Denotamos la altura del farol como h.

   Dado que la sombra total del farol es la suma del largo de la sombra de la persona y la distancia desde la base del farol a la posición de la persona, tenemos:

   $$\text{Sombra total} = 3\,\text{m} + 1\,\text{m} = 4\,\text{m}$$

   Establecemos la proporción entre los triángulos semejantes:

   $$\frac{h}{4} = \frac{1{,}7}{3}$$

   Resolviendo para h:

   $$h = 4 \cdot \frac{1{,}7}{3}$$

   $$h = \frac{6{,}8}{3} \approx 2{,}27\,\text{m}$$

   Por lo tanto, la altura del farol es aproximadamente 2,27 m.

2. Utilizando la tangente del ángulo:

   $$\begin{aligned}\tan(30^\circ) &= \frac{h}{50}\\ h &= 50\tan(30^\circ)\\ &= 50 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 28{,}87\,\text{metros}\end{aligned}$$

3. Utilizando la tangente del ángulo:

   $$\begin{aligned}\tan(60^\circ) &= \frac{L}{200}\\ L &= 200 \cdot \tan 60^\circ\\ &= 200 \cdot \sqrt{3}\\ &= 346\,\text{metros}\end{aligned}$$

4. Utilizando el seno del ángulo:

   $$\begin{aligned}\sin(45^\circ) &= \frac{20}{d}\\ d &= \frac{20}{\sin(45^\circ)}\\ &= \frac{20}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\\ &= 20\sqrt{2} \approx 28{,}28\,\text{metros}\end{aligned}$$

5. Utilizando el coseno del ángulo:

   $$\begin{aligned}\cos(75^\circ) &= \frac{x}{100}\\ x &= 100\cos(75^\circ)\\ &= 100 \times 0{,}2588 \approx 25{,}88\,\text{metros}\end{aligned}$$

6. Utilizando el teorema de Pitágoras en el triángulo formado:

   $$\begin{aligned}\text{Distancia directa} &= \frac{200}{\cos(25^\circ)}\\ &\approx \frac{200}{0{,}9063} \approx 220{,}7\,\text{metros}\end{aligned}$$

7. Utilizando el seno del ángulo:

   $$\begin{aligned}\text{Diferencia de altura} &= 150\sin(10^\circ)\\ &\approx 150 \times 0{,}1736\\ &\approx 26{,}04\,\text{metros}\end{aligned}$$

8. Utilizando la tangente del ángulo:

   $$\begin{aligned}\tan(45^\circ) &= \frac{h}{30}\\ h &= 30\tan(45^\circ) \quad = 30 \times 1 = 30\,\text{metros}\end{aligned}$$

9. Respuesta: La distancia es de 260 metros aproximadamente.